Собственные числа и собственные векторы

Напоминание

- Чтобы линейному преобразованию сопоставить матрицу линейного преобразования, требуется задать координаты образов базисных векторов, получившихся в результате линейного преобразования. (соответственно, матрица зависит от базиса)
- $\det(\bar{\bar{A}}) = 0 \Leftrightarrow \nexists_{\bar{\bar{A}}^{-1}} \bar{\bar{A}}^{-1} \cdot \bar{\bar{A}} = \bar{\bar{E}} \Leftrightarrow \forall_{\bar{\bar{A}}^{-1}} \bar{\bar{A}}^{-1} \cdot \bar{\bar{A}} \neq \bar{\bar{E}}$
- Рассмотрим выражение

$$\bar{\bar{A}} \cdot \bar{X} = \bar{0}$$

Тривиальное его решение: $\bar{X} = \bar{0}$. Однако, предположим, что это не так.

Пусть $\exists_{\bar{X}} \bar{X} \neq \bar{0}$.

Очевидно, что $\forall_{\bar{\bar{A}}} \bar{\bar{A}} \cdot \bar{0} = \bar{0}$. Положим, что $\exists_{\bar{\bar{A}}^{-1}} \bar{\bar{A}}^{-1} \cdot \bar{\bar{A}} = \bar{\bar{E}}$. Получается, что

$$\bar{\bar{A}} \cdot \bar{X} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{\bar{A}}^{-1} \cdot \bar{0} = \bar{X}$$

$$\bar{\bar{A}} \cdot \bar{0} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{\bar{A}}^{-1} \cdot \bar{0} = \bar{0}$$

Однако, $\bar{X} \neq \bar{0} \Leftrightarrow \left(\bar{\bar{A}}^{-1} \cdot \bar{0} = \bar{X} - \text{ложно}\right)$. Значит, либо $\nexists_{\bar{X} \neq \bar{0}} \bar{\bar{A}}^{-1} \cdot \bar{0} = \bar{X}$ (что противоречит допущению $\exists_{\bar{X}} \bar{X} \neq \bar{0}$), либо $\nexists_{\bar{\bar{A}}^{-1}} \bar{\bar{A}}^{-1} \cdot \bar{\bar{A}} = \bar{\bar{E}} \Leftrightarrow \det(\bar{\bar{A}}) = 0$.

Отметим, что если $\det(\bar{\bar{A}}) = 0$, тогда векторов $\bar{\bar{A}} \cdot \bar{X} = \bar{0}$ - бесконечное множество.

Собственные числа и собственные векторы

- Пусть существует некоторое линейное пространство U (в общем случае, над полем $\mathbb{C}$). Пусть, также, в этом векторном пространстве задано некоторое линейное преобразование $\mathcal{A}$. Собственным вектором линейного преобразования $\mathcal{A}$ оказывается ненулевой вектор

$$\vec{h} \neq \vec{0}: \mathcal{A}(\vec{h}) = \dot{\lambda} \cdot \vec{h}.$$

При этом, элемент поля $\mathbb{C}$ $\dot{\lambda}$ называется собственным числом линейного преобразования $\mathcal{A}$.

Нахождение собственных векторов для матрицы линейного преобразования

- Пусть существует некоторое линейное пространство U (в общем случае, над полем $\mathbb{C}$). В этом векторном пространстве задан базис $\{\vec{e}\}$. Пусть, также, в этом векторном пространстве задано некоторое линейное преобразование $\mathcal{A}$, которое в базисе $\{\vec{e}\}$ представлено матрицей $\bar{\bar{A}}_{\{\vec{e}\}}$. Пусть Из определения собственного вектора

$$\vec{h} \neq \vec{0}, \mathcal{A}\left(\vec{h}\right) = \dot{\lambda} \cdot \vec{h}$$

Или, в матричной форме:

$$\bar{h}_{\{\vec{e}\}} \neq \bar{0}, \bar{\bar{A}}_{\{\vec{e}\}} \cdot \bar{h}_{\{\vec{e}\}} = \dot{\lambda} \cdot \bar{h}_{\{\vec{e}\}}$$

Или:

$$\bar{h}_{\{\vec{e}\}} \neq \bar{0}, (\bar{\bar{A}}_{\{\vec{e}\}} - \dot{\lambda} \cdot \bar{\bar{E}}_{\{\vec{e}\}}) \cdot \bar{h}_{\{\vec{e}\}} = \bar{0}$$

Нахождение собственных векторов для матрицы линейного преобразования

Очевидно, что $\left(\bar{\bar{A}}_{\{\vec{e}\}} - \dot{\lambda} \cdot \bar{\bar{E}}_{\{\vec{e}\}}\right)$ - линейный оператор.

$$\det\left(\bar{\bar{A}}_{\{\vec{e}\}} - \dot{\lambda} \cdot \bar{\bar{E}}_{\{\vec{e}\}}\right) = 0$$

Данное уравнение – многочлен степени $\dim\left(\bar{\bar{A}}_{\{\vec{e}\}}\right)$.

Тогда решение этого уравнения относительно $\dot{\lambda}$ является собственным числом линейного преобразования.

Отметим, что значения $\dot{\lambda}$ не зависят от первоначального выбора базиса.

Пример 0 (диагональная матрица)

- Пусть в некотором векторном пространстве U над полем $\mathbb{C}$ с рангом 2 существует некоторое линейное преобразование, заданное в базисе $\{\vec{e}\}$ матрицей

$$\bar{\bar{A}}_{\{\vec{e}\}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения этой матрицы:

$$\det\left(\bar{\bar{A}}_{\{\vec{e}\}} - \dot{\lambda} \cdot \bar{\bar{E}}_{\{\vec{e}\}}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)\cdot(1-\lambda) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \{2; 1\}.$$

Найдем собственные векторы этой матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 0 \\ 0 & 1-2 \end{pmatrix} \cdot \bar{h}_{\{\vec{e}\}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \bar{h}_{1\{\vec{e}\}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 0 \cdot \left(\bar{h}_{1\{\vec{e}\}}\right)_1 - 1 \cdot \left(\bar{h}_{1\{\vec{e}\}}\right)_2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 0 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} \cdot \bar{h}_{\{\vec{e}\}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \bar{h}_{\{\vec{e}\}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 0 \cdot \left(\bar{h}_{1\{\vec{e}\}}\right)_1 + 1 \cdot \left(\bar{h}_{1\{\vec{e}\}}\right)_2 = 0$$

Пример 1

- Пусть в некотором векторном пространстве U над полем $\mathbb{C}$ с рангом 2 существует некоторое линейное преобразование, заданное в базисе $\{\vec{e}\}$ матрицей

$$\bar{\bar{A}}_{\{\vec{e}\}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

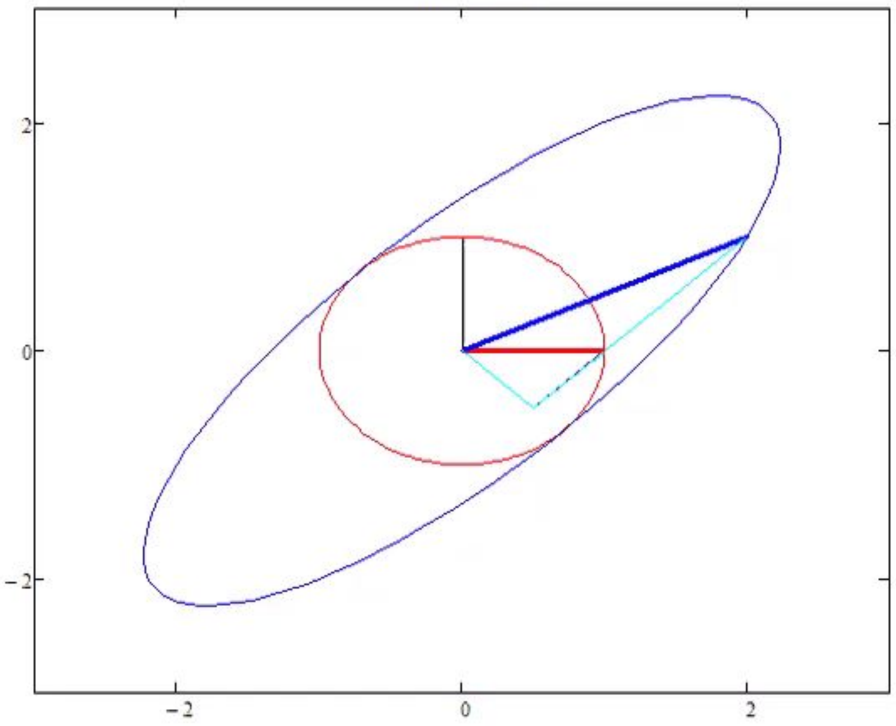
Рассмотрим образы этого преобразования для множества векторов с координатами

$$\bar{X}_{\{\vec{e}\}}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

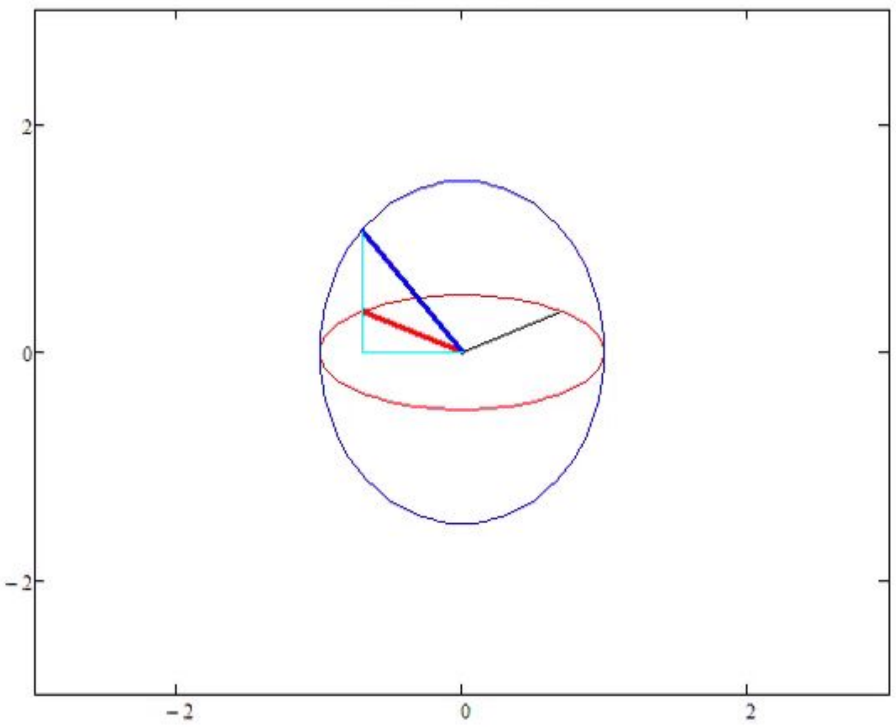
Пример 1 (графическая иллюстрация)

$A_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad H_{h\_e} = \begin{pmatrix} -0.707 & 1.414 \\ 0.707 & 1.414 \end{pmatrix}$ $\quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad X_e(\alpha_F) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad Y_e(\alpha_F) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

В базисе {e}

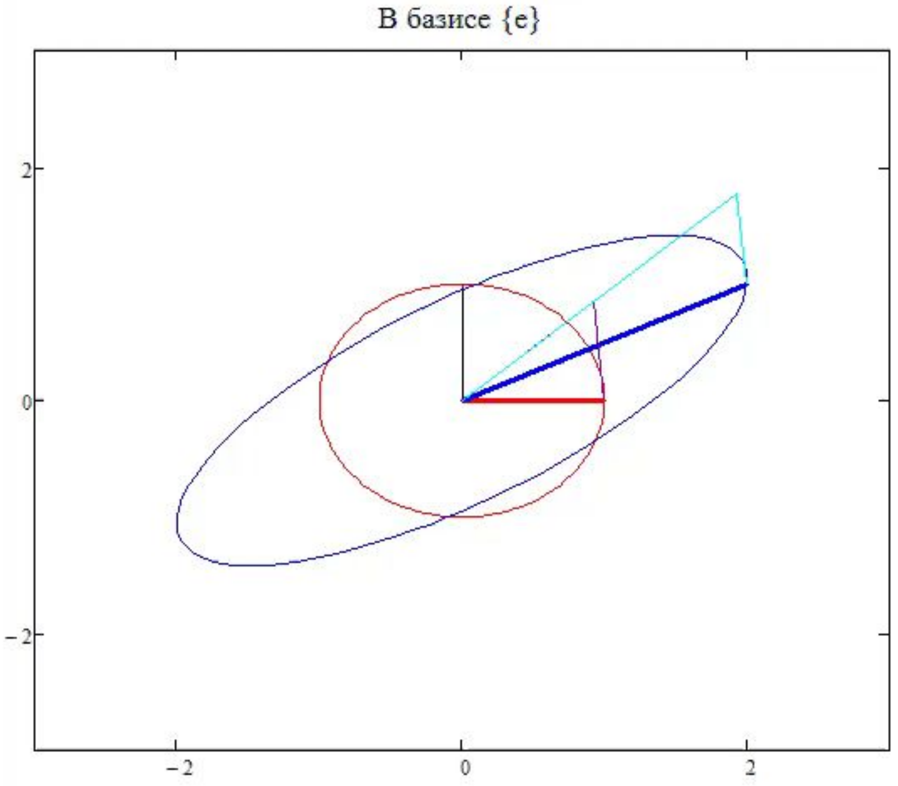


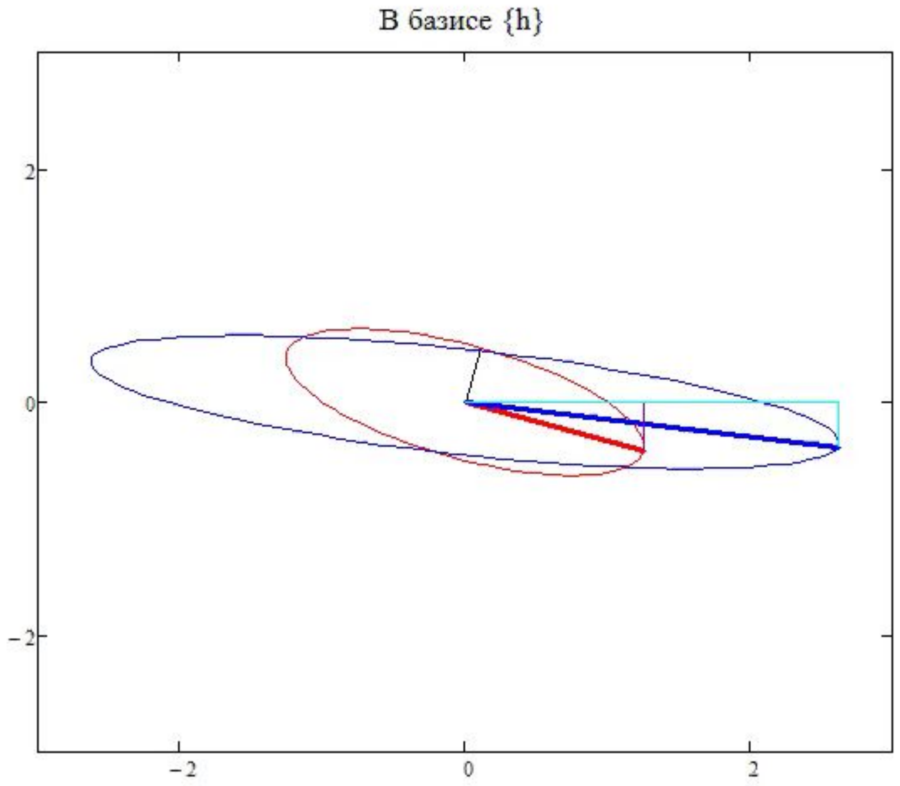
В базисе {h}



Пример 2 (несимметричная матрица)

$$A_e = \begin{pmatrix} 2 & 0.1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad H_{h\_e} = \begin{pmatrix} 0.737 & -0.182 \\ 0.675 & 1.992 \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 2.092 \\ 0.908 \end{pmatrix} \quad X_e(\alpha_F) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Y_e(\alpha_F) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

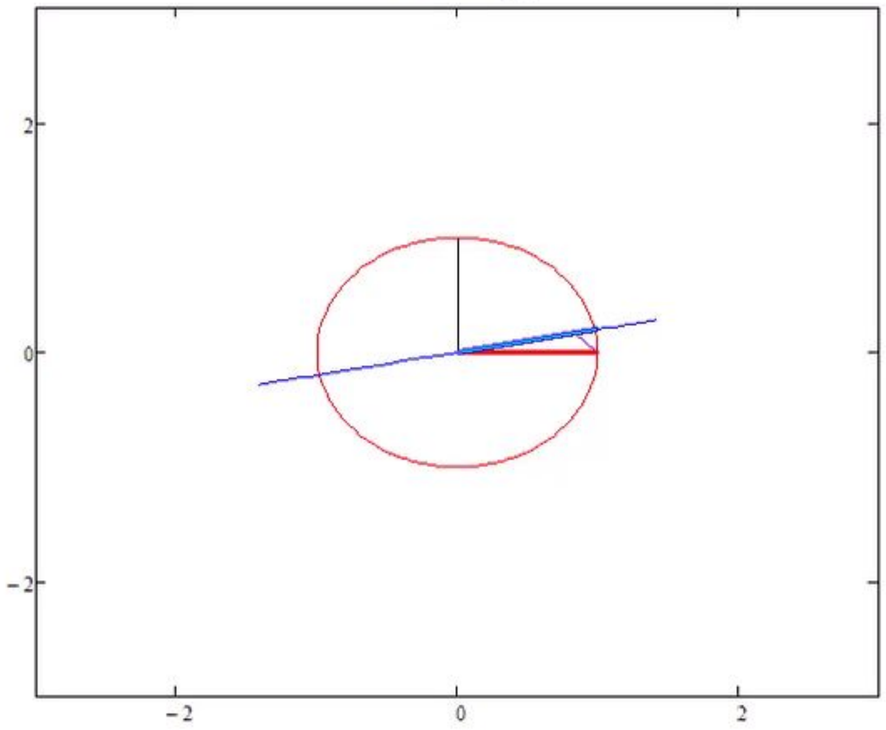




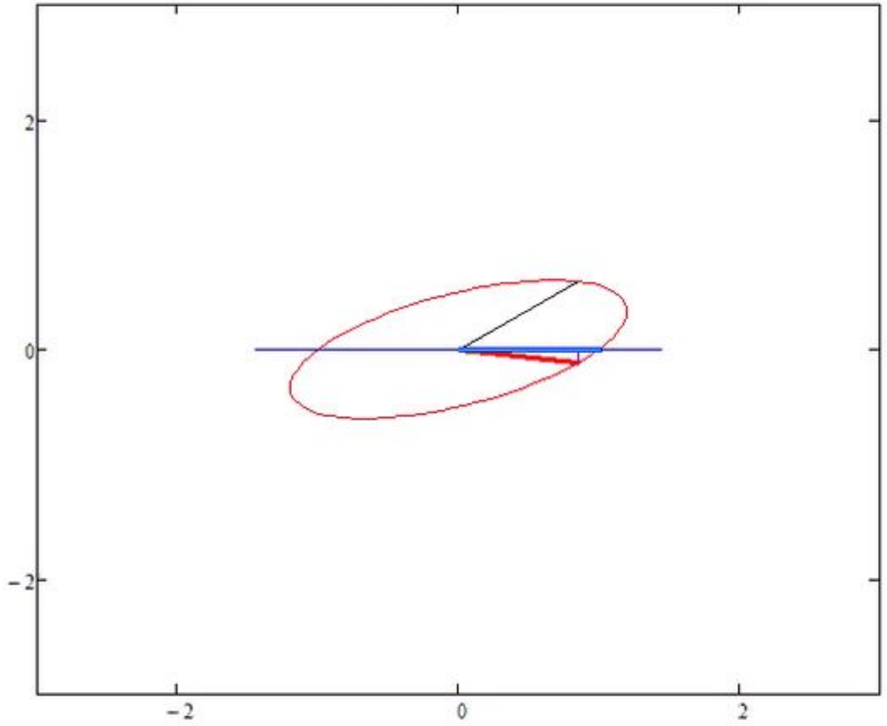
Пример 3 (вырожденная матрица)

$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$ $H_{h\_e} = \begin{pmatrix} 0.981 & -1.414 \\ 0.196 & 1.414 \end{pmatrix}$ $\Lambda = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $X_e(\alpha_F) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $Y_e(\alpha_F) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2 \end{pmatrix}$

В базисе {e}



В базисе {h}



Пример 4 (матрица с комплексными собственными числами)

$$A_e = \begin{pmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{pmatrix} \qquad H_{h\_e} = \begin{pmatrix} 0.707 & 1.414 \\ -0.707i & 1.414i \end{pmatrix} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 0.707 + 0.707i \\ 0.707 - 0.707i \end{pmatrix} \quad X_e(\alpha_F) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Y_e(\alpha_F) = \begin{pmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{pmatrix}$$