САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КРИСТАЛЛОГРАФИЯ

Точечные группы симметрии, принцип их вывода с помощью понятия о группах. Простые формы кристаллов низшей категории.

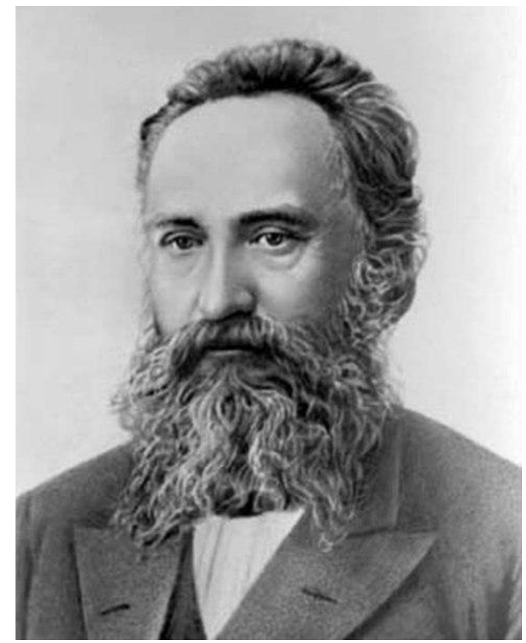
лекция № 3

Полная совокупность элементов симметрии кристаллического многогранника называется видом симметрий, или точечной группой симметрии.

Все разнообразие симметрии кристаллических многогранников исчерпывается 32 видами симметрии

О. Браве

А.В. Гадолин



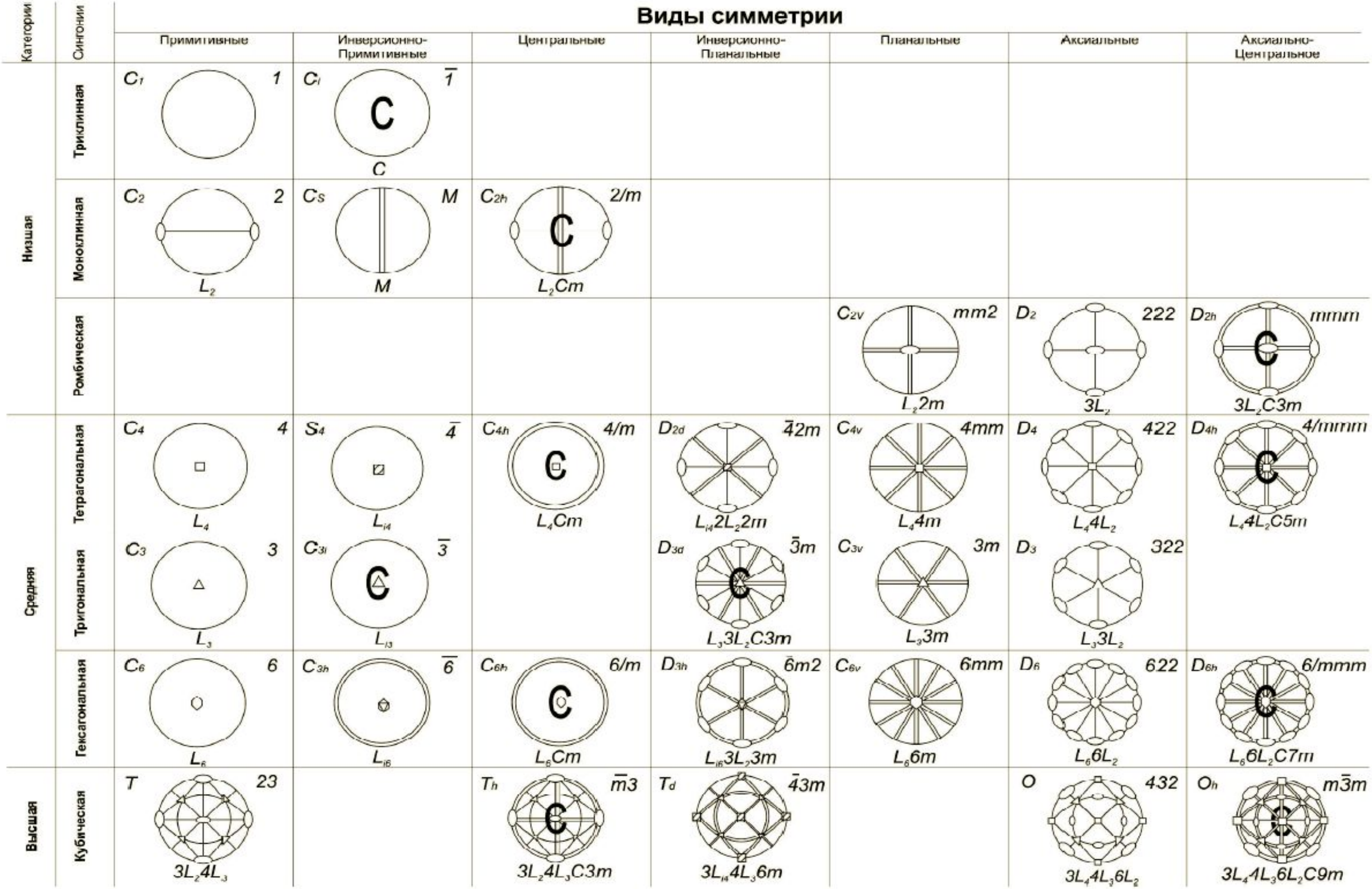
Е.С. Федоров

Классификация видов симметрии

Категории и сингонии

Категории

Низшая	нет осей симметрии высшего порядка (т.е. порядка $n > 2$)
Средняя	*одна* ось симметрии высшего порядка
Высшая	больше, чем одна, ось симметрии высшего порядка



Виды симметрии

Категории	Сингонии	Примитивные	Инверсионно-Примитивные	Центральные	Инверсионно-Планальные	Планальные	Аксиальные	Аксиально-Центральное
Низшая	Триклинная	C_1 1	C_i $\bar{1}$ C					
	Моноклинная	C_2 2 L_2	C_s M M	C_{2h} 2/m L_2Cm				
	Ромбическая					C_{2v} mm2 L_22m	D_2 222 $3L_2$	D_{2h} mmm $3L_2C3m$
Средняя	Тетрагональная	C_4 4 L_4	S_4 $\bar{4}$ L_{i4}	C_{4h} 4/m L_4Cm	D_{2d} $\bar{4}2m$ $L_{i4}2L_22m$	C_{4v} 4mm L_44m	D_4 422 L_44L_2	D_{4h} 4/mmm L_44L_2C5m
	Тригональная	C_3 3 L_3	C_{3i} $\bar{3}$ L_{i3}		D_{3d} $\bar{3}m$ L_33L_2C3m	C_{3v} 3m L_33m	D_3 322 L_33L_2	
	Гексагональная	C_6 6 L_6	C_{3h} $\bar{6}$ L_{i6}	C_{6h} 6/m L_6Cm	D_{3h} $\bar{6}m2$ $L_{i6}3L_23m$	C_{6v} 6mm L_66m	D_6 622 L_66L_2	D_{6h} 6/mmm L_66L_2C7m
Высшая	Кубическая	T 23 $3L_24L_3$		T_h $m\bar{3}$ $3L_24L_3C3m$	T_d $\bar{4}3m$ $3L_{i4}4L_36m$		O 432 $3L_44L_36L_2$	O_h $m\bar{3}m$ $3L_44L_36L_2C9m$

Классификация видов симметрии

Категории и сингонии

Сингонии высшей категории

Кубическая   Больше одной оси высшего порядка

всегда $4L_3$!!!

T 23

$3L_24L_3$

T_d $\bar{4}3m$

$3L_{i4}4L_36m$

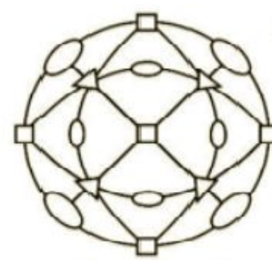
O_h $m\bar{3}m$

$3L_44L_36L_2C9m$

T_h $\overline{m}3$

$3L_24L_3C3m$

O 432



$3L_44L_36L_2$

Классификация видов симметрии
Единичные направления

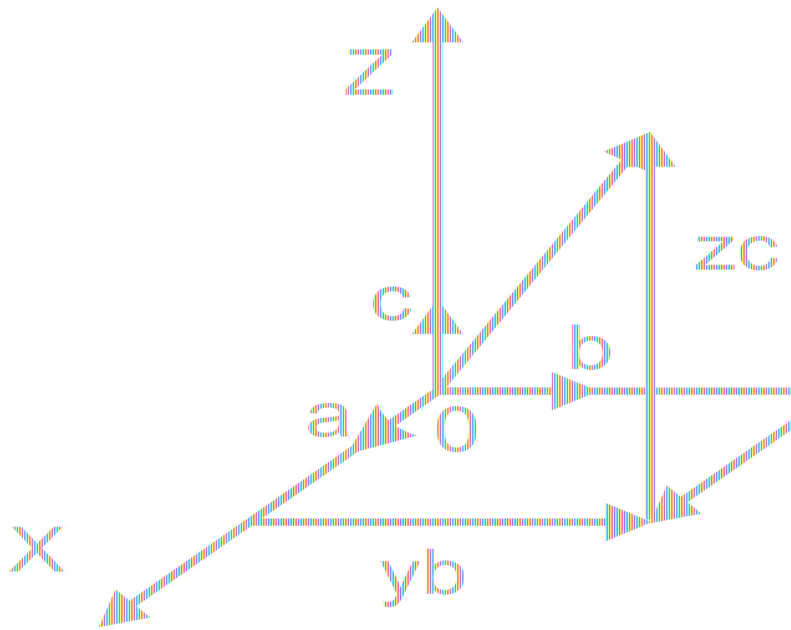
Единичное направление -
в кристалле одно

Симметрично-равные направления -
в кристалле больше, чем одно

Классификация видов симметрии
Единичные направления

Категория	Сингония	Ед. направления
Низшая (ед. напр. > 1)	триклинная	все (∞)
	моноклинная	∞, но *не все*
	ромбическая	3
Средняя (ед. напр. = 1)	тетрагональная	1
	тригональная	1
	гексагональная	1
Высшая (ед. напр. = 0)	кубическая	0

Разложение вектора по базису

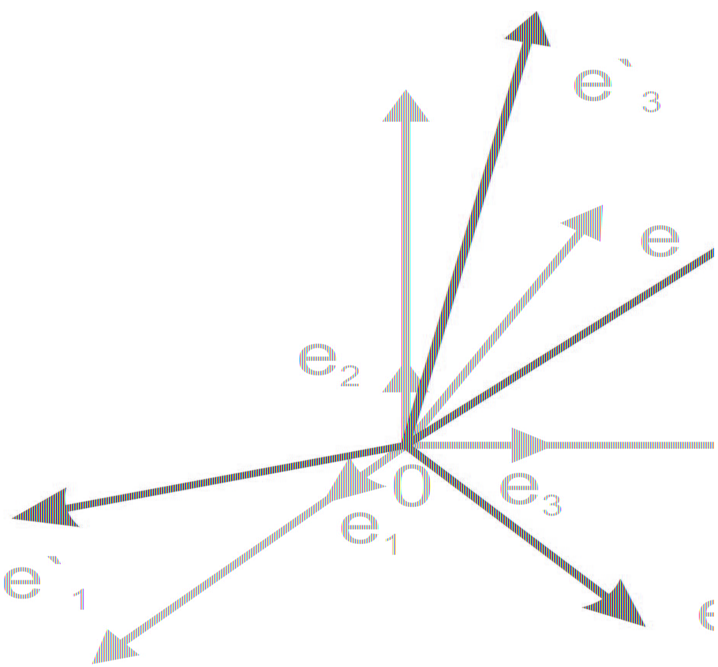


$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} \cdot$$

Вектора после равенства являются компонентами вектора d
а данное выражение его разложением по базису

Преобразование базиса -
преобразование системы координат с сохранением начала координат

Пусть исходный базис e образован тройкой векторов (e_1, e_2 и e_3) а новый базис e\` тройкой ($e_1$\`, e_2\`, $e_3$\`). Базисы имеют общее начало.



$$\vec{e}`_1 = \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{12}\vec{e}_2 +$$
$$\vec{e}`_2 = \alpha_{21}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2 +$$
$$\vec{e}`_3 = \alpha_{31}\vec{e}_1 + \alpha_{32}\vec{e}_2 +$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{pmatrix}$$

Если фигура составлена из равных частей, равно расположенных друг относительно друга, то существует преобразования, совмещающий равные части фигуры друг с другом. Такую фигуру называют симметричной, а преобразования совмещения – преобразованиями или операциями симметрии

преобразования идентичности

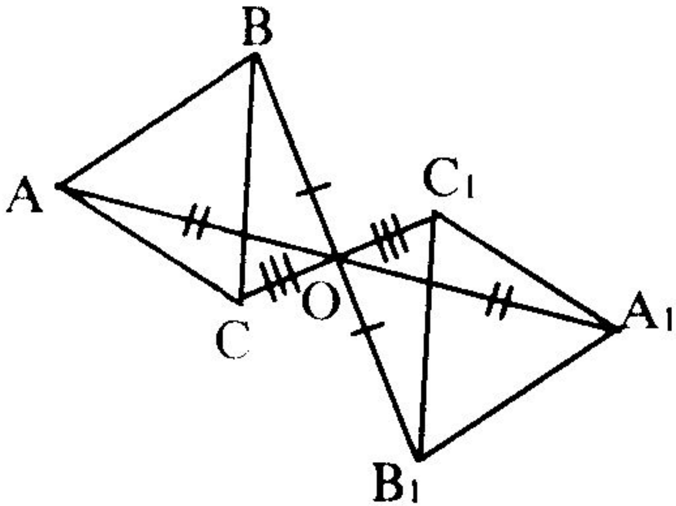
поворот вокруг прямой оси

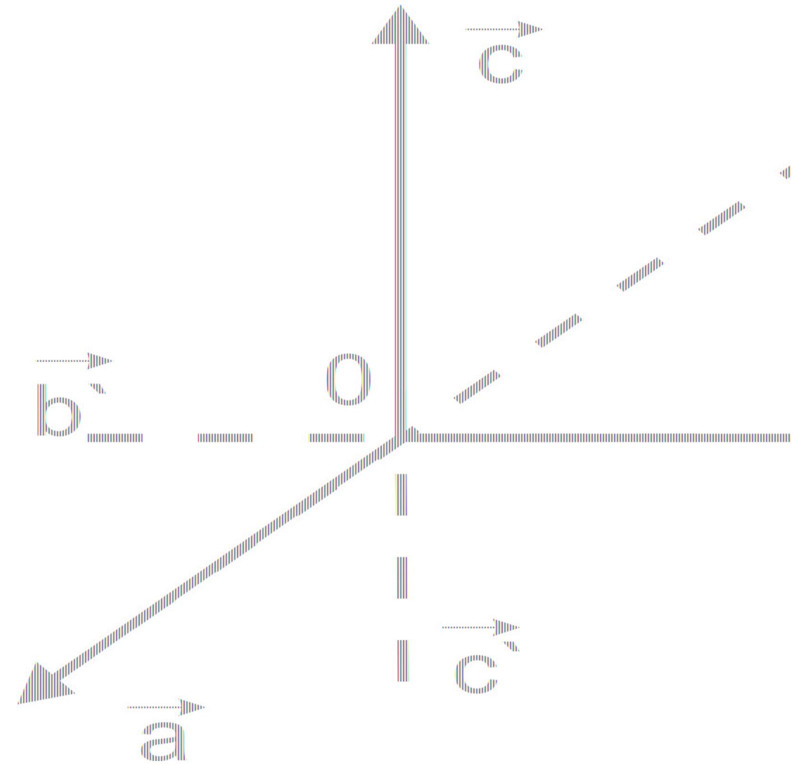
отражение в плоскости

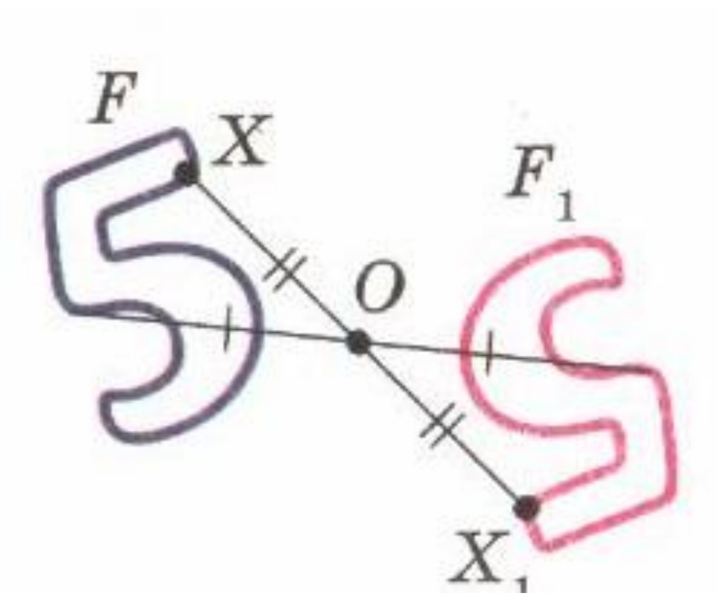
инверсия в точке

поворот вокруг прямой линии с одновременной инверсией в точке

Центр инверсии







$\vec{a}` = -1 \times \vec{a} + 0 \times \vec{b}$ ·

$\vec{b}` = 0 \times \vec{a} - 1 \times \vec{b} +$ (

$\vec{a}` = 0 \times \vec{a} + 0 \times \vec{b}$

Центр инверсии

$$\vec{a}` = -1 \times \vec{a} + 0 \times \vec{b} \ldots$$

$$\vec{b}` = 0 \times \vec{a} - 1 \times \vec{b} + \ldots$$

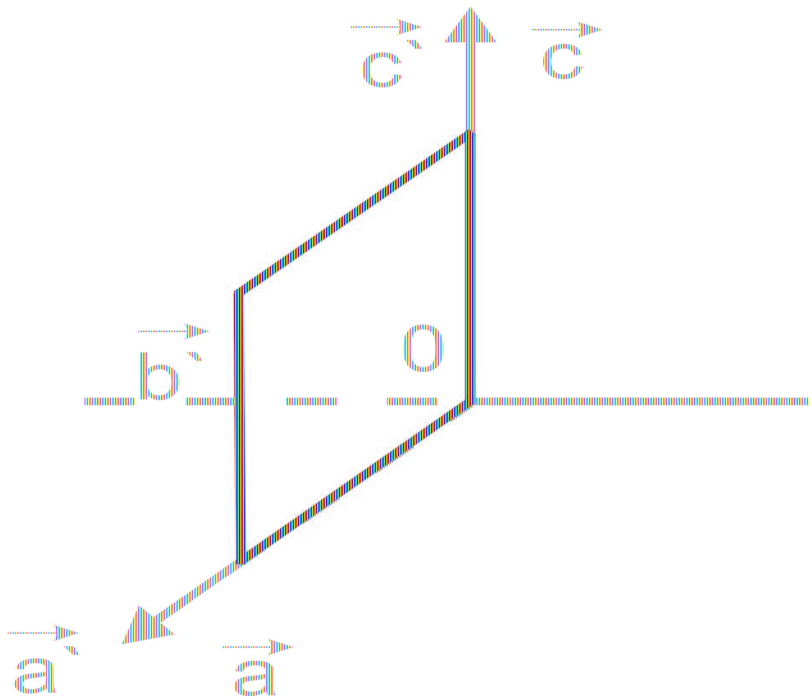
$$\vec{a}` = 0 \times \vec{a} + 0 \times \vec{b}$$

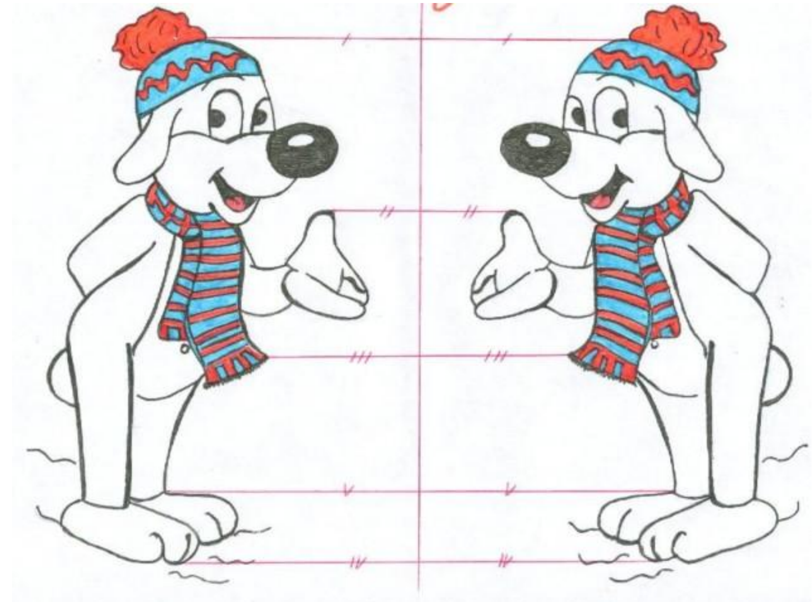
$$C = \left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{array} \right.$$

Плоскость симметрии

Симметрия в животном мире

Плоскость симметрии





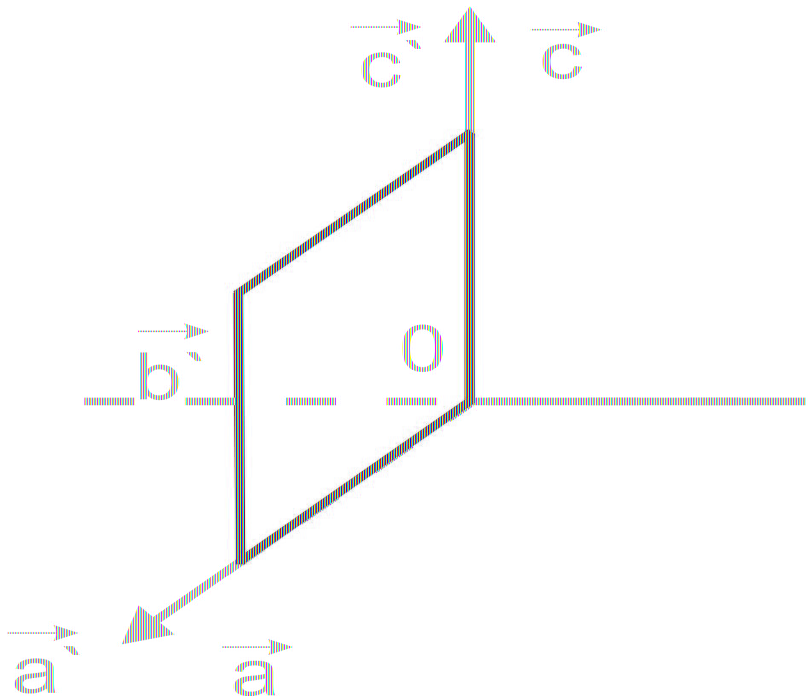
$$\vec{a}` = 1 \times \vec{a} + 0 \times \vec{b} +$$

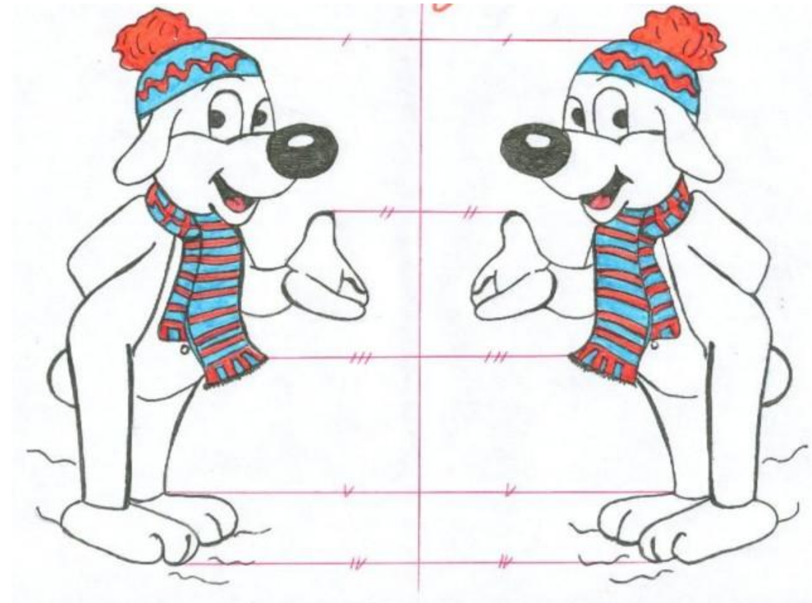
$$\vec{b}` = 0 \times \vec{a} - 1 \times \vec{b} +$$

$$\vec{c}` = 0 \times \vec{a} + 0 \times \vec{b} -$$

$$m_y = \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right.$$

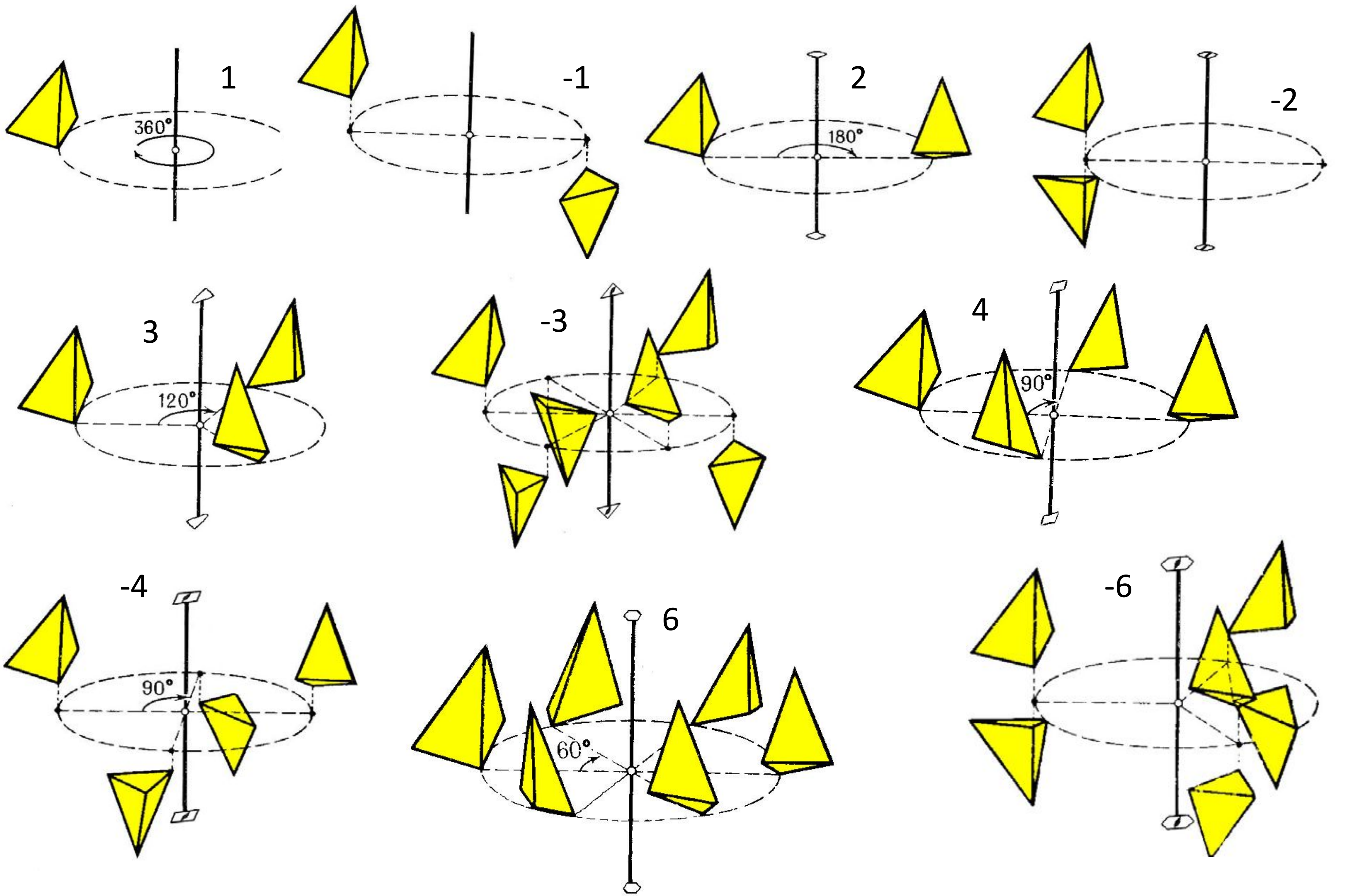
Плоскость симметрии



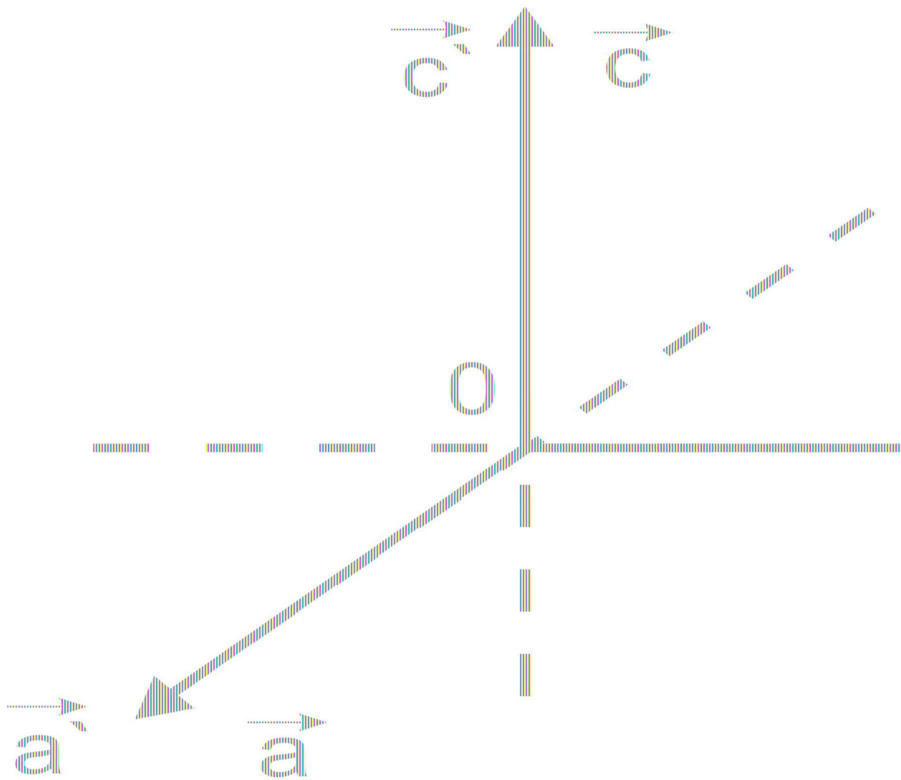


$$m_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad m_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Поворотные оси симметрии



Поворотные оси симметрии

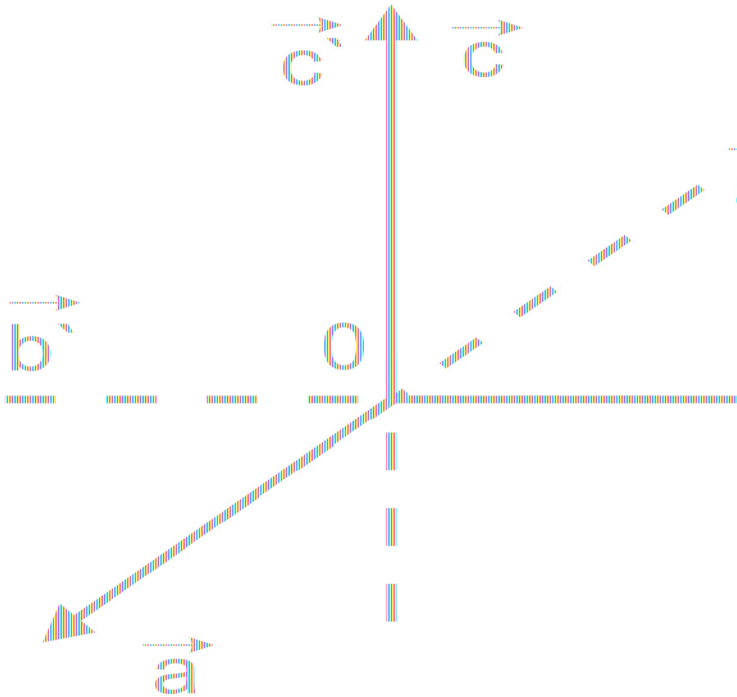


$$L_1 = \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right.$$

L_1

L_2

Поворотные оси симметрии

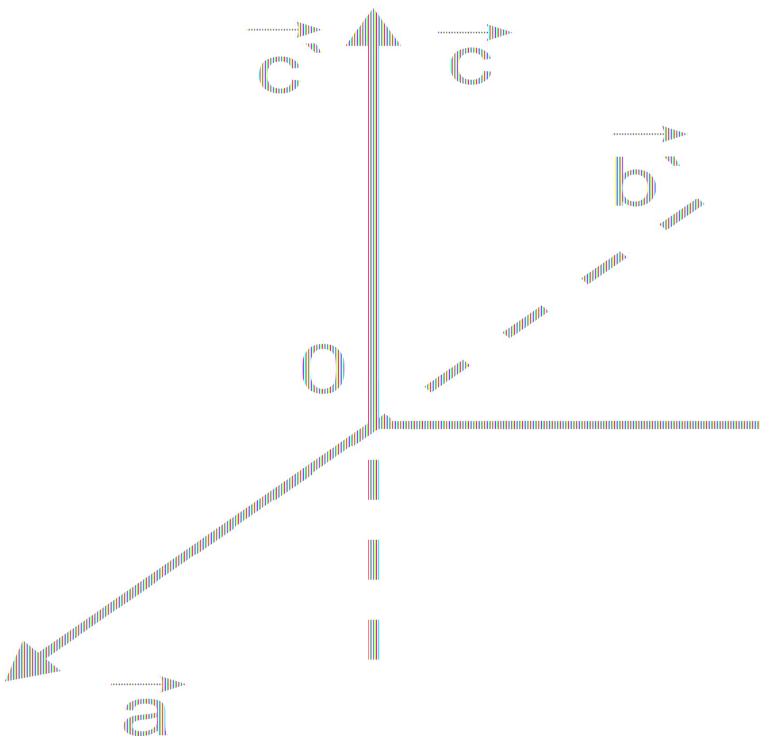


$$2_z = \left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{array} \right.$$

$$2_y = \left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right. \qquad 2_x = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{array} \right.$$

L_4

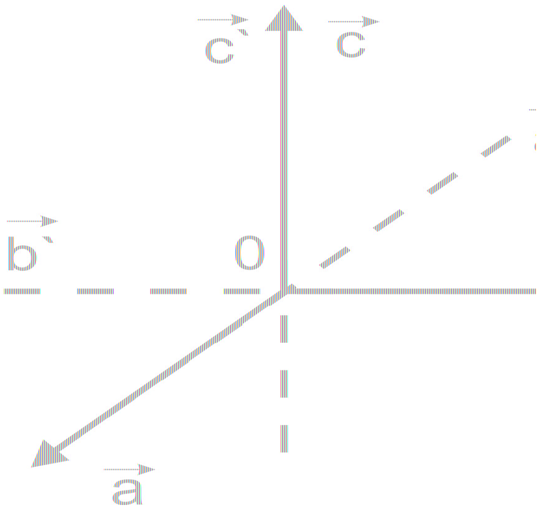
Поворотные оси симметрии



$$4_z = \left(\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right.$$

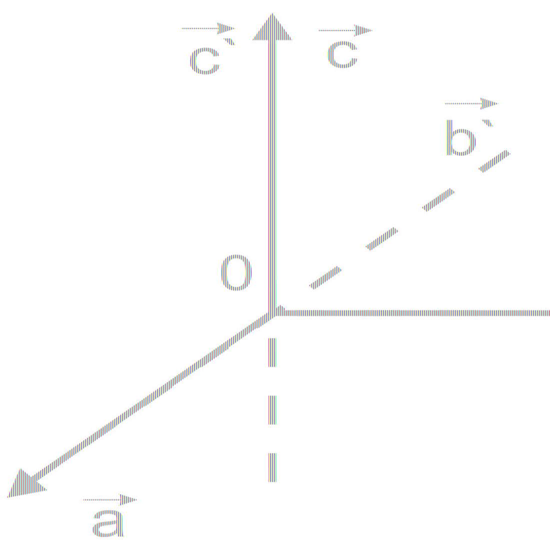
Поворотные оси симметрии

L_2



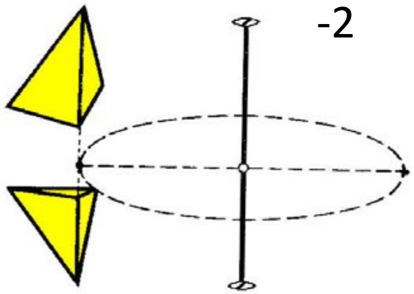
$$2_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 2_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

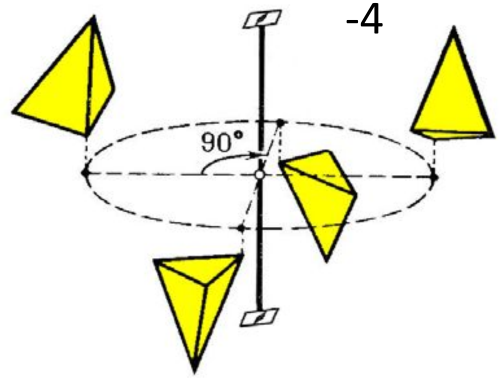
$$2_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

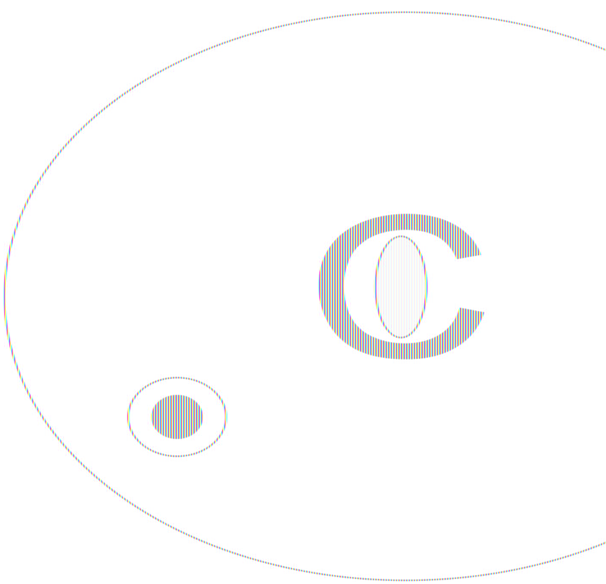


$$4_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

инверсионные оси симметрии



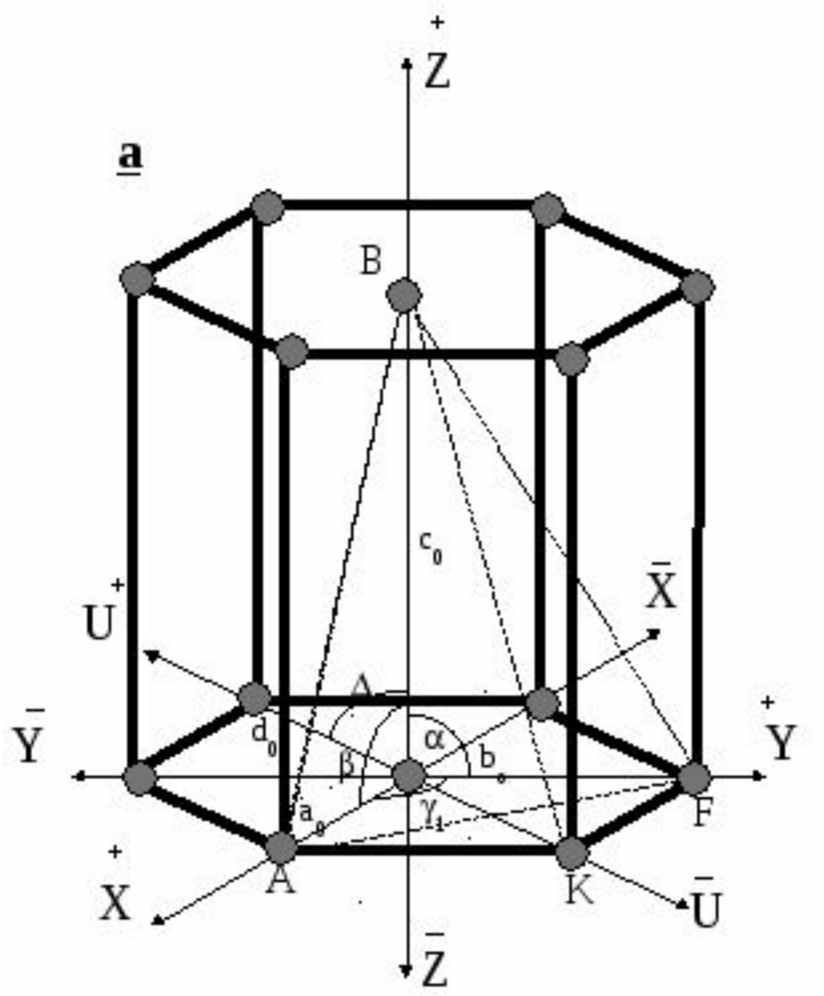




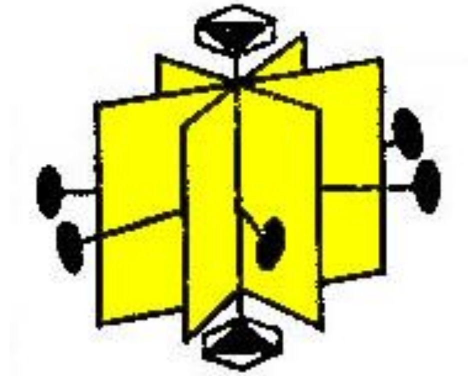
$$m_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad m_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{2} = r \qquad m_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

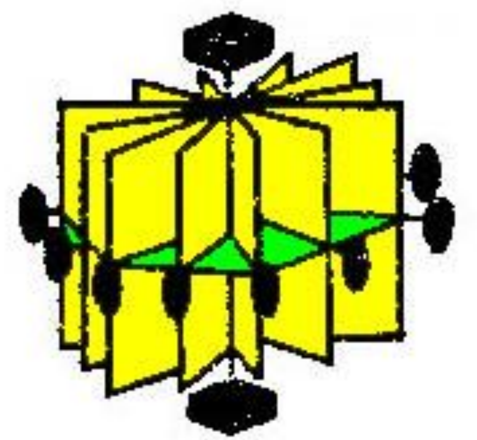
Неортогональные системы координат



$a=b \neq c,\ \alpha=\beta=90^0,\ \gamma=120^0$



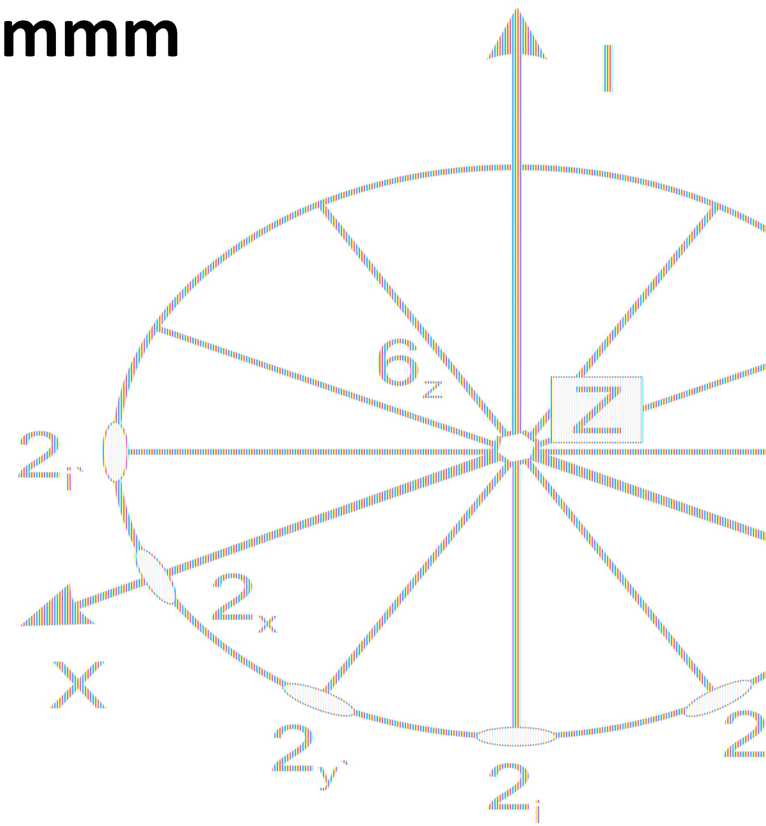
$L_3 3L_2 3M$ тригональна
я
голоэдрия

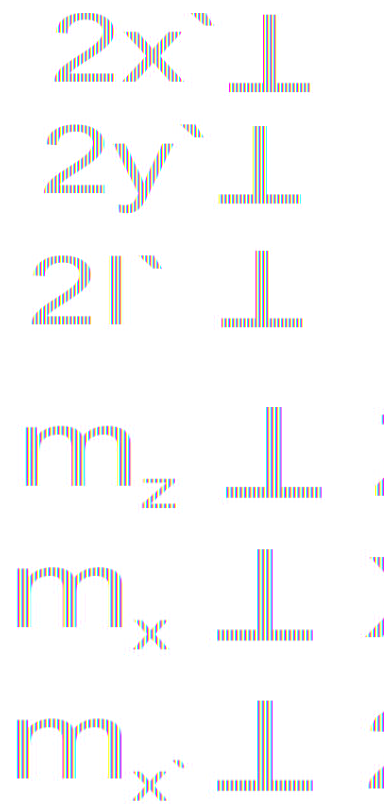


$L_6 6L_2 7mc$ гексагональна
я
голоэдрия

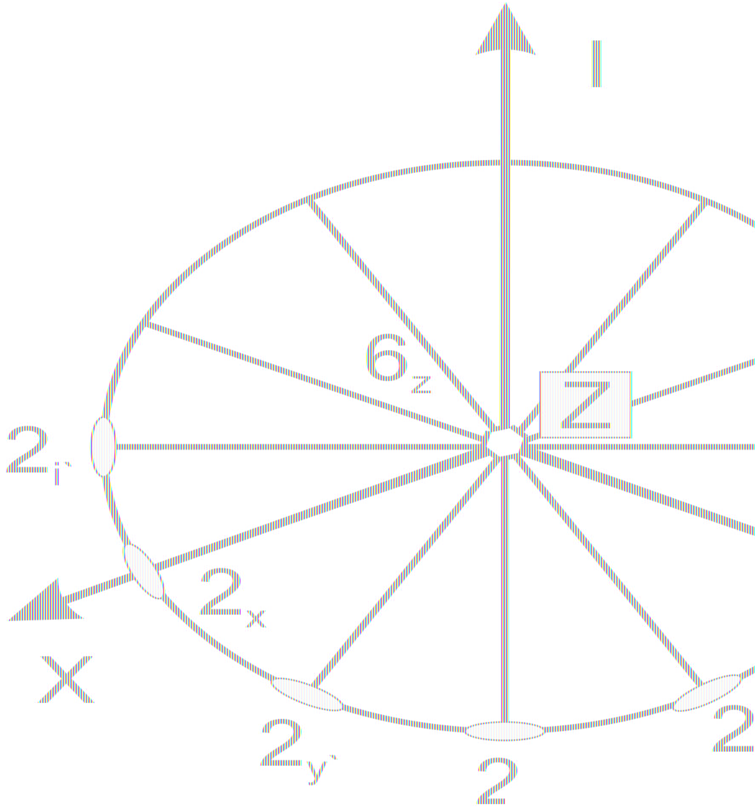
Гексагональная сингония

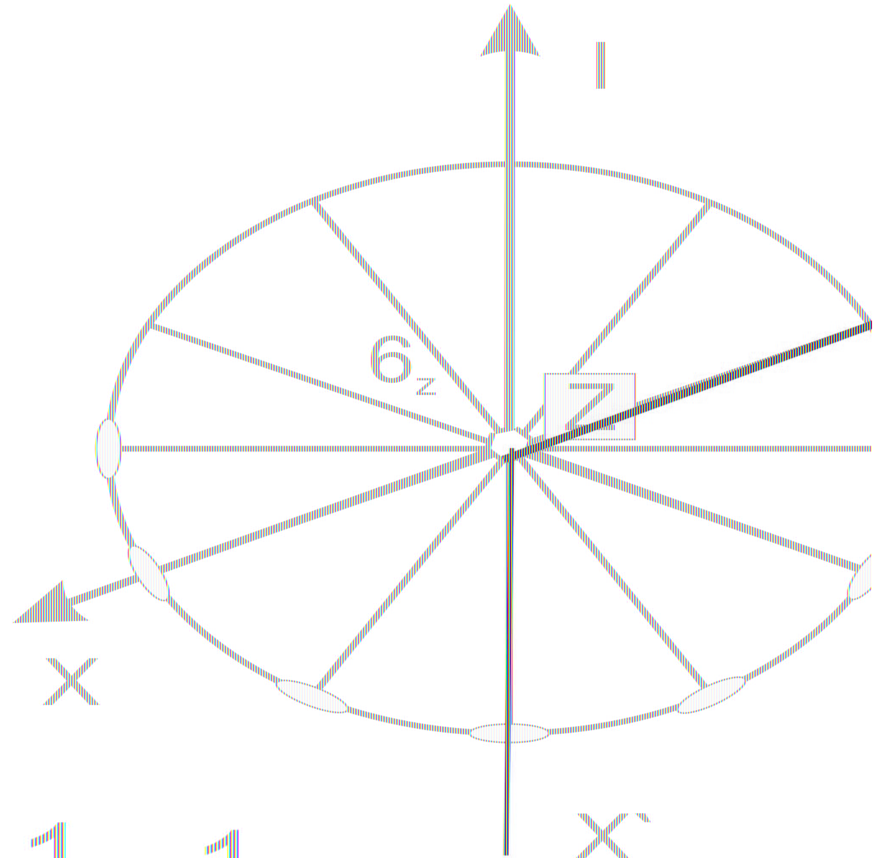
6/mmm





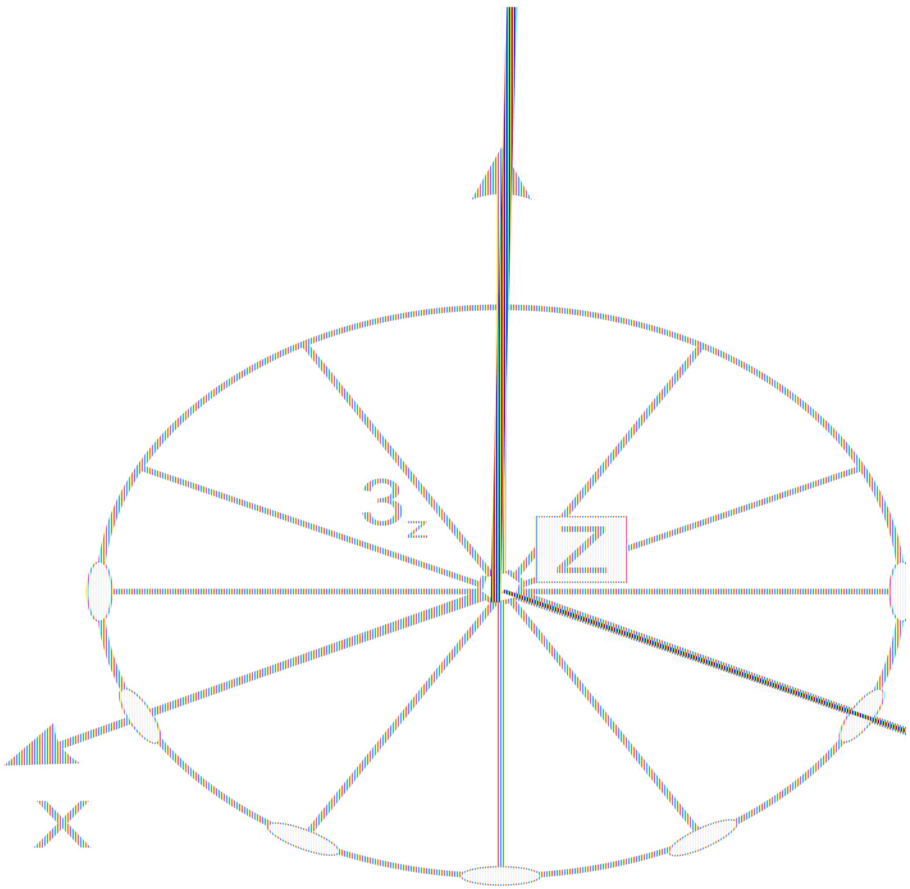
Гексагональная сингония





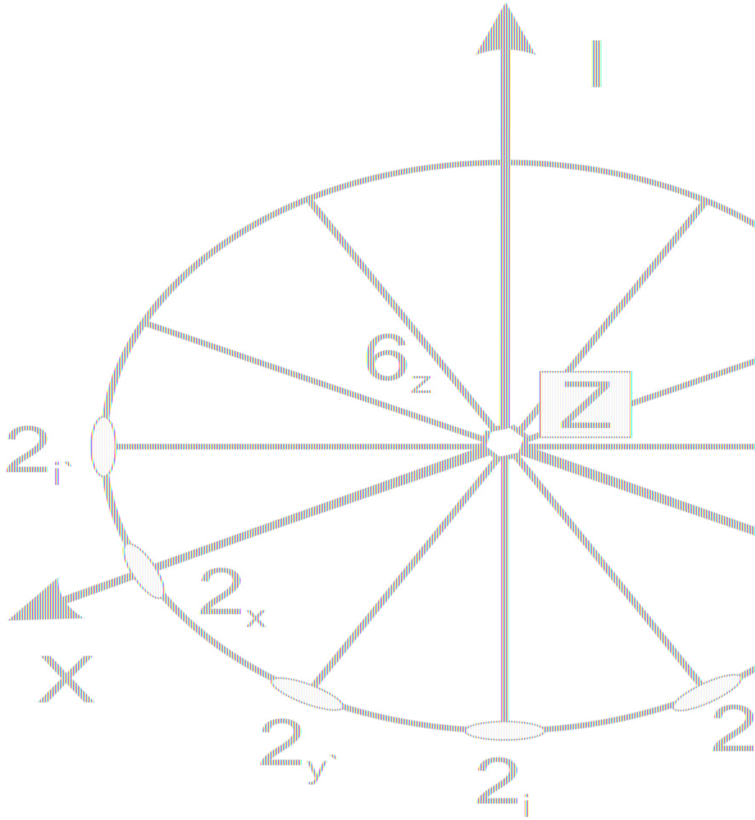
$$6_z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Гексагональная сингония



$$3_z = \left(\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right.$$

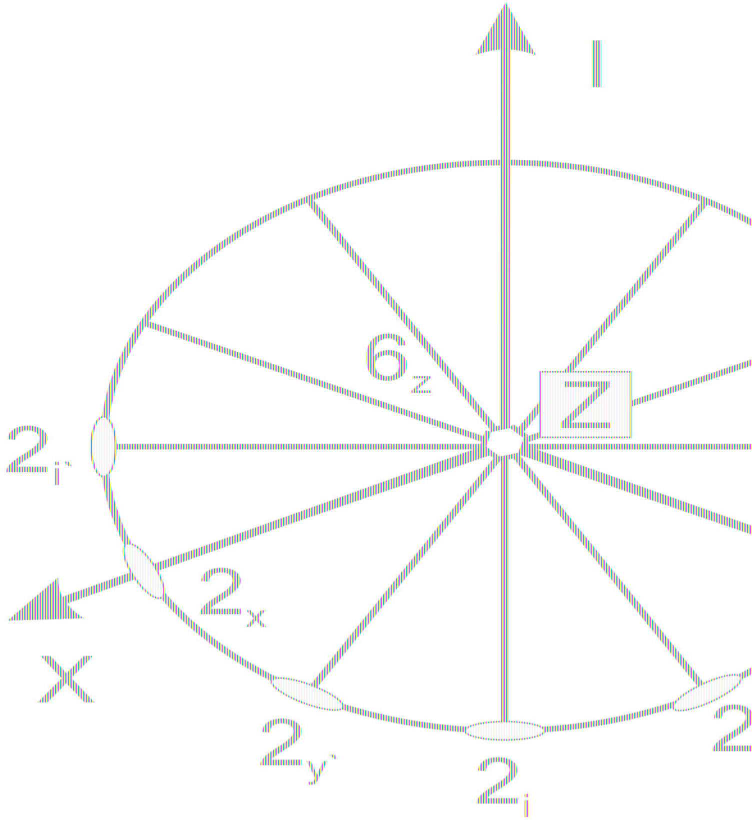
Гексагональная сингония



$$2_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_{x`} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Гексагональная сингония



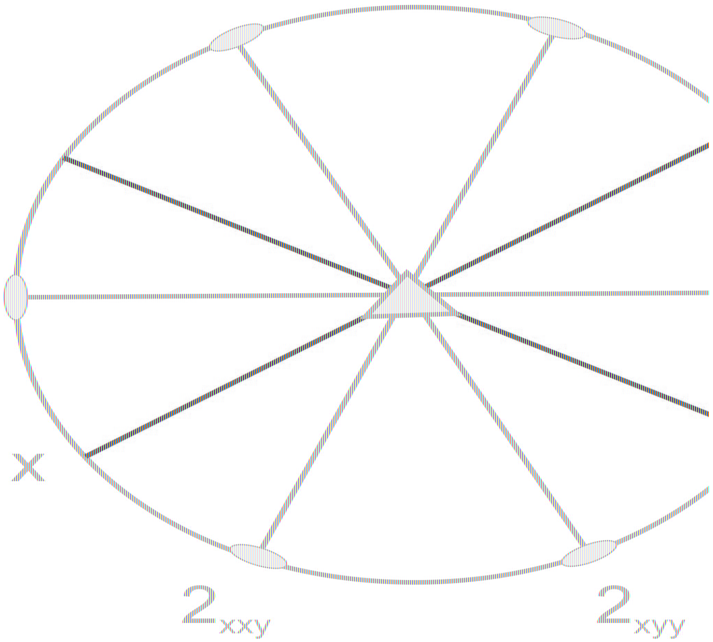
$$m_x = \left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right.$$

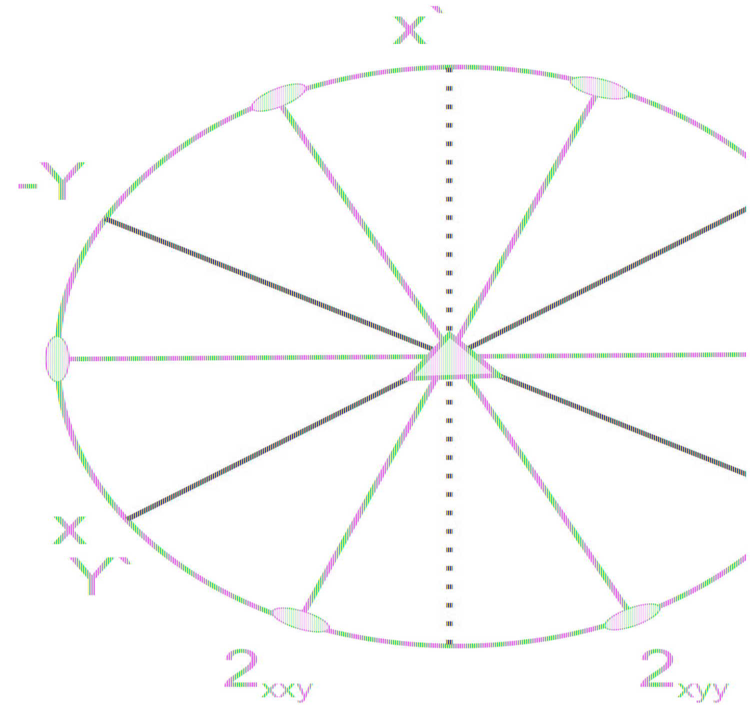
$$m_{y`} = \left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right.$$

$$m_i = \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right.$$

$$m_z = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right.$$

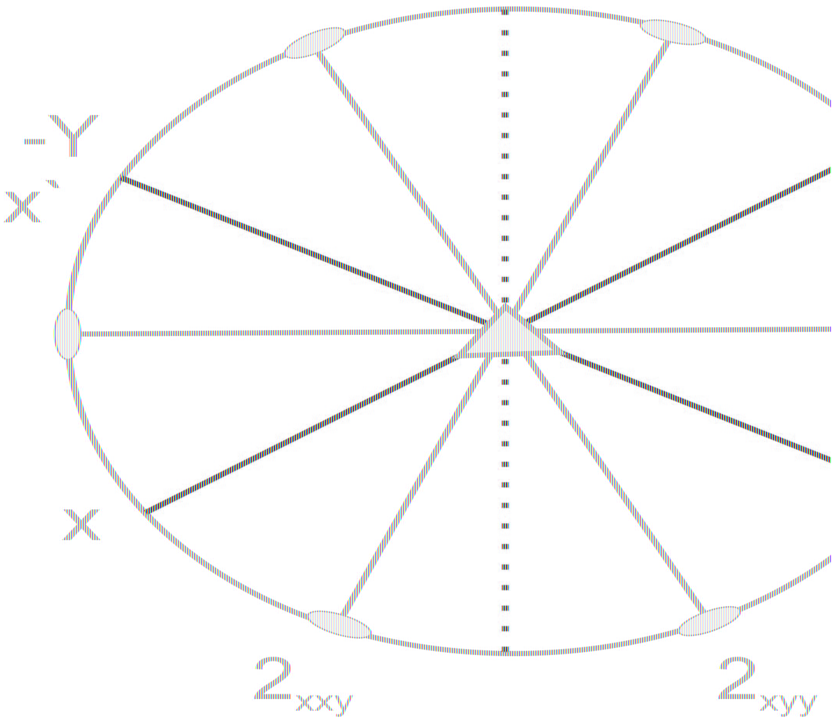
Тригональная сингония





$$3_z = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{array} \right.$$

Тригональная сингония



$$2_{xy} = \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right.$$

$$2_{xxy} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{array} \right.$$

$$2_{xyy} = \left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right.$$

Свойства матриц

Перемножение матриц

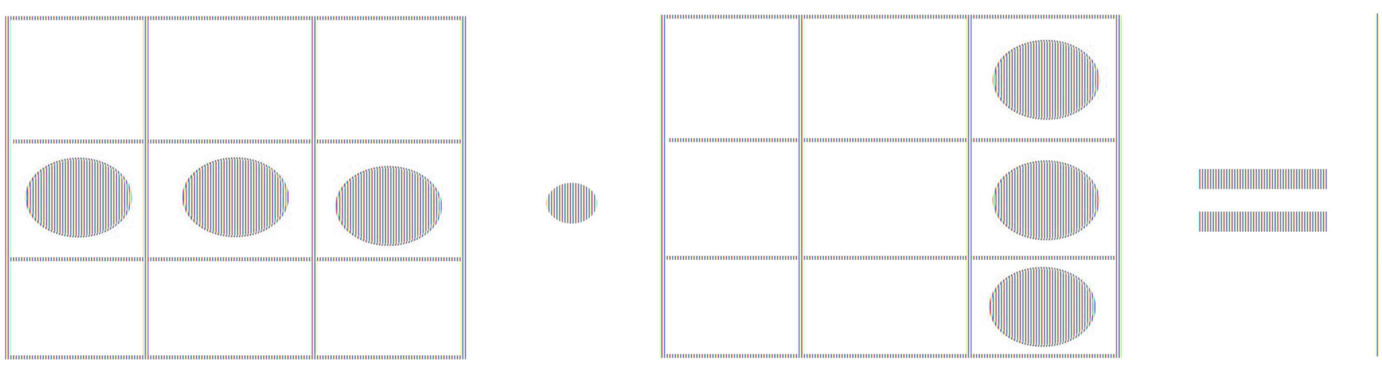
Произведением двух матриц **A** = α_{ik} строения $m \times n$ и **B** = β_{kj}
строения n×r *есть* матрица **C** = γ_{ij} строения $m \times r$ *, состоящая из элементов*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{0,0} & \mathbf{a}_{0,1} \\ \mathbf{a}_{1,0} & \mathbf{a}_{1,1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{0,0} & b_{0,1} \\ b_{1,0} & b_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{0,0}\mathbf{a}_{0,0} + b_{0,1}\mathbf{a}_{1,0} & b_{0,0}\mathbf{a}_{0,1} + b_{0,1}\mathbf{a}_{1,1} \\ b_{1,0}\mathbf{a}_{0,0} + b_{1,1}\mathbf{a}_{1,0} & b_{1,0}\mathbf{a}_{0,1} + b_{1,1}\mathbf{a}_{1,1} \end{pmatrix}$$

Свойства матриц

Перемножение матриц



Свойства матриц

Перемножение матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

$$C = A \times B;$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix}, \text{ где } \begin{array}{l} c_{11} = a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + \ldots a_{1n} \times b_{n1}; \\ c_{12} = a_{11} \times b_{12} + a_{12} \times b_{22} + \ldots a_{1n} \times b_{n2}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{mk} = a_{m1} \times b_{1k} + a_{m2} \times b_{2k} + \ldots a_{mn} \times b_{nk}. \end{array}$$

Умножение матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 7 & 1\cdot 6 + 2\cdot 8 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 7 & 3\cdot 6 + 4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 3 + 0\times 0 & 1\times 0 + 0\times 2 \\ 0\times 3 + 3\times 0 & 0\times 0 + 3\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Теорема Эйлера и следствия

Поворот вокруг двух пересекающихся осей эквивалентен
повороту вокруг третьей, равнодействующей им

$L_n + \perp m =$

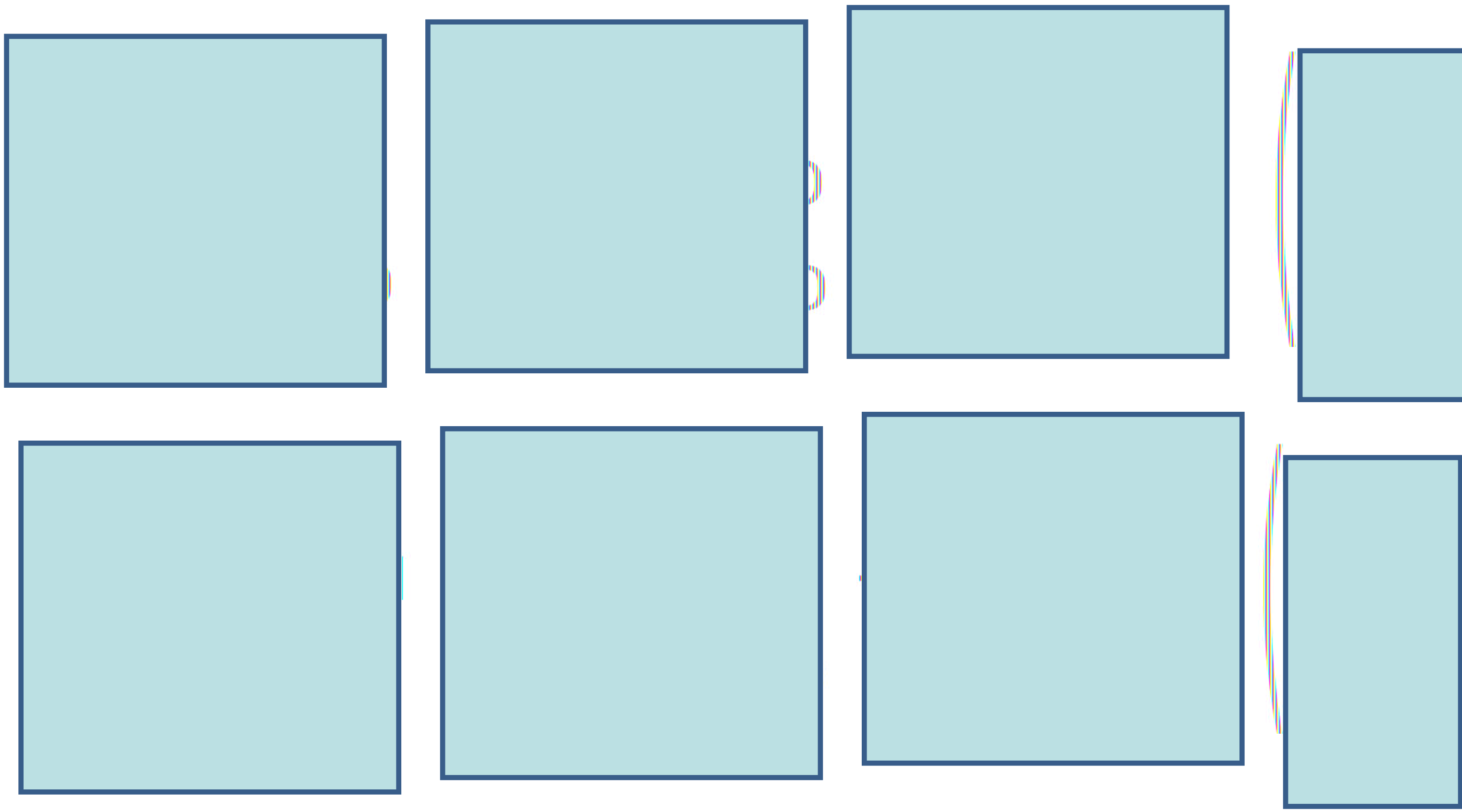
$2_z \times m_z$

Теорема Эйлера и следствия

Если поворотную ось симметрии n порядка пересекает перпендикулярная к ней
Поворотная ось симметрии 2 второго порядка, то через точку x пересечения
Проходят n осей 2 порядка, расположенных перпендикулярно оси n под углом
360/2n друг к другу.

$4_z \times 2_x$

$4_z^2 \times 2_x$



Теорема Эйлера и следствия

$4^{3}_{z} \times 2_{x}$

$4^{4}_{z} \times 2_{x}$

Теорема Эйлера и следствия

Если через поворотную ось симметрии порядка n проходит параллельная ей
плоскость симметрии m, то через эту ось проходит n таких плоскостей
под
угл

$4^1_z \times m_x =$

$4^2_z \times m_x =$

$4^3_z \times m_x =$

Теорема Эйлера и следствия

$4_z^4 \times m_x =$

относительно друг друга

Группа

Множество G отличных друг от друга элементов называется группой, если выполнены следующие аксиомы:

Существует алгебраическое действие, которое каждой упорядоченной паре элементов g_1 и g_2 из G однозначно ставит в соответствие определенный элемент $g_3=g_1g_2$ из G

Умножение ассоциативно, т.е. для любых трех элементов g_1 , g_2 и g_3 из множества G справедливо равенство $(g_1g_2)g_3=g_1(g_2g_3) = g_1g_2g_3$

Существует нейтральный элемент e принадлежащий G такой, что $ge = eg = g$ для любого g из множества G

Для каждого элемента g принадлежащего G существует обратный элемент g^{-1} такой, что $gg^{-1} = g^{-1}g = e$

Группа

Например
:

Например: множество целых чисел

Существует алгебраическое действие, которое каждой упорядоченной паре элементов g_1 и g_2 из G однозначно ставит в соответствие определенный элемент $g_3=g_1g_2$ из G

сумма любых двух чисел есть целое число

Умножение ассоциативно, т.е. для любых трех элементов g_1 , g_2 и g_3 из множества G справедливо равенство $(g_1g_2)g_3=g_1(g_2g_3) = g_1g_2g_3$

умножение чисел ассоциативно

Существует нейтральный элемент e принадлежащий G такой, что $ge = eg = g$
для любого g из множества G

нейтральный элемент - 0

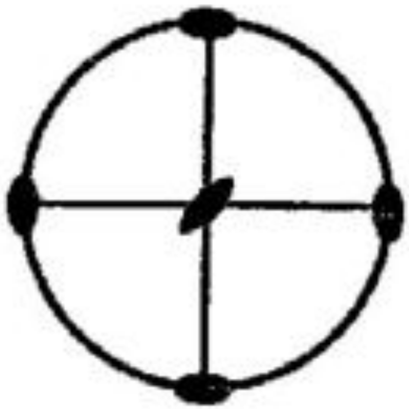
Для каждого элемента g принадлежащего G существует обратный Элемент g^{-1} такой, что $gg^{-1} = g^{-1}g = e$

обратным являются числа с противоположным знаком (+1 и -1)

Группа

В кристаллографии группой является совокупность элементов преобразования симметрии, совмещающая фигуру саму с собой

222



аксиальный вид
ромбическая
сингония

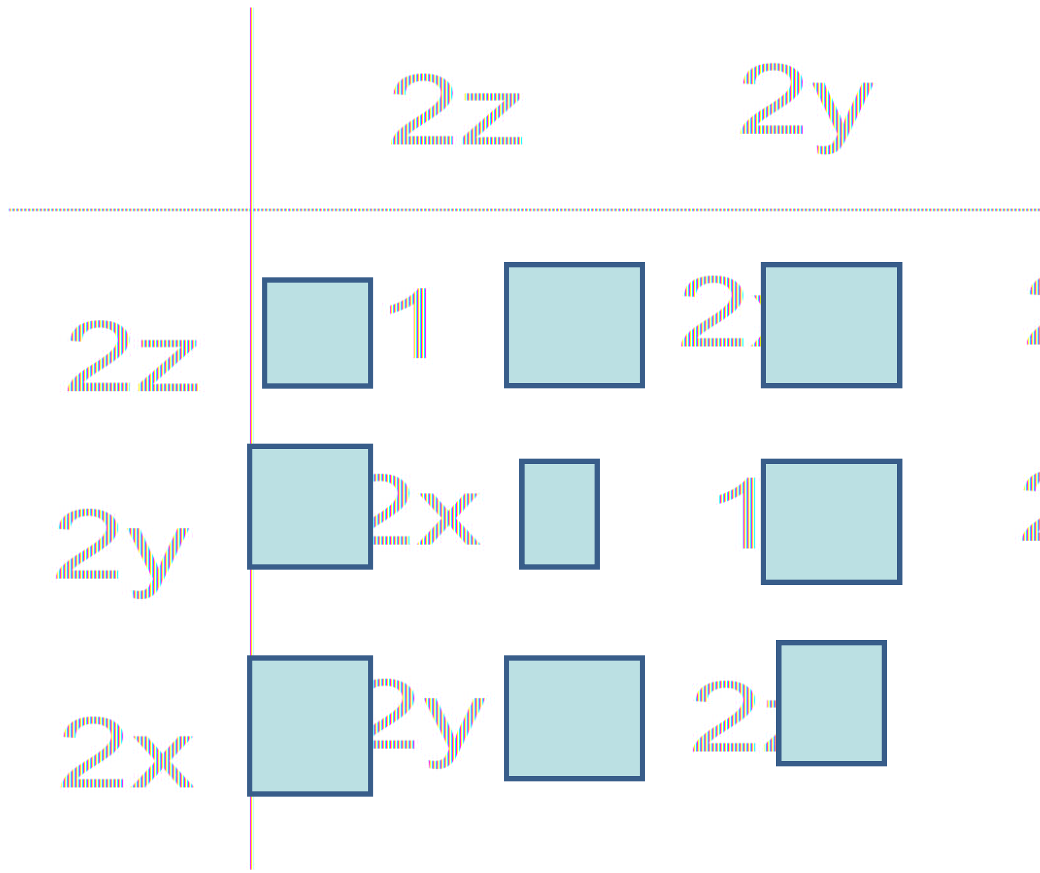
$2_z =$

$2_y =$

$2_x =$

Группа

Покажем, для группы 222 выполняются все 4 аксиомы



	2z	2y
2z	1	2x
2y	2x	1
2x	2y	2z

Такая запись получила название квадрат Кейли

Существует алгебраическое действие, которое каждой упорядоченной паре элементов g_1 и g_2 из G однозначно ставит в соответствие определенный элемент $g_3=g_1g_2$ из G

Умножение всех элементов друг на друга не дало новых элементов симметрии, следовательно множество замкнуто относительно умножения

Умножение ассоциативно, т.е. для любых трех элементов g_1 , g_2 и g_3 из множества G справедливо равенство $(g_1g_2)g_3=g_1(g_2g_3) = g_1g_2g_3$

Умножение матриц, элементами которых являются числа ассоциативно по определению

Существует нейтральный элемент e принадлежащий G такой, что $ge = eg = g$
для любого g из множества G

Нейтральным элементом является единичная матрица

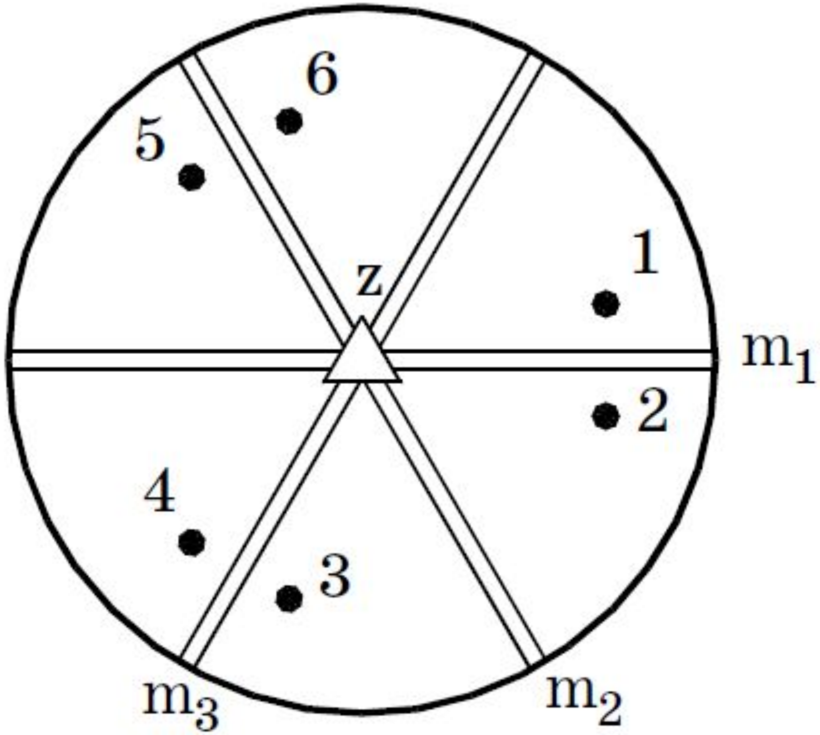
Для каждого элемента g принадлежащего G существует обратный
Элемент g^{-1} такой, что $gg^{-1} = g^{-1}g = e$

Каждый элемент группы является обратным

$2z \times 2z = 1$

Таким образом группа 222 полностью удовлетворяет все аксиомам

Квадрат Кейли группы **3m**



Тригональная сингония

Планальный вид симметрии

$$\text{т.1} \to \text{т.2} - \hat{m}_1,$$
$$\text{т.1} \to \text{т.3} - \hat{3}_z^1,$$
$$\text{т.1} \to \text{т.4} - \hat{m}_2,$$
$$\text{т.1} \to \text{т.5} - \hat{3}_z^2,$$
$$\text{т.1} \to \text{т.6} - \hat{m}_3,$$
$$\text{т.1} \to \text{т.1} - \hat{3}_z^3 = \hat{E}.$$

Эта группа может быть получена при помощи 2-х элементов симметрии 3^1z m_1.

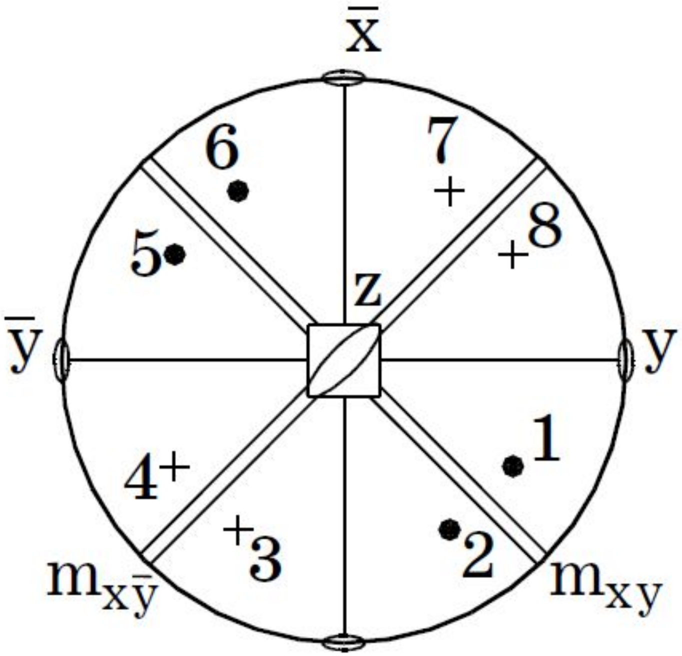
Такие элементы симметрии называются генерирующими элементами или генераторами

Квадрат Кейли группы **3m**

	1	3^1_z	3^2_z	m_1	m_2	m_3
1	1	3^1_z	3^2_z	m_1	m_2	m_3
3^1_z	3^1_z	3^2_z	1	m_2	m_3	m_1
3^2_z	3^2_z	1	3^1_z	m_1	m_1	m_2
m_1	m_1	m_3	m_2	1	3^2_z	3^1_z
m_2	m_2	m_1	m_3	3^1_z	1	3^2_z
m_3	m_3	m_2	m_1	3^2_z	3^1_z	1

Доказать все аксиомы без квадрата Кейли

Рассмотрим точечную группу $\mathbf{L_{4i}2L_22P}$



т.8→т.1 при помощи операции симметрии $\hat{\mathbf{2}}_\mathbf{y}$;

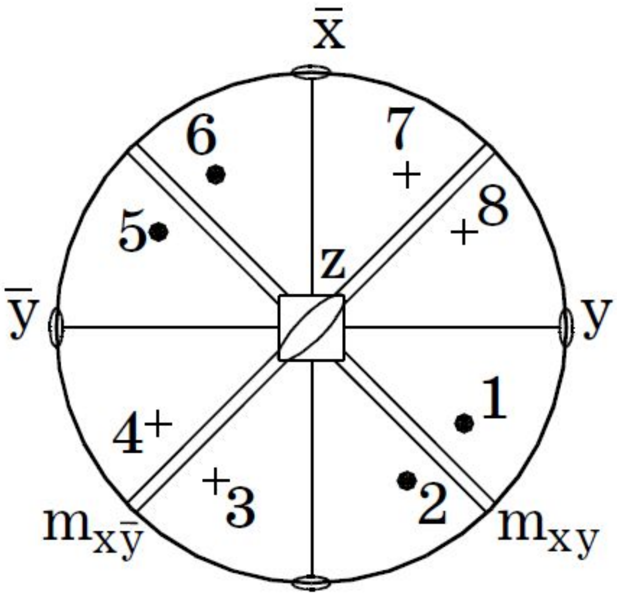
т.1→т.2 при помощи операции симметрии $\hat{\mathbf{m}}_\mathbf{xy}$;

т.8→т.2 при помощи операции симметрии $\hat{\mathbf{4}}_z{}^1$.

$$\hat{\mathbf{2}}_y \times \hat{\mathbf{m}}_{xy} = \hat{\mathbf{4}}_z{}^1$$

Первая аксиома выполняется, так как операции симметрии $\hat{\mathbf{2}}_\mathbf{y}$, $\hat{\mathbf{m}}_{xy}$ и $\hat{\mathbf{4}}_z{}^1$ содержатся в точечной группе $\mathbf{L_{4i}2L_22P}$ $(\mathbf{D_{2d}}, \bar{\mathbf{4}}\mathbf{2m})$

Покажем, $(\hat{2}_y \times \hat{m}_{xy})\hat{m}_{x\bar{y}} = \hat{2}_y(\hat{m}_{xy} \times \hat{m}_{x\bar{y}})$



т.8→т.2 при помощи действия двух операций симметрии $(\hat{2}_y \times \hat{m}_{xy})$;

т.2→т.5 при помощи при помощи операции симметрии $\hat{m}_{x\bar{y}}$.

Таким образом,

т.8→т.5 при помощи действия $(\hat{2}_y \times \hat{m}_{xy})\hat{m}_{x\bar{y}}$

т.8→т.4 при помощи действия двух операций симметрии $(\hat{m}_{xy} \times \hat{m}_{x\bar{y}})$;

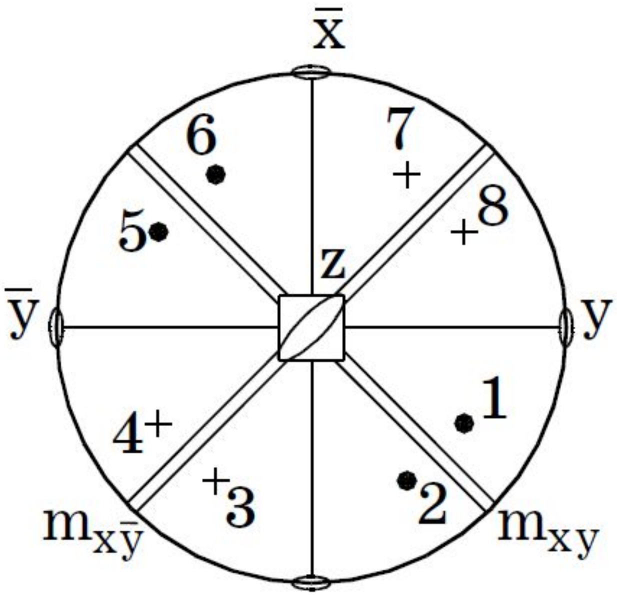
т.4→т.5 при помощи при помощи операции симметрии $\hat{2}_y$

Таким образом,

т.8→т.5 при помощи действия $\hat{2}_y(\hat{m}_{xy} \times \hat{m}_{x\bar{y}})$

Следовательно, выполняется вторая групповая аксиома для группы $\mathbf{L_{4i}2L_22P}$

Покажем, $(\hat{2}_y \times \hat{m}_{xy})\hat{m}_{x\bar{y}} = \hat{2}_y(\hat{m}_{xy} \times \hat{m}_{x\bar{y}})$



4. т. 8→т. 2 под действием $\hat{4}_z^1$,

т. 2→т.8 при помощи $\hat{4}_z^{-1}$.

$$\hat{4}_z^1 \times \hat{4}_z^{-1} = \hat{1} \equiv \hat{E}.$$

Четвертая групповая аксиома также выполняется.

3. В каждом классе симметрии, в частности, $\mathbf{L_{4i}2L_22P}$ ($\mathbf{D_{2d}}$, $\mathbf{\bar{4}2m}$) присутствует симметрическая операция $\hat{1} \equiv \hat{E}$, которая будучи умноженной на любую операцию симметрии данной группы не меняет действие последней. Итак, выполняется третья групповая аксиома.

Следовательно, совокупность операций симметрии $\mathbf{L_{4i}2L_22P}$ ($\mathbf{D_{2d}}$, $\mathbf{\bar{4}2m}$) образует группу.

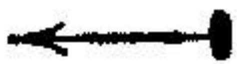
Группы низшей категории

Триклинная сингония

1

-1

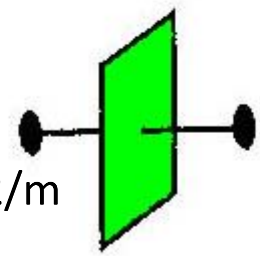
моноклинная сингония



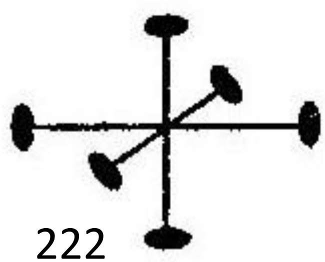
2

m

2/m

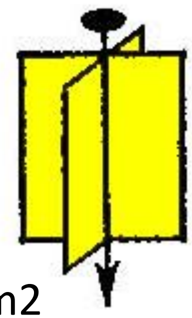


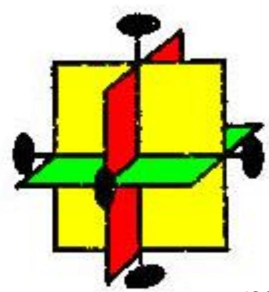
ромбическая сингония



222

mm2





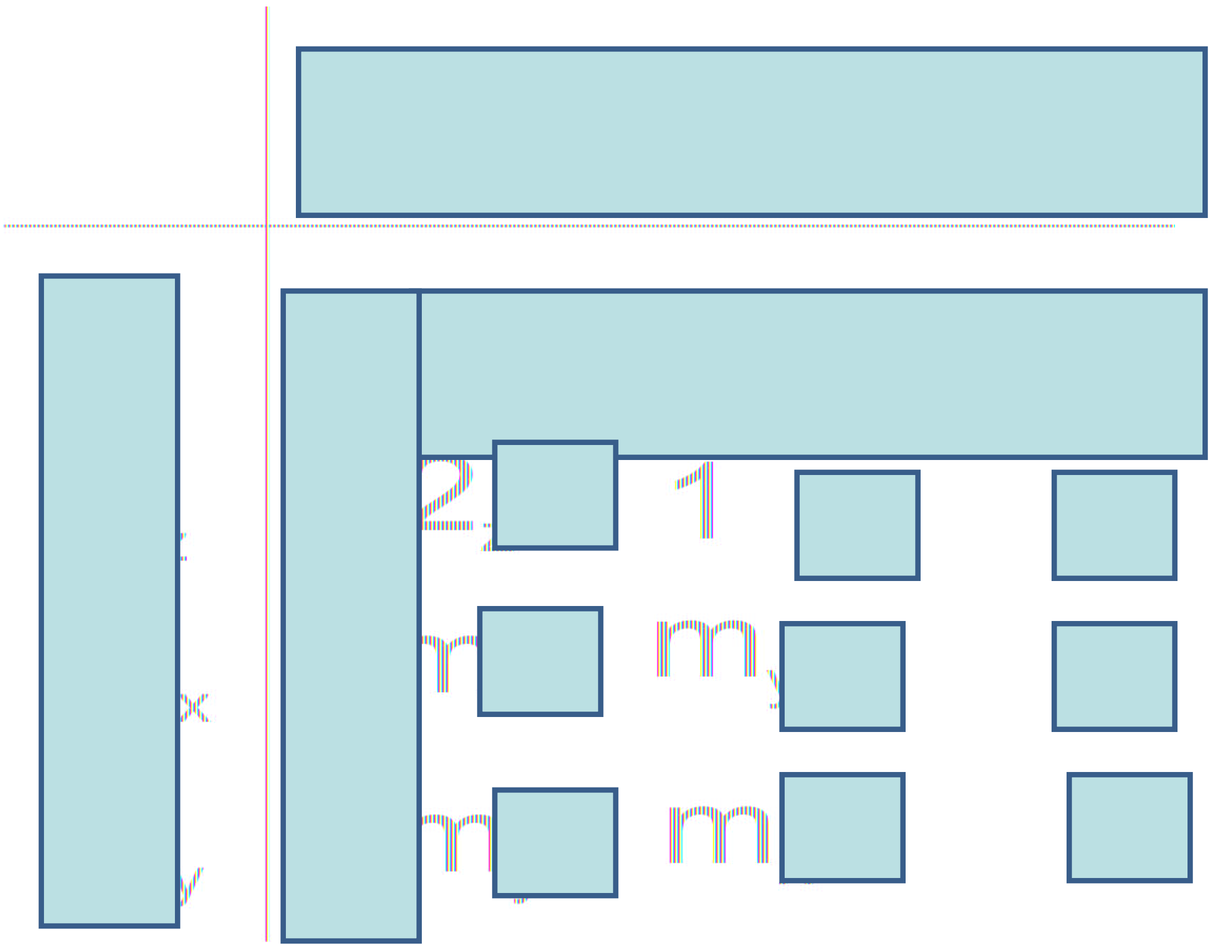
mmm

Группы низшей категории

mm2

Группы низшей категории

mm2



Группы низшей категории

mm2

	1	2_z	m
1	1	2_z	m
2_z	2_z	1	m
m_x	m_x	m_y	1
m_y	m_y	m_x	2_z

mmm

Группы низшей

ои

	1	2_z	2_x	2_y	m_x	m
1	1	2_z	2_x	2_y	m_x	m
2_z	2_z	1	2_y	2_x	m_y	m
2_x	2_x	2_y	1	2_z	c	m
2_y	2_y	2_x	2_z	1	m_z	c
m_x	m_x	m_y	c	m_z	1	2_z
m_y	m_y	m_x	m_z	c	2_z	1
m_z	m_z	c	m_y	m_x	2_y	2
c	c	m_z	m_x	m_y	2_x	2_y

	1	2_z	2_x	2_y	m_x	m
1	1	2_z	2_x	2_y	m_x	m
2_z	2_z	1	2_y	2_x	m_y	m
2_x	2_x	2_y	1	2_z	c	m
2_y	2_y	2_x	2_z	1	m_z	c
m_x	m_x	m_y	c	m_z	1	2_z
m_y	m_y	m_x	m_z	c	2_z	1
m_z	m_z	c	m_y	m_x	2_y	2
c	c	m_z	m_x	m_y	2_x	2_y

Групповые свойства

1. Порядок группы определяется числом ее элементов, т.е. порядок группы определяет число симметрических операций группы. Он соответствует числу граней общего положения, связанных операциями симметрии этой группы.

3m

1
3^1z
3^2z
m_1
m_2
m_3

порядок равен

6

Порядок точечной группы равен количеству граней, которые порождаются из одной грани общего положения всеми преобразованиями симметрии. Или количеству граней в общей простой форме

Групповые свойства

2. В пределах группы можно выделить подмножества, которые сами по себе образуют группу и называются *подгруппой данной группы.*

	1	3_z^1	3_z^2	m_1	m_2	m_3
1	1	3_z^1	3_z^2	m_1	m_2	m_3
3_z^1	3_z^1	3_z^2	1	m_2	m_3	m_1
3_z^2	3_z^2	1	3_z^1	m_1	m_1	m_2
m_1	m_1	m_3	m_2	1	3_z^2	3_z^1
m_2	m_2	m_1	m_3	3_z^1	1	3_z^2
m_3	m_3	m_2	m_1	3_z^2	3_z^1	1

Групповые свойства

Рассматривая таблицу умножения группы **3m**, можно увидеть, что подмножества $\{\hat{E}, \hat{3}_z^1, \hat{3}_z^2\}$, $\{\hat{E}, \hat{m}^1\}$, $\{\hat{E}, \hat{m}^2\}$, $\{\hat{E}, \hat{m}^3\}$ также удовлетворяют всем групповым аксиомам и, следовательно, также образуют группы.

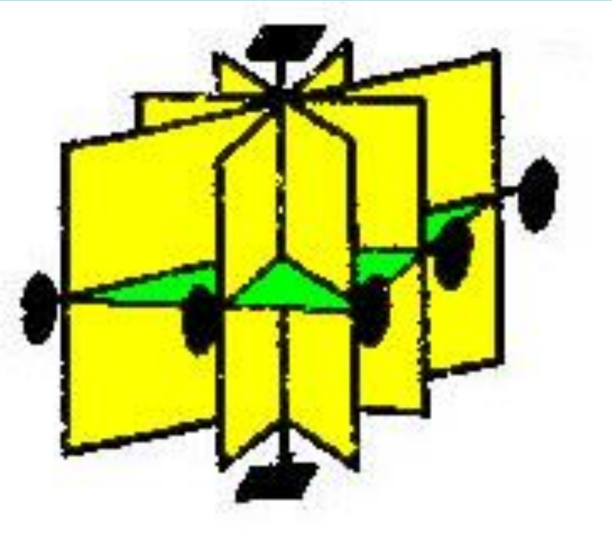
3. Порядок любой подгруппы $\boldsymbol{H}$ группы $\boldsymbol{G}$ должен быть делителем порядка группы $\boldsymbol{G}$, т.е. группа **3m** не может иметь подгруппы 4-го и 5-го порядков. Таким образом, в группе **3m**, являющейся группой 6-го порядка, имеется одна подгруппа 3-го и три подгруппы 2-го порядка.

Теорема Лагранжа

Если G – группа конечного порядка и H<G – нетривиальная
подгруппа, то порядок подгруппы |H| является делителем
порядка группы |G|:

|G| / |H| = j – индекс подгруппы H в группе G

Так группа mm2 четвертого порядка может иметь подгруппы
порядков
4/1 = 4, 4/2 =2, 4/4 =1

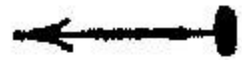


4/mmm

Подгрупп
ы

1

-1

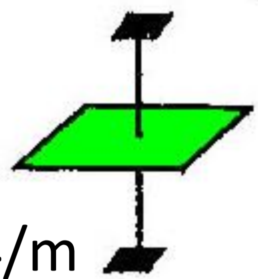


2

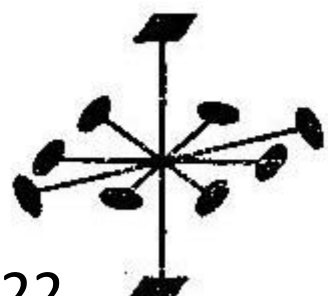
m

4

-4

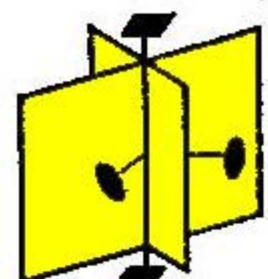


4/m

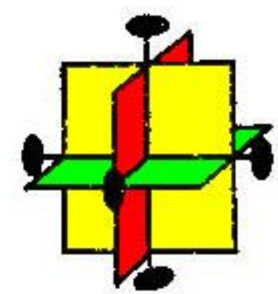


422

4mm



-42m



mmm

Группа является коммутативной или абелевой, если групповое действие коммутативно для всех ее элементов.

$$\mathbf{g_i g_j = g_j g_i}$$

Из 32 точечных групп 16 являются коммутативными: 1, -1, 2, m, 2/m, 222, mm2, mmm, 4, -4, 4/m, 3, -3, 6, -6, 6/m.

mm2

	1	2_z	m
1	1	2_z	m
2_z	2_z	1	m
m_x	m_x	m_y	1
m_y	m_y	m_x	2

Рассмотрим коммутативность на примере кубической сингонии

$2^1_x \times 3$ ... $=$ ... $\begin{pmatrix} 0 \\ \\ -1 \end{pmatrix}$

3×2^1_x ... $=$ ... $\begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$

Группы кубической сингонии не коммутативны

Группа называется **цикличной** если все элементы группы являются степенями одного ее элемента.

Точечная группа 4 является циклической

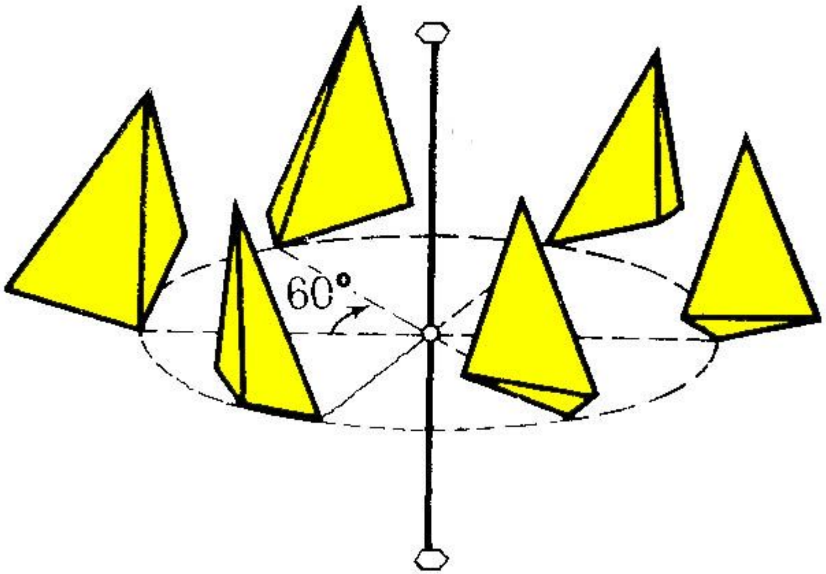
	1	2^1	4^1
1	1	2^1	4^1
2^1	2^1	1	4^{-1}
4^1	4^1	4^{-1}	2^1
4^{-1}	4^{-1}	4^1	1

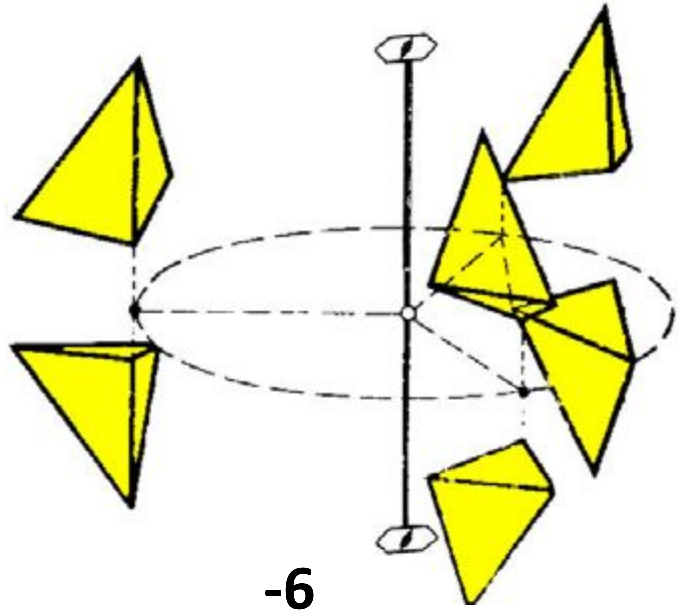
у группы 4 есть три подгруппы

группа 1 имеет порядок один, 2 – два, а 4 - четвертый

преобразование симметрии любой осью симметрии образует циклическую группу

Найдем квадрат Кейли для осей 6 и -6.





-6

6

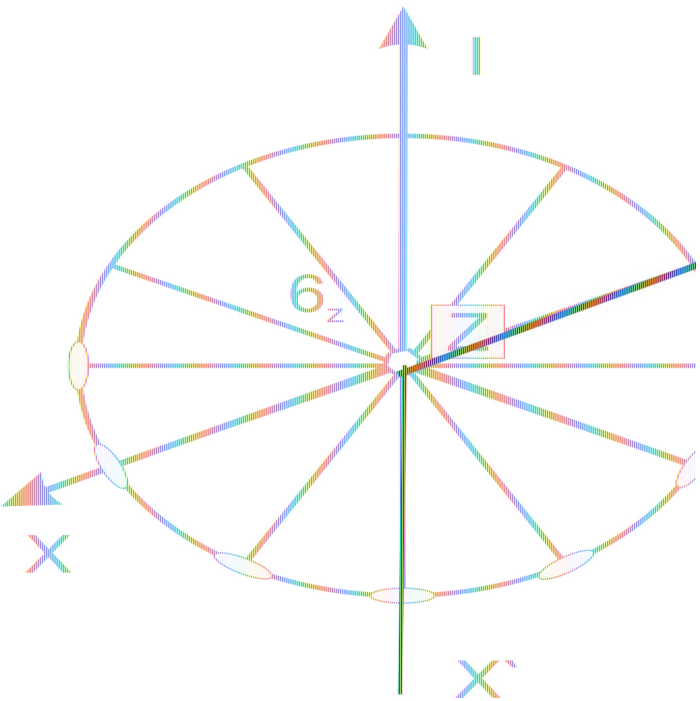
-6^1 -6^2 -6^3

6^1 6^2 6^3

-6^4 -6^5 1

6^4 6^5 1

Найдем квадрат Кейли для осей 6 и



$6_z =$

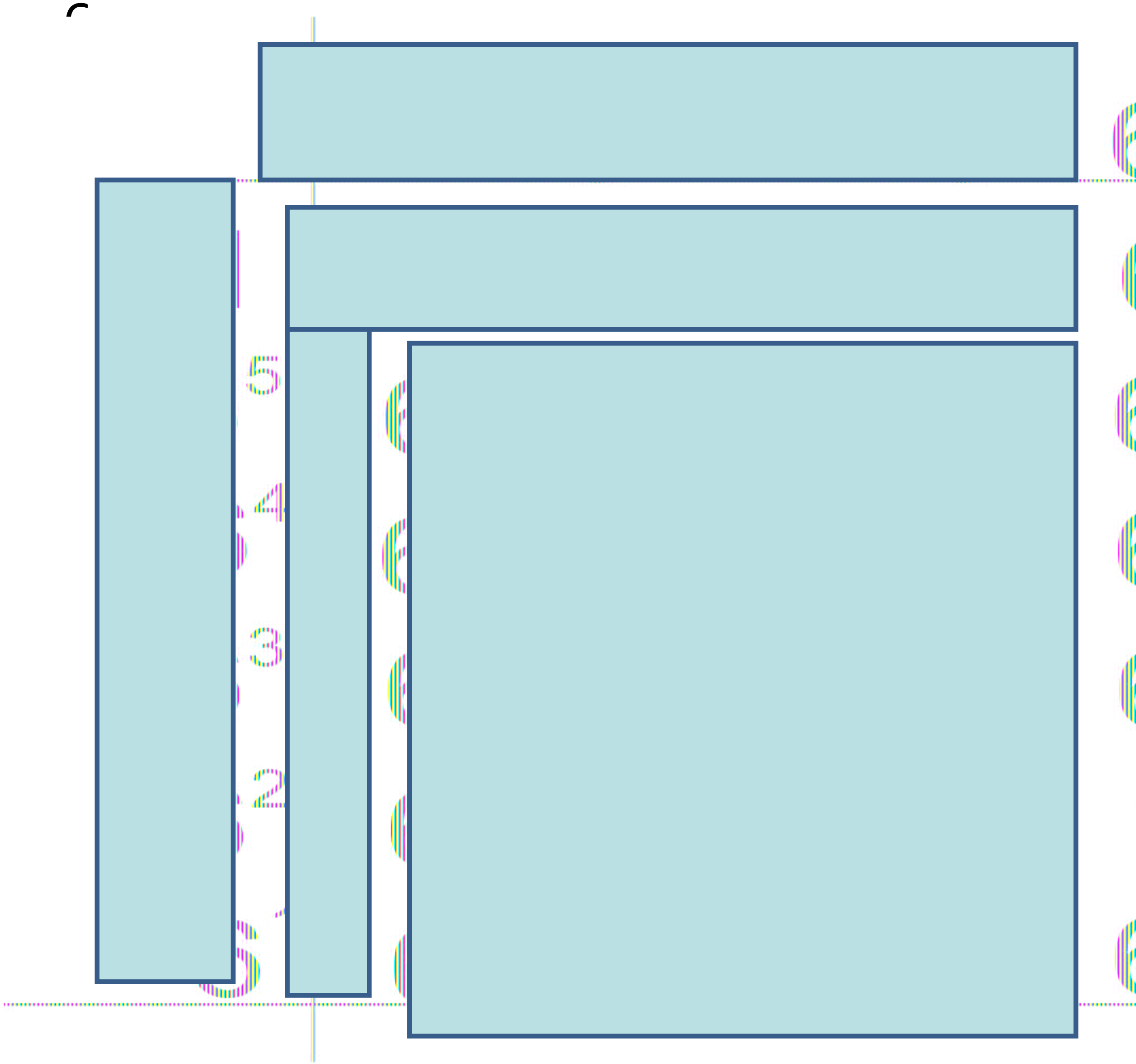
$6^4_z =$

$6^5_z =$

$6^3_z =$

$6^2_z =$

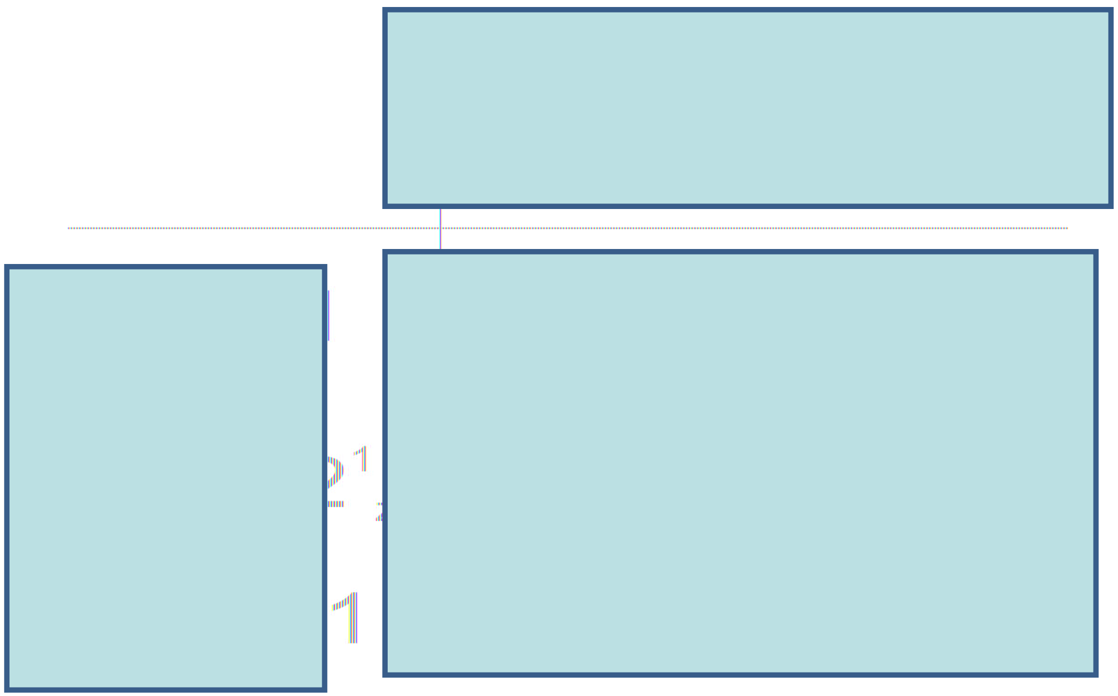
Найдем квадрат Кейли для осей 6 и



Вывод точечных групп симметрии

выведем группы моноклинной и ромбической сингонии

в моноклинной сингонии есть только 2 и -2. Добавим к квадрату Кейли для группы 2 (1, 2z) центр инверсии



	1	2^1_z
1	1	2^1_z
2^1_z	2^1_z	1
-1	-1	m_z

Появился новый элемент симметрии m_z

Значит множество не замкнуто относительно умножения

Добавляем m_z и получаем новый вид симметрии **2/m**

Добавляем к группе 2 (2, 2z) преобразование 2x и получаем новое преобразование 2y и группу **222**

	2z	2y
2z	1	2x
2y	2x	1
2x	2y	2z

Добавим к **222** центр инверсии и получим группу **mmm**