Исчисление предикатов

Множество аксиом Ax(ИП) исчисления предикатов описывается пятью *схемами аксиом* – тремя определенными в предыдущем разделе схемами $(A_1)-(A_3)$, в которых Φ, Ψ, Φ_i $(i = 1,2,3)$ являются произвольными формулами исчисления предикатов, и двумя новыми схемами:

$$(A_4)\ \ (\forall x)\Phi(x) \Rightarrow \Phi(y)$$

для произвольной формулы $\Phi(x)$, в которую y не входит связно;

$$(A_5)\ \ (\forall x)(\Phi \Rightarrow \Psi(x)) \Rightarrow (\Phi \Rightarrow (\forall x)\Psi(x))$$

для таких формул Φ, Ψ, что x в формулу Φ не входит свободно.

Исчисление предикатов имеет два *правила вывода* – правило modus ponens (сокращенно, *MP*) и правило обобщения (сокращенно, *Gen*), которые для произвольных формул исчисления предикатов Φ, Ψ символически записываются следующими схемами:

$$MP: \ \frac{\Phi \Rightarrow \Psi, \Phi}{\Psi} \quad \text{и} \quad Gen: \ \frac{\Phi}{(\forall x)\Phi}.$$

Определение. Формула Ф называется *теоремой исчисления предикатов*, если найдется такая последовательность $\Phi_1,\dots,\Phi_n$, в которой $\Phi_n=\Phi$ и каждая формула Φ_i $(1\le i\le n)$ либо является аксиомой, либо получается из некоторых предыдущих формул этой последовательности Φ_j $(1\le j<i)$ по одному из правил вывода *MP* или *Gen*. При этом $\Phi_1,\dots,\Phi_n$ называется *выводом* или *доказательством* формулы Ф.

Вывод формулы Ф обозначают $\vdash\Phi$ и говорят, что «Ф есть теорема». Множество всех таких теорем обозначается символом *Th*(ИП) и называется *теорией исчисления предикатов*.

Цель построения исчисления предикатов - определение такой теории Th(ИП), которая совпадает с множеством тавтологий $\boldsymbol{T}_{\text{АП}}$.

Лемма 1.

Справедливы следующие утверждения:

1) всякая аксиома ИП является тавтологией;

2) результат применения правил вывода MP и Gen к тавтологиям является тавтологией;

3) любая теорема ИП является тавтологией ИП, т.е. имеет место включение $Th(\text{ИП}) \subset \boldsymbol{T}_{\text{АП}}$.

Доказательство $\boldsymbol{T}_{\text{АП}} \subset Th(\text{ИП})$ было получено австрийским математиком К.Геделем в 1930 году.

Теорема полноты ИП.

Формула исчисления предикатов в том и только том случае является тавтологией, если она есть теорема ИП, т.е. выполняется равенство $\boldsymbol{T}_{\text{АП}} = Th(\text{ИП})$.

Таким образом, ИП является адекватным инструментом получения логических законов.

Теорема о непротиворечивости ИП.

В исчислении предикатов невозможно доказать никакую формулу Ф вместе с ее отрицанием $\neg$Ф.

С другой стороны, английский математик А.Черч в 1936 году доказал следующий принципиально важный результат.

Теорема о неразрешимость ИП.

Не существует универсальной эффективной процедуры (алгоритма), которая для любой формулы определяет, является ли эта формула теоремой ИП.

Элементы теории алгоритмов

Важные математические проблемы имеют вид:

для некоторого данного множества X найти эффективную процедуру (т.е. алгоритм), с помощью которой можно для каждого элемента x этого множества X определить за конечное число шагов, будет этот элемент обладать некоторым данным свойством P или нет (т.е. $x \in P^{+}$ или $x \notin P^{+}$).

Решением такой проблемы является построение и обоснование искомого алгоритма.

Массовые задачи – задачи распознавания и оптимизации.

Примеры массовых задач:

- ВЫП (SAT) – задача выполнимости формулы логики высказываний.
- ТЕОРЕМА (THM) – задача доказуемости формулы логики предикатов.

Под *алгоритмом* понимается совокупность инструкций о том, как решить некоторую массовую задачу.

Общие свойства алгоритма:

1) *дискретность алгоритма*;

2) *детерминированность алгоритма*;

3) *элементарность шагов алгоритма*;

4) *массовость алгоритма*.

Так как конструктивные объекты можно кодировать словами конечного алфавита Σ (например, состоящего из двоичных символов 0 и 1), то алгоритм моделируется устройством, перерабатывающим слова алфавита Σ.

Тезис Черча:

класс задач, решаемых в любой формальной модели алгоритма, совпадает с классом задач, которые могут быть решены интуитивно эффективными вычислениями, т.е. алгоритмическими методами.

Алгоритмически неразрешимые задачи и необходимость строгого математического определения алгоритма.

Модели алгоритма:

1) понятие *рекурсивной функции*, введенное Клини в 1936 г.,
2) понятие *машины Тьюринга*, введенное Постом и Тьюрингом в 1936 г.,
3) понятие *нормального алгорифма*, введенное Марковым в 1954 г.,
4) понятии *формальной грамматики*, введенное Хомским в 1957 г.

Машины Тьюринга