Уральский федеральный университет

СТРУКТУРЫ ДАННЫХ

Лектор
Спиричева Наталия Рахматулловна

Ст. преподаватель каф. ИТ
Ауд. Р-246

Структуры данных

Составитель курса лекций:
Спиричева Наталия Рахматулловна,
ст. преподаватель каф. Информационных технологий

ГРАФЫ


АЛЬТШТАДТ
ЛЕБЕНИХТ
Лавочный МОСТ
Кузнечный МОСТ
Деревянный МОСТ
р.Прегель
Медовый МОСТ
о.КНАЙПХОФ
о.ЛОМЗЕ
р.Прегель
р.Прегель
Высокий МОСТ
Зеленый МОСТ
Потроховый МОСТ
1
2
3
4
5
6
7

Структуры данных и алгоритмы

Целью лекции является приобретение студентами следующих компетенций:

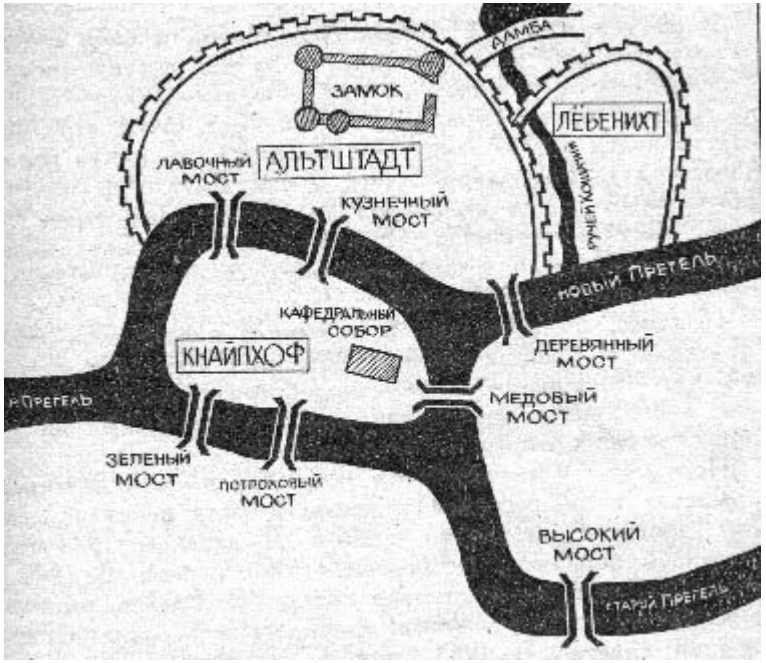
- знать методы представления древовидных структур в памяти ЭВМ
- знать и уметь применять алгоритмы поиска путей в графах

Структуры данных и алгоритмы

Основные темы лекции:

- Понятие древовидных структур
- Деревья
- Графы
- Алгоритмы поиска путей в графах

Первая работа по теории графов, принадлежит известному швейцарскому математику Л. Эйлеру. В 1736 г. Эйлер решил задачу о Кенигсбергских мостах. Задача состояла в следующем: «Найти маршрут прохождения всех четырех участков суши, который бы начинался на любом из них, кончался на этом же участке и ровно один раз проходил по каждому из них».



Несколько модифицируем задачу. Каждую из рассматриваемых местностей, разделенных рекой, обозначим точкой, а соединяющие их мосты – отрезком линии (не обязательно прямой). Тогда вместо плана будем работать просто с некой фигурой, составленной из отрезков кривых и прямых. Такие фигуры в современной математике называются графами, отрезки – ребрами, а точки, которые соединяют ребра – вершинами. Тогда исходная задача эквивалентна следующей: можно ли начертить данный граф, не отрывая карандаша от бумаги, то есть таким образом, чтобы каждое его ребро пройти ровно один раз. Такие графы, которые можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги, называются уникурсальными (от латинского unus cursus – один путь), или эйлеровыми. Итак, задача ставится таким образом: при каких условиях граф уникурсален? Ясно, что уникурсальный граф не перестанет быть уникурсальным, если изменить длину или форму его ребер, а также изменить расположение вершин – лишь бы не менялось соединение вершин ребрами (в том смысле, что если две вершины соединены, они должны оставаться соединенными, а если разъединены – то разъединенными).

Предположим, что футбольная команда вашей школы участвует в соревнованиях и играет с командами других школ. Пусть общее число команд равно шести. Вашу команду обозначим буквой A, а другие команды-буквами B, C, D,E и F. Через несколько недель после начала соревнований окажется, что не которые из команд уже сыграли друг с другом,например:

A с C,D,F

B с C,E,F

C с A,B

D с A,E,F

E с B,D,F

F с A,B,D,E

Это можно изобразить при помощи такой геометрической схемы. Каждую команду представим точкой или маленьким кружочком и соединим отрезком те пары точек, которые соответствуют командам, уже игравшим друг с другом.

Схема такого вида называется графом. Она состоит из нескольких точек A, B, C, D. E, F, называемых вершинами, и нескольких соединяющих эти точки отрезков, таких, как AC или EB, называемых ребрами графа.

Каждую совокупность игр любого турнира можно представить соответствующим графом. Наоборот, если задан некоторый граф, т. е. фигура, состоящая из точек-вершин, соединенных прямолинейными отрезками-ребрами, то его можно рассматривать как схему такого состязания.

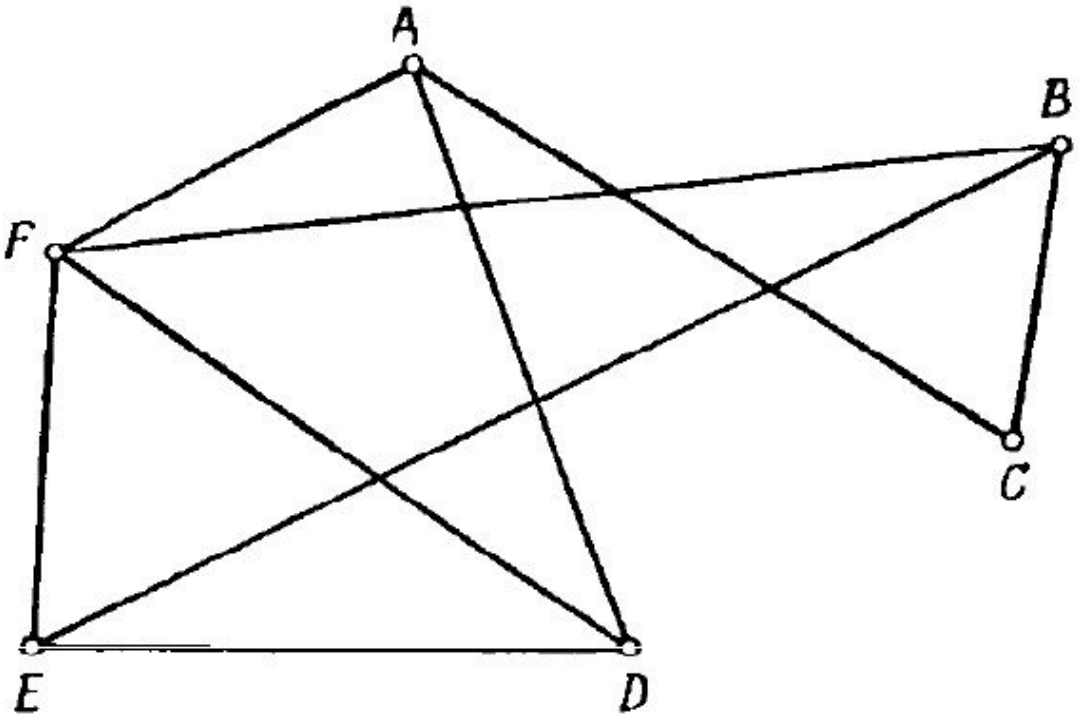
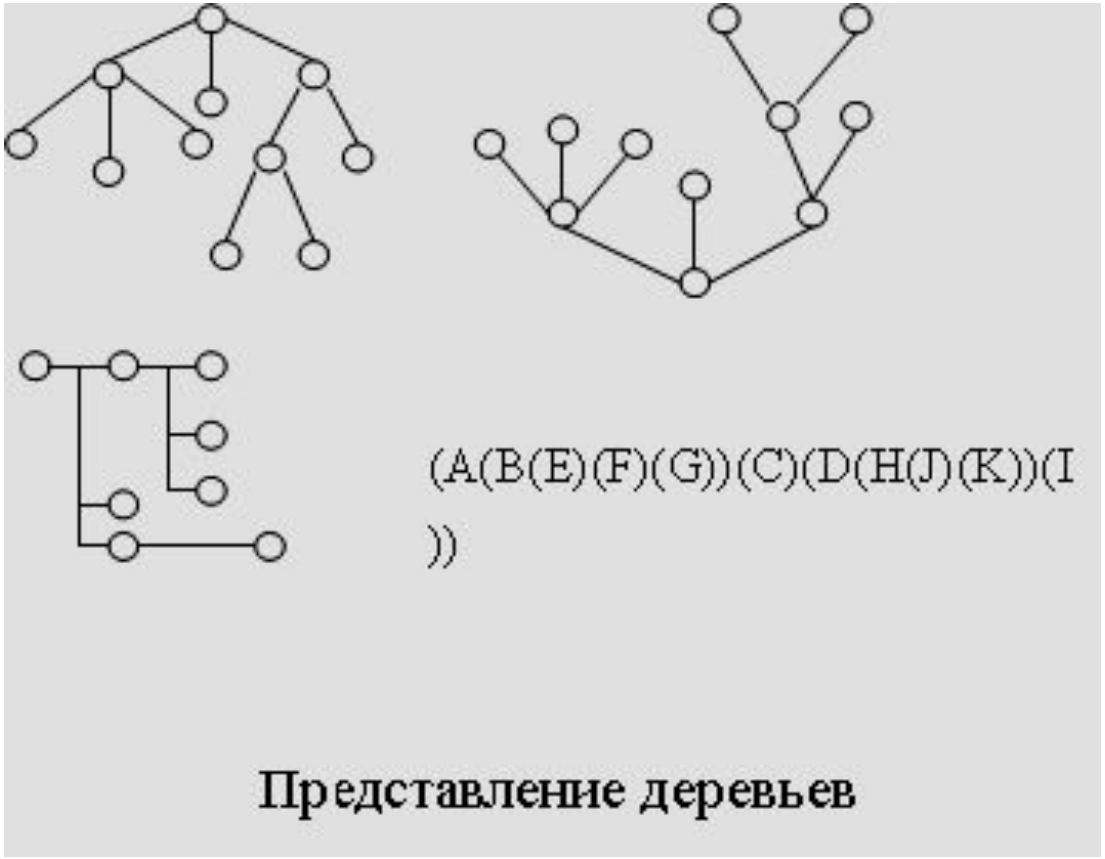


Рис. 1

Введение

Сетевые структуры – весьма общий и гибкий класс связных списков.



Представление деревьев

Введение

Дерево - конечное множество, состоящее из одного или более элементов, называемых узлами.

Корень - узел, не имеющий исходного. Все узлы, кроме корня, имеют только один исходный. Есть деревья, состоящие из одного корня. Каждый узел может иметь несколько порождённых.

Введение

Определим *дерево* как конечное множество T, состоящее из одного или более *узлов*, таких, что

а) имеется один специально обозначенный узел, называемый *корнем* данного дерева,

б) остальные узлы (исключая корень) содержатся в $m \geq 0$ попарно непересекающихся множествах T1, …, Tm, каждое из которых в свою очередь является деревом. Деревья T1, …, Tm называются *поддеревьями* данного корня.

Из определения следует:

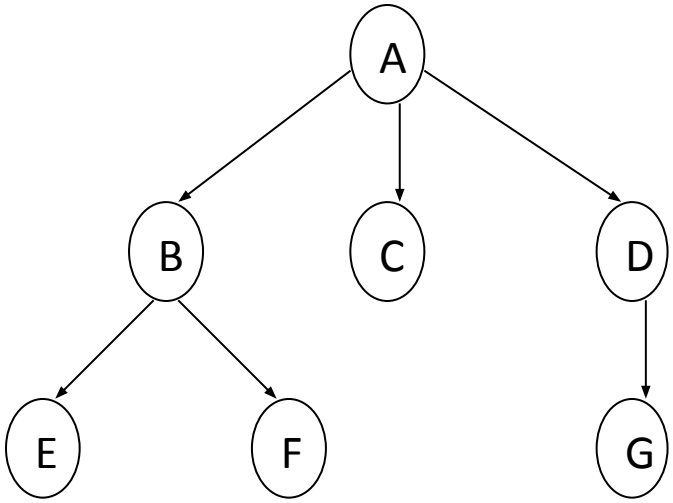
1. Каждый узел дерева является корнем некоторого поддерева, которое содержится в этом дереве.
2. Число поддеревьев данного узла называется степенью этого узла.
3. Узел с нулевой степенью называется *концевым узлом*;
4. Неконцевые узлы часто называют *узлами разветвления*.
5. *Уровень* узла по отношению к дереву T определяется следующим образом: говорят, что корень имеет уровень 1, а другие узлы имеют уровень на 1 выше их уровня относительно содержащего их поддерева Tj этого корня.

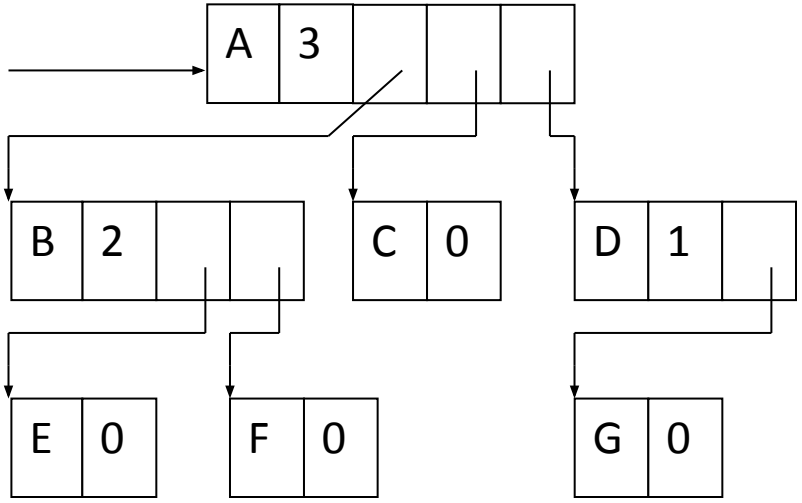
Введение

Обычно дерево представляется в машинной памяти в форме многосвязного списка, в котором каждый указатель соответствует дуге. Это представление называется естественным представлением дерева. Существуют несколько разновидностей такого представления. В одной из наиболее общих разновидностей каждому узлу дерева ставится в соответствие элемент многосвязного списка, причем в каждом элементе отводятся следующие поля: поле данных, поле степени исхода (т.е. числа сыновей) и поля указателей, число которых равно степени исхода.

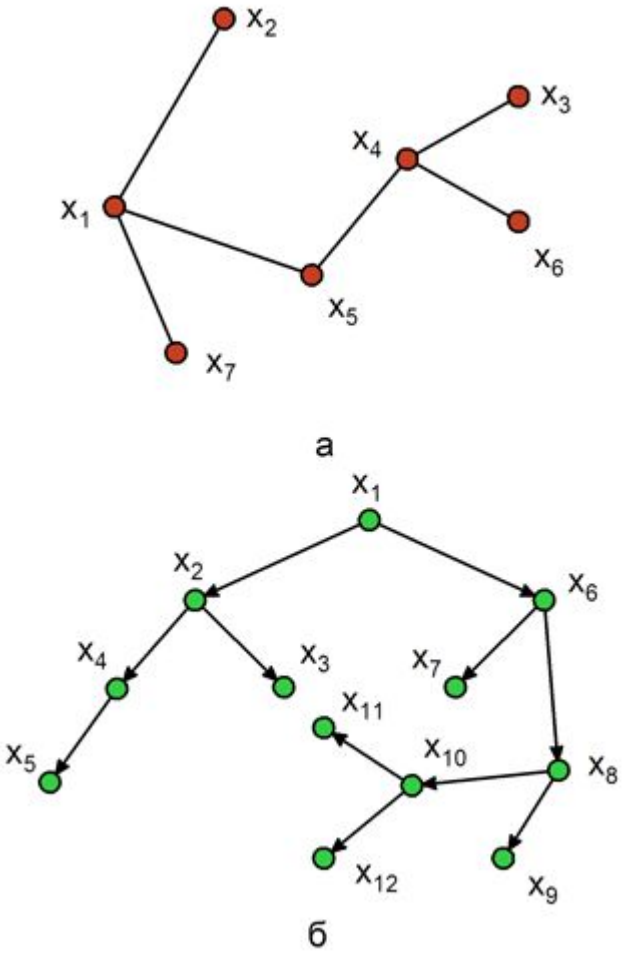
Введение

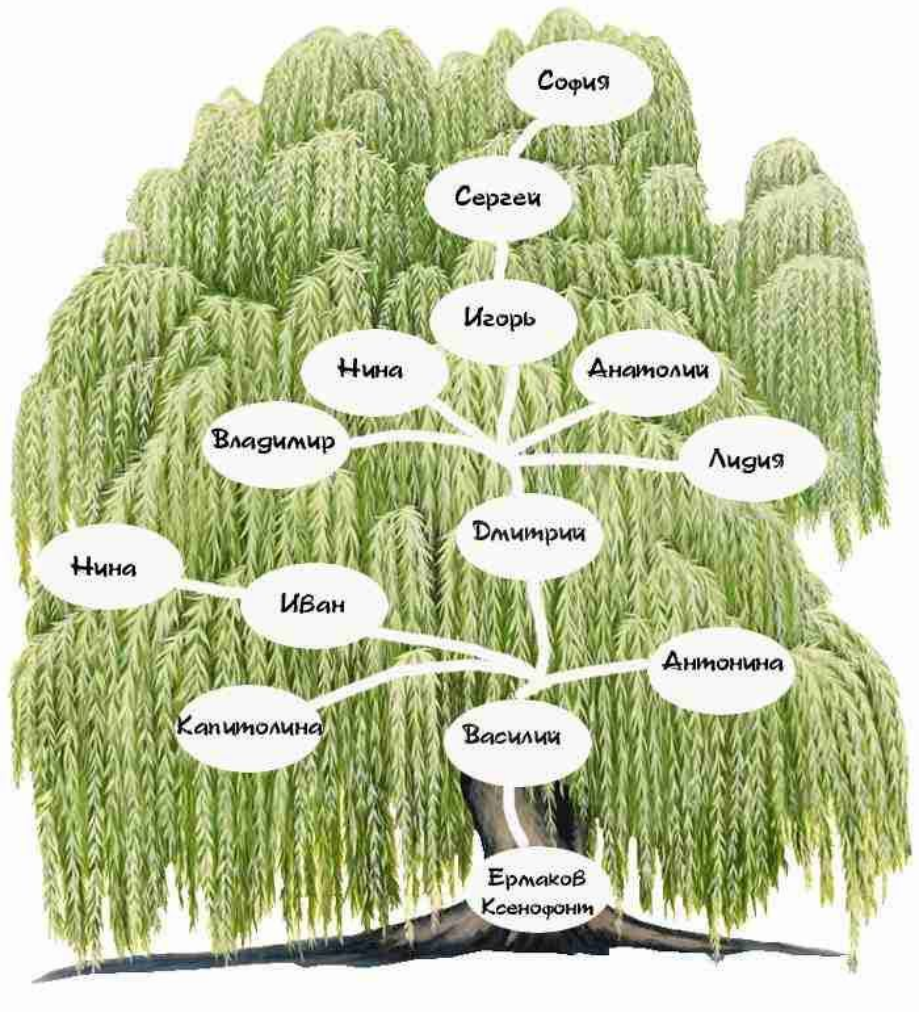
Сетевые структуры – весьма общий и гибкий класс связных списков.





Дерево


x2
x3
x4
x1
x6
x5
x7
а
x1
x2
x6
x4
x3
x7
x11
x5
x10
x8
x12
x9
б

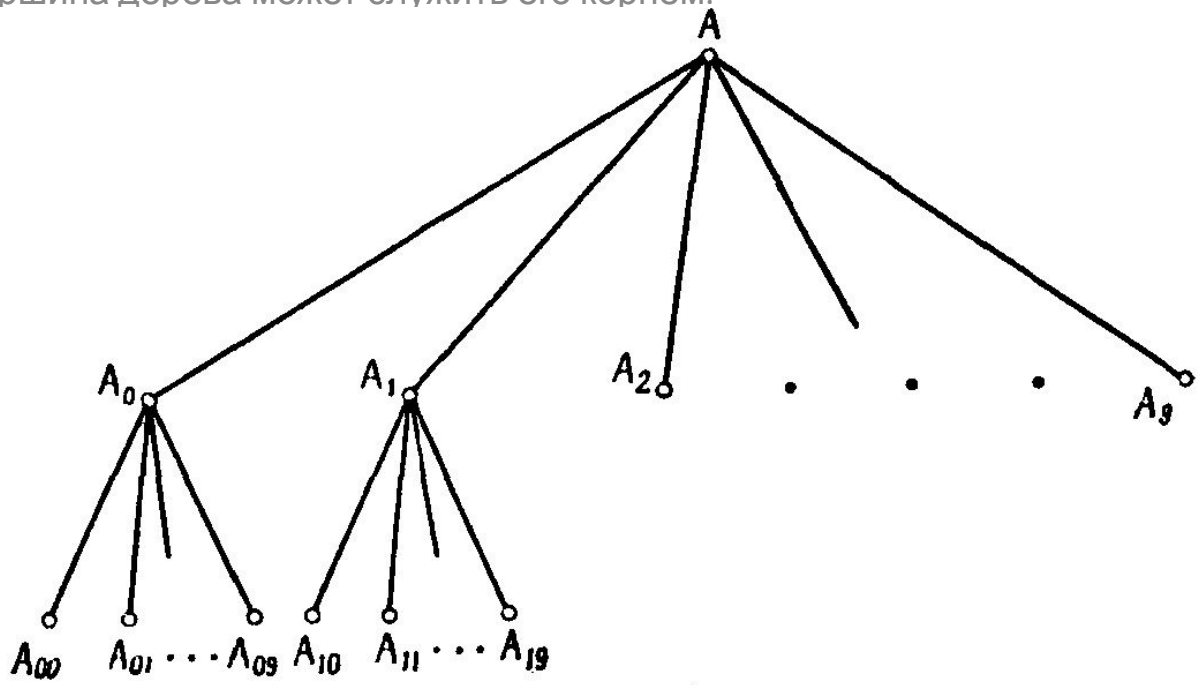

София
Сергей
Игорь
Нина
Анатолий
Владимир
Лидия
Дмитрий
Нина
Иван
Антонина
Капитолина
Василий
Ермаков
Ксенофонт

Свойства деревьев

1. Любая пара вершин соединена единственным маршрутом.
2. Количество ребер меньше на одну чем вершин.
3. Удаление хотя бы одного ребра не нарушает его структуру.
4. если в дерево добавить хотя бы одно ребро то появиться цикл.

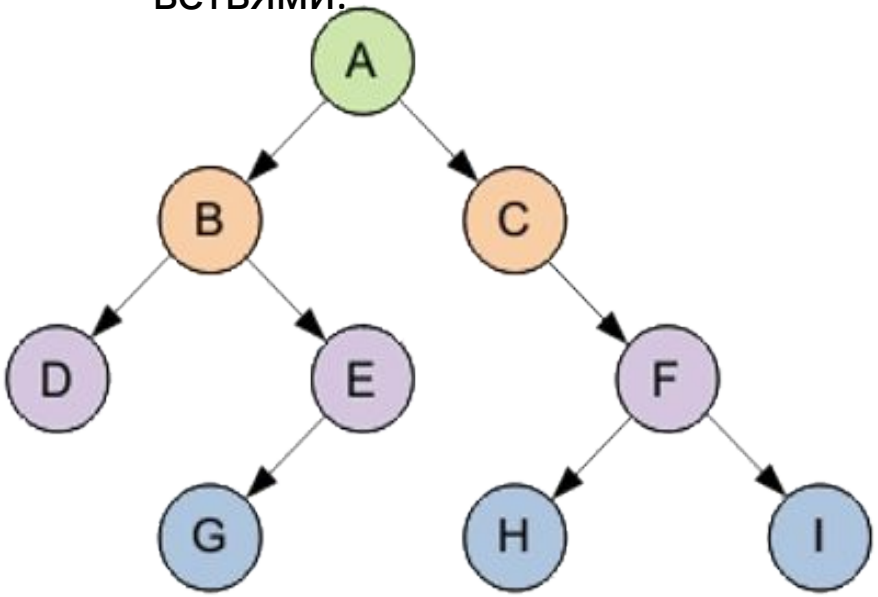
Деревья - очень удобный инструмент представления информации самого разного вида. Они отличаются от простых графов тем, что при обходе дерева невозможны циклы. Это делает графы очень удобной формой организации данных для различных алгоритмов. Таким образом, понятия дерева активно используется в информатике и программировании.

Рассмотрим произвольное дерево.Для того чтобы построить дерево, выберем какую нибудь вершину A0 Из A0 проведем ребра в соседние вершины A1, A2, ..., из них проведем ребра к их соседям A11, A12, ..., A21, A22, ... и т. д., как показано на рис. 34. **Первоначально выбранная вершина A0 называется корнем дерева**; каждая вершина дерева может служить его корнем.



Р и с. 36

Дерево – структура данных, представляющая собой древовидную структуру в виде набора связанных узлов. Бинарное дерево — это конечное множество элементов, которое либо пусто, либо содержит элемент (корень), связанный с двумя различными бинарными деревьями, называемыми левым и правым поддеревьями. Каждый элемент бинарного дерева называется узлом. Связи между узлами дерева называются его ветвями.



A - корень дерева
B - корень левого поддерева
C - корень правого поддерева
Корень дерева расположен на уровне с минимальным значением.

Бинарное дерево

Бинарное дерево - конечное множество узлов, которое является пустым или состоит из корня и двух непересекающихся бинарных деревьев, называемых левым и правым поддеревьями данного корня.

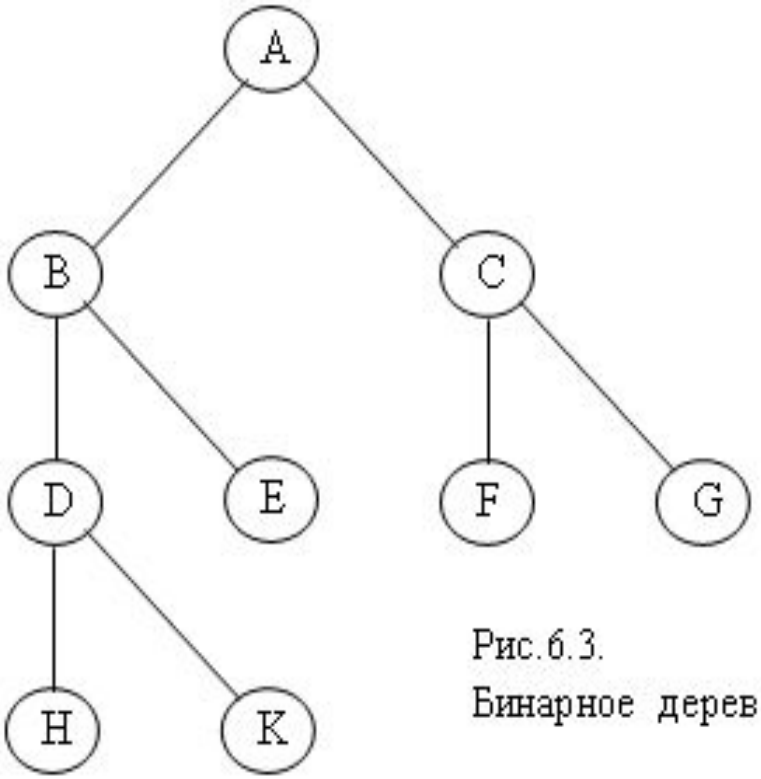


Рис.6.3.
Бинарное дерево

Бинарное дерево

В алгоритмах работы с древовидными структурами наиболее часто встречается понятие обход дерева.

Для обхода бинарных деревьев можно применить один из трех принципиально разных способов:

- в прямом порядке
- в центрированном порядке
- в обратном порядке

Бинарное дерево

Прямой порядок обхода:

Попасть в корень

Пройти левое поддерево

Пройти правое поддерево

Центрированный порядок обхода:

Пройти левое поддерево

Попасть в корень

Пройти правое поддерево

Обратный порядок обхода:

Пройти левое поддерево

Пройти правое поддерево

Попасть в корень

Бинарное дерево

“Прошитые” деревья

В “прошитых” деревьях концевые связи-указатели используются для связи с родителями, такие связи назвали нитями.

Отличие нормальных связей от нитей: в каждом узле хранят две однобитовые переменные *LTag* и *RTag*. Эти переменные равны нулю, если соответствующие связи указывают на поддеревья, и единице, если связи являются нитями.

Левая нить каждого узла указывает на узел, являющийся предшественником данного при центрированном обходе, правая - на узел, являющийся последователем данного узла.

ЛЕС

Лес – это множество (обычно упорядоченное), состоящее из некоторого (быть может равного нулю) числа непересекающихся деревьев.

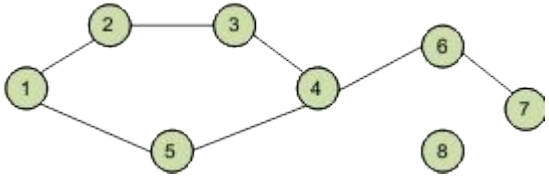
Графы

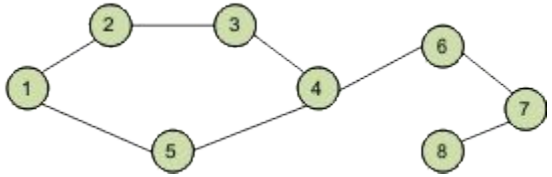
Граф - некоторое множество точек (называемых вершинами) и некоторое множество линий (называемых ребрами), соединяющих определенные пары вершин. Каждая пара вершин соединяется не больше чем одним ребром.

- Граф – совокупность точек, соединенных линиями. Точки называются вершинами, или узлами, а линии – ребрами, или дугами.

Графы:

1. Связные и несвязные



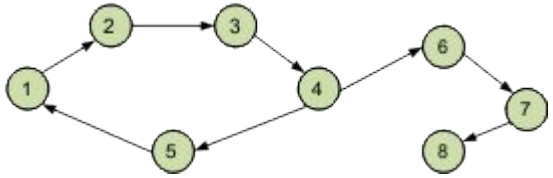


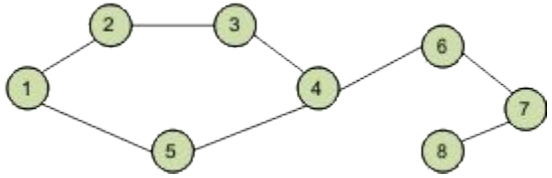
Графы

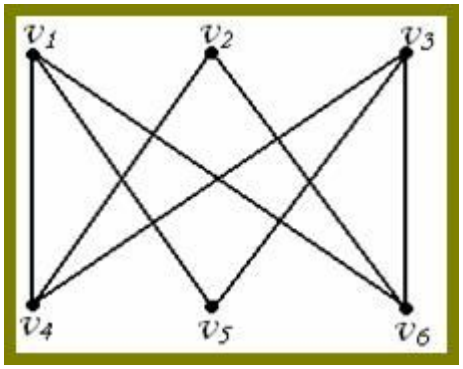
Граф - некоторое множество точек (называемых вершинами) и некоторое множество линий (называемых ребрами), соединяющих определенные пары вершин. Каждая пара вершин соединяется не больше чем одним ребром.

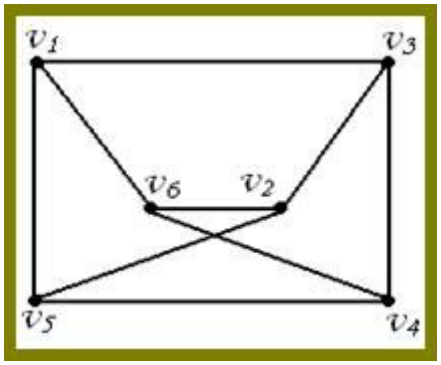
Графы:

1. взвешенные и невзвешенные
2. ориентированные и неориентированные









Важным при рассмотрении графов является вопрос о том, какие графы можно и нужно считать различными, а какие – одинаковыми.

Определение. Графы G’ и G’’ называются ***изоморфными***, если существует взаимно-однозначное соответствие (биекция) между их ребрами и вершинами, причем ребра соединяют соответствующие вершины.

Изоморфизм графов означает, что можно так переобозначить вершины первого графа, что в новых обозначениях вершины и ребра будут совпадать со вторым графом.

Графы приведенные на рисунке изоморфны

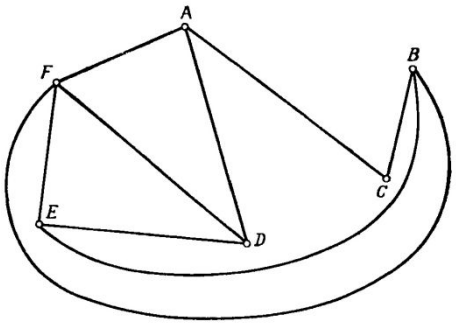


Рис. 7

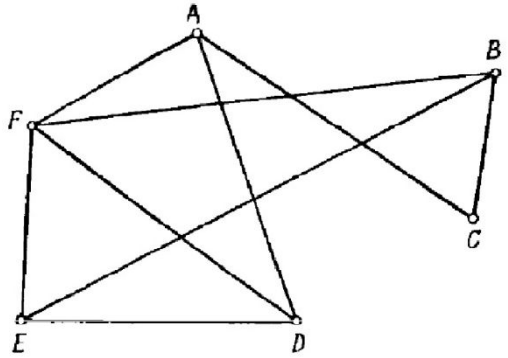
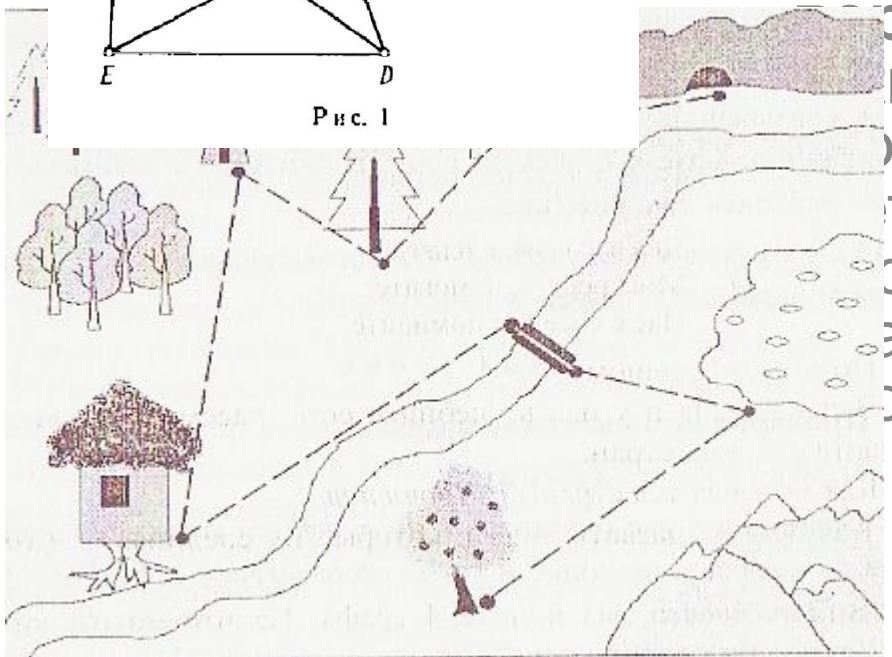


Рис. 1

Для многих целей безразлично, как именно изображен граф, т. е. изоморфные графы, доставляющие одну и ту же информацию, могут рассматриваться как один граф.(, например, когда граф играет роль своеобразного списка уже проведенных игр). Однако в других случаях существенно то обстоятельство, что граф может быть начерчен некоторым специальным образом.

Граф, который можно начертить таким образом, чтобы его ребра пересекались только в ершинах, называется им графом. Так, граф G, браженный на рис. 1, тся плоским, потому что ствует изоморфный ему аф (рис. 7), все ребра ого пересекаются только в вершинах.



Графы

Каждая пара вершин в графе соединяется не больше чем одним ребром. Дуга, соединенная с вершиной, называется *инцидентной этой вершине*. Две вершины называются *смежными*, если существует ребро, соединяющее их. Две дуги называются *смежными*, если они инцидентны одной и той же вершине.

Графы

Пусть *V* и *V`* - вершины и пусть $n \geq 0$; говорят, что «*V0, V1, …, Vn*» - *путь* длины *n* от *V* до *V`*, если *V=V0*, вершина *Vk* смежна с *Vk+1* при $0 \leq k < n$, а *Vn=V`*. Путь *прост*, если вершины *V0, V1, …, Vn-1* все различны между собой, а также различны все вершины *V1, V2, …, Vn*. Граф называется *связным*, если имеется путь между каждыми двумя вершинами этого графа. *Циклом* называется простой путь длины не менее 3 от какой-либо вершины до нее самой. Свободное дерево – это связный граф, не имеющий циклов.

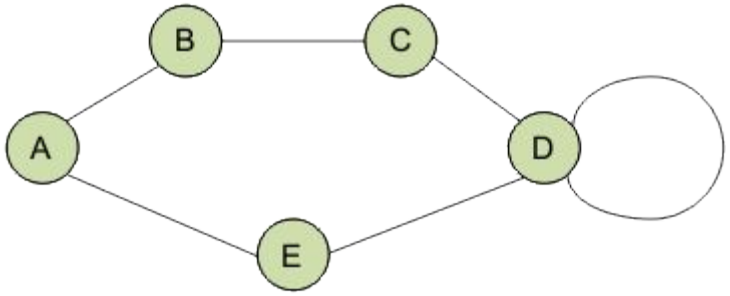
Графы

Граф называется *связным*, если имеется путь между каждыми двумя вершинами этого графа.

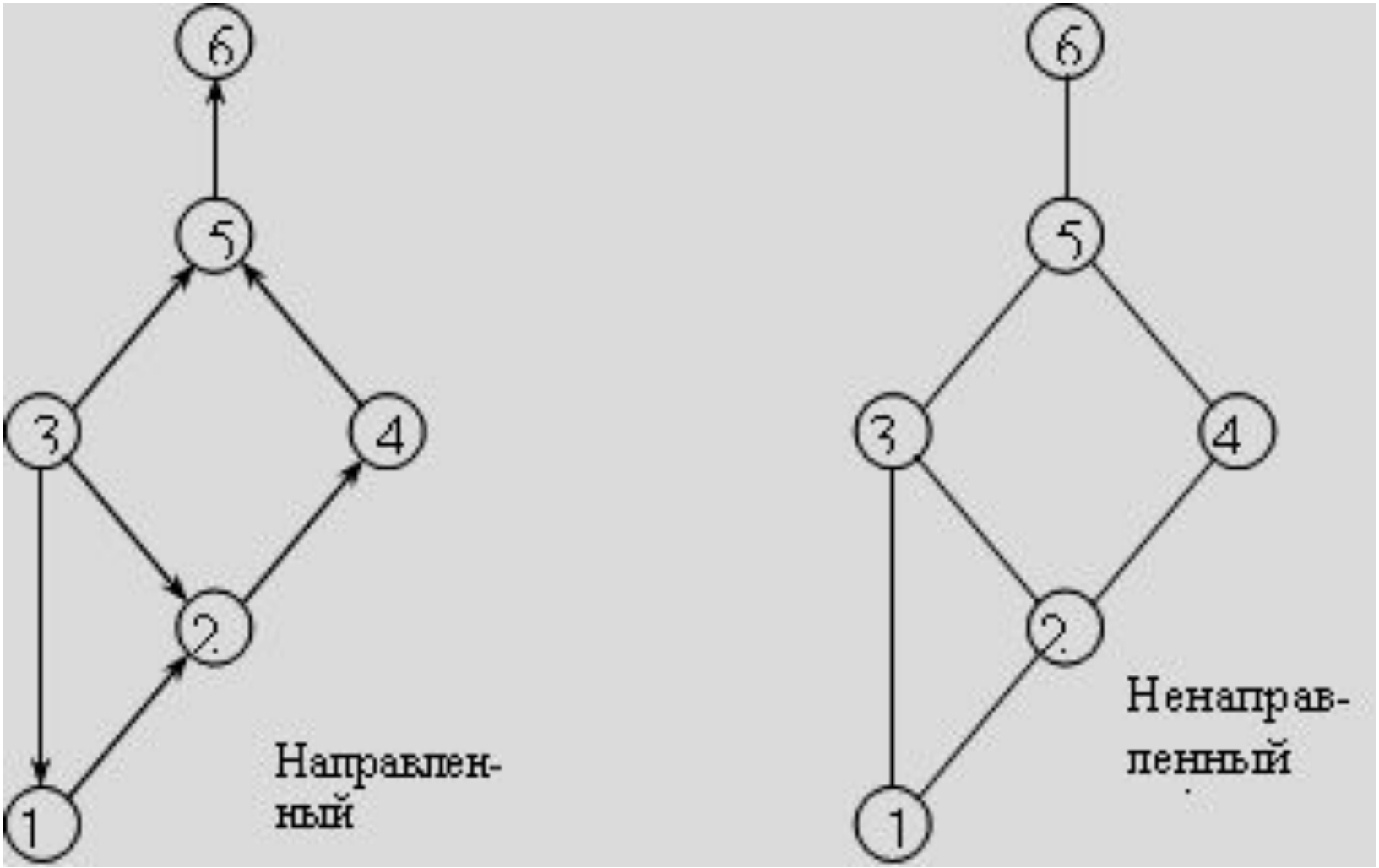
Циклом называется простой путь длины не менее 3 от какой-либо вершины до нее самой. Свободное дерево – это связный граф, не имеющий циклов.

Формально *направленный граф* определяется как некое множество вершин и множество *дуг*, причем каждая дуга ведет от некоторой вершины *V* к некоторой вершине *V`*. Если *e* – дуга, идущая от *V* к *V`*, то говорят, что *V* – *начальная* вершина дуги *e*, а *V`* - *конечная* вершина.

Степень входа вершины – количество входящих в нее ребер, степень выхода – количество исходящих ребер.
Граф, содержащий ребра между всеми парами вершин, является полным.
Встречаются такие графы, ребрам которых поставлено в соответствие конкретное числовое значение, они называются взвешенными графами, а это значение – весом ребра.
Когда у ребра оба конца совпадают, т. е. оно выходит из вершины и входит в нее, то такое ребро называется петлей.



Графы



Графы

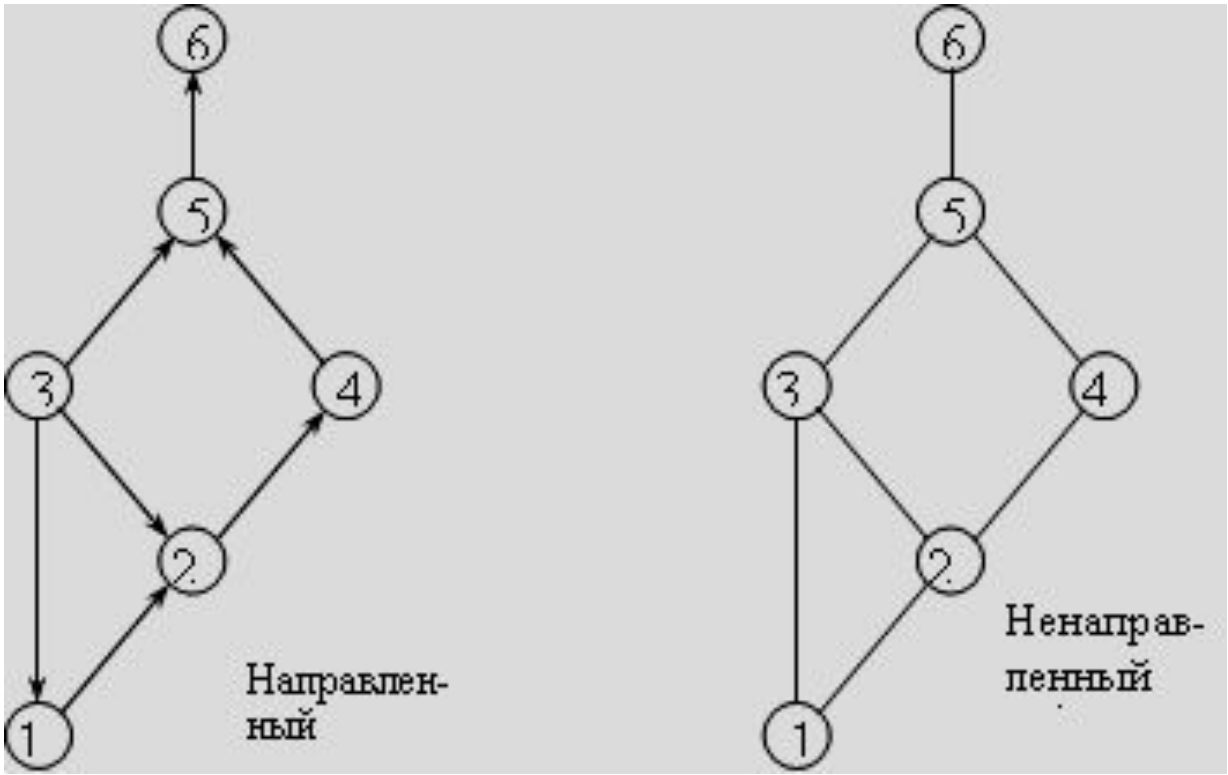
Задание графа:

Класс матриц инциденции. Если граф Г содержит *n* вершин и *m* дуг, то матрица инциденции A(Г)=[aij]mxn определяется так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } v_j - \text{начало дуги } u_i; \\ -1, \text{ если вершина } v_j - \text{конец дуги } u_i; \\ 0, \text{ если дуга } u_i \text{ не инцидентна вершине } v_j. \end{cases}$$

Графы

$$A(\Gamma) = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$$



Графы

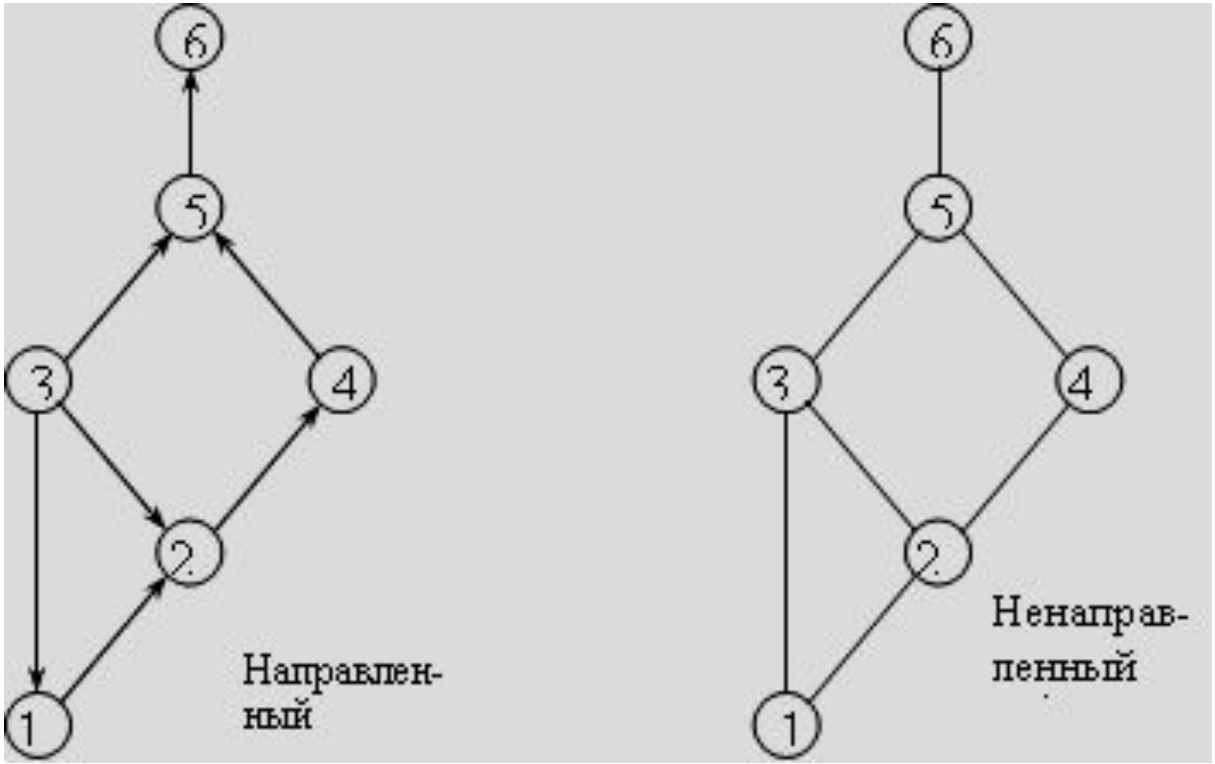
Класс матриц смежности. Матрица смежности S=[sij]nxm невзвешенного графа определяется следующим образом:

$$S_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } v_i \text{ смежна } v_j; \\ 0, \text{ если вершины несмежны.} \end{cases}$$

Во взвешенном графе каждая единица заменяется на вес соответствующего ребра

Графы

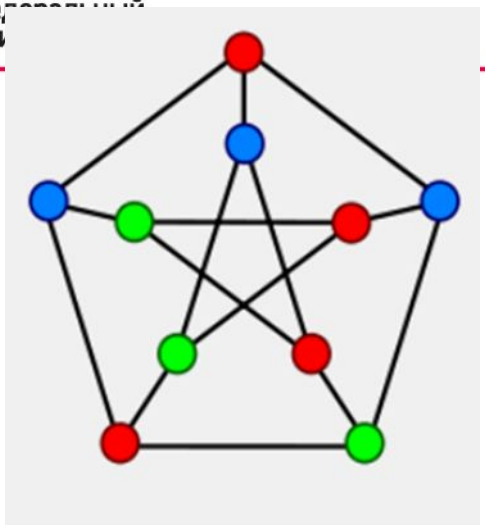
$$S(\Gamma) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$



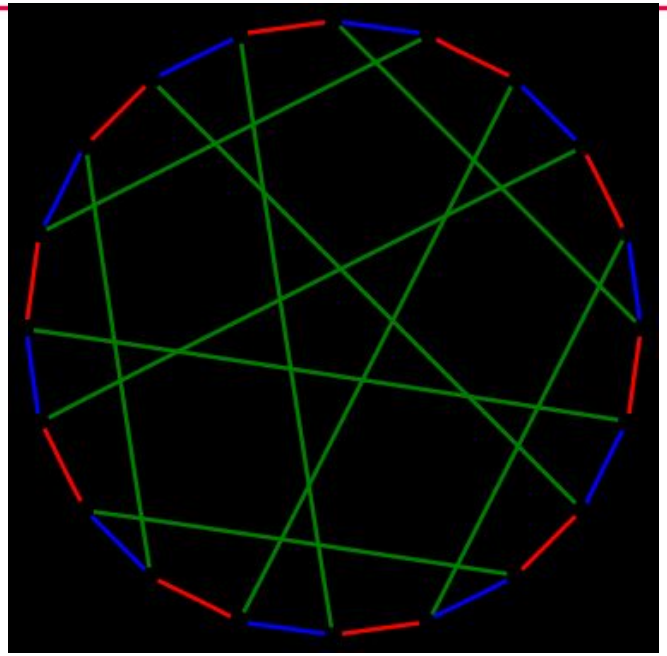
Раскраски

В теории графов, раскраска графов является частным случаем разметки графов. При раскраске элементам графа ставятся в соответствие метки с учетом определенных ограничений; эти метки традиционно называются “цветами”. В простейшем случае, такой способ окраски вершин графа, при котором любым двум смежным вершинам соответствуют разные цвета, называется окраской вершин. Аналогично, раскраска ребер присваивает цвет каждому ребру так, чтобы любые два смежных ребра имели разные цвета. Наконец, раскраска областей плоского графа назначает цвет каждой области, так, что каждые две области, имеющие общую границу, не могут иметь одинаковый цвет. Раскраска вершин – главная проблема раскраски графов, все остальные задачи в этой области могут быть перенесены на эту модель. Например, раскраска ребер графа - это раскраска вершин его рёберного графа, а раскраска областей плоского графа – это раскраска вершин дуального графа. Тем не менее, другие проблемы раскраски графов часто ставятся и решаются в изначальной постановке. Причина этого частично заключается в том, что это даёт лучшее представление о происходящем и более показательно, а частично из-за того, что некоторые задачи таким образом решать удобнее (например, раскраска рёбер). Договоренность об использовании цветов происходит из традиции выделения цветом стран на политической карте. Она была обобщена на окраску областей плоского графа. Через дуальные графы эта модель распространилась и на раскраску вершин, а затем и на другие виды графов. В математическом и компьютерном представлении обычно в качестве цветов используются целые неотрицательные числа. Таким образом, мы можем использовать любой конечный набор в качестве “цветового

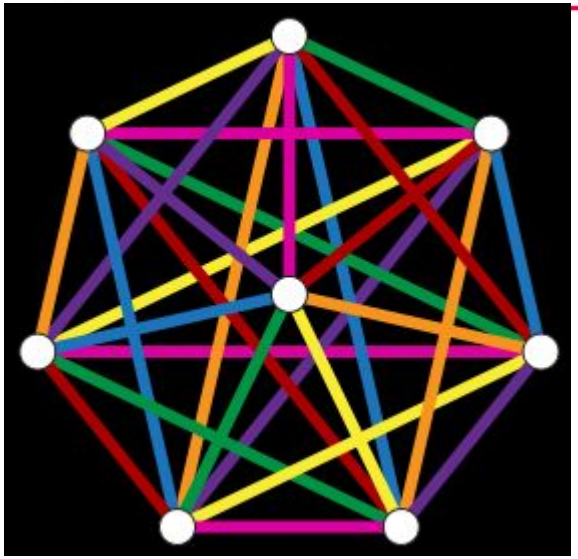
Каждый многоугольный граф можно представить себе как некоторую географическую карту, где грани- это страны, а бесконечная грань- окружающий их океан. На такой карте все страны и океан раскрашиваются так, чтобы их можно было отличить друг от друга. Для этого страны с общей границей должны быть раскрашены в разные цвета. Если в нашем распоряжении имеется достаточное колличество красок, это не составит никакого труда. Намного сложнее решить вопрос о наименьшем колличестве красок, достаточного дпя такого раскрашивания стран данной карты. Широко известное предположение состоит в том, что каждая карта может быть раскрашена с соблюдением требуемых условий при помощи четырех красок. Британский математик А. Кэпи, один из первых исследователей теории графов, в 1879 г. опубликовал статью о проблеме четырех красок, оказавшуюся вполне уместной в первом томе трудов Королевского географического общества. Эту статью часто считают «свидетельством о рождении» проблемы четырех красок. Однако это не совсем правильно. Шотландскпй физик Фредерик Гутри рассказывал, что около 1850 г. эта проблема была достаточно популярна среди студентов-математиков в Лондоне и что его брат Фрэнсис Гутри обратил на нее внимание своего преподавателя математика А. Де Моргана. Поначалу проблема не казалась слишком серьезной. Математики, по-видимому, рассматривали ее как почти очевидный факт. В дальнейшем появилось несколько неверных доказательств: проблема четырех красок, сбивающая с толку простотой своей формулировки, сопротивлялась всем усилиям самых выдающихся математиков. Большой интерес к теории графов, возникший в связи с этой проблемой, способствовал' открытию многих важных результатов этой теории, поскольку они казались полезными для решения проблемы четырех красок.



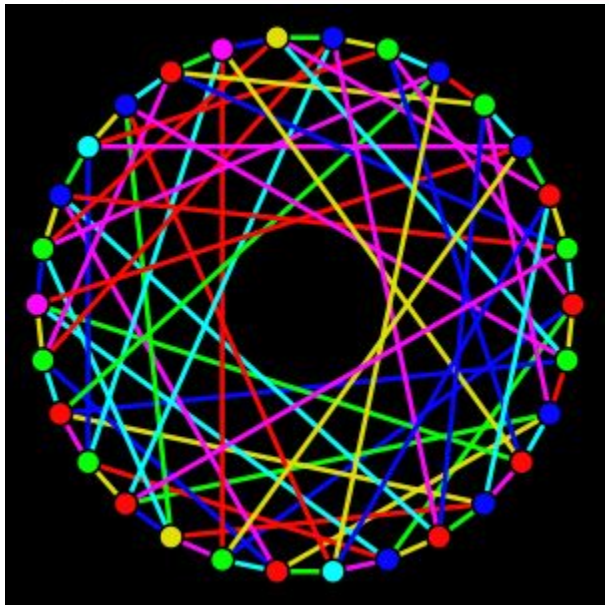
Когда говорят о раскраске графов, почти всегда подразумевают под этим раскраску их вершин, то есть присвоение цветовых меток вершинам графа так, чтобы любые две вершины, имеющие общую грань, имели разные цвета. Так как графы, в которых есть петли, не могут быть раскрашены таким образом, они не являются предметом обсуждения. Терминология, в которой метки называются цветами, происходит от раскраски политических карт. Такие метки как красный или синий используются только когда число цветов мало, обычно же подразумевается, что метки являются целыми числами {1,2,3,...}. Раскраска с использованием k цветов называется k-раскраской. Наименьшее число цветов, необходимое для раскраски графа G называется его хроматическим числом и часто записывается как X(G). Иногда используется Y(G), с тех пор как X(G) обозначает Эйлерову характеристику. Подмножество вершин, выделенных одним цветом, называется цветовым классом, каждый такой класс формирует независимый набор. Таким образом, k-раскраска - это то же самое, что и разделение вершин на k независимых наборов.



В теории графов рёберной раскраской графа называется назначение «цветов» рёбрам графа таким образом, что никакие два сопряжённых ребра не имеют один и тот же цвет. Например, рисунок справа показывает рёберную раскраску графа в красный, синий и зелёный цвета. Рёберная раскраска — это один из видов различных типов раскраски графов. Задача рёберной раскраски задаётся вопросом, можно ли раскрасить рёбра заданного графа максимум в k различных цветов для заданного значения k или для минимального возможного числа цветов. Минимальное требуемое число цветов для раскраски рёбер заданного графа называется хроматическим индексом графа. Например, рёбра графа на иллюстрации можно раскрасить в три цвета, но нельзя раскрасить в два, так что граф имеет хроматический индекс три.



Граф-цикл может быть раскрашен в два цвета если длина цикла чётна — просто используем поочерёдно два цвета последовательно проходя рёбра цикла. Однако в случае нечётной длины потребуется три цвета. Рёбра полного графа Kn с n вершинами могут быть раскрашены n - 1 цветами, если n чётно. Это специальный случай теоремы Бараньяи. Сойфер даёт следующее геометрическое построение раскраски в этом случае: разместим n точек в углах и в центре правильного (n - 1)-угольника. Для каждого класса цвета выберем одно ребро, соединяющее центр и одну из вершин многоугольника, и все перпендикулярные ему рёбра, соединяющие пары вершин многоугольника. Однако, если n нечётно, требуется n цветов — каждый цвет можно использовать только для раскраски (n - 1)/2 рёбер, 1/n-ю часть всех рёбер. Некоторые авторы изучали рёберную раскраску нечётных графов, n-регулярных графов, в которых вершины представляют команды из (n - 1) игроков из общего числа 2n-1 игроков, и в которых рёбра представляют возможные пары этих команд (с одним игроком «вне игры» для судейства). В случае, когда n = 3 получаем хорошо известный граф Петерсена. Как объясняет Бигс, задача (для n = 6) состоит в том, что игроки хотят найти такое расписание, что команды играют каждую из шести игр в разные дни недели, исключая воскресенье для всех игроков. В математической формулировке, они хотят найти 6-цветную рёберную раскраску 6-регулярных графов O6. Когда n равно 3, 4 или 8, рёберная раскраска графа On требует n + 1 цветов, но для 5, 6 и 7 нужно только n цветов.



В теории графов тотальной раскраской называется вид раскраски вершин и рёбер графа. Если не указано явно другое, тотальная раскраска предполагается правильной в том смысле, что никакие смежные вершины и никакие смежные рёбра и вершины, лежщие на концах рёбер, не раскрашиваются в один и тот же цвет. Тотальное хроматическое число $\chi(G)$ графа G — это наименьшее число цветов, необходимых для тотальной раскраски G. Тотальным графом $T = T(G)$ графа G называется граф, в котором множество вершин графа T соответствуют вершинам и рёбрам графа G две вершины в T смежны тогда и только тогда, когда соответствующие элементы либо смежны в G, либо инцидентны. При таком определении тотальная раскраска становится (правильной) вершинной раскраской тотального графа.

Алгоритмы поиска путей в графе

Путь с минимальным количеством промежуточных вершин

Алгоритм просматривает вершины графа в таком порядке:

- соединённые с исходной вершиной
- соединённые с уже просмотренными, но ещё не просмотренные.

Волновой алгоритм

1. Каждой вершине i приписывается два целых числа Times[i] - временная метка и Previous [i] - метка предыдущей вершины пути (начальное значение Times[i]=0, Previous [i]=0 для всех i).
2. Заводятся два списка "фронта волны" NewFront и OldFront, а также переменная Time (текущее время).
3. OldFront:={ver1}; NewFront:={}; Time:=1.
4. Для каждой из вершин i, входящих в OldFront, просматриваются соседние вершины j, и если Times [j] = 0, то Times [j]=Time, NewFront := NewFront + {j}; в переменную Previous [j] заносится номер i.
5. Если NewFront = {}, то путь не существует, переход к шагу 8.
6. Если одна из вершин совпадает с ver2, то найден кратчайший путь длины Time, переход к шагу 8.
7. OldFront:= NewFront; NewFront:={}; Time:=Time+1; возврат к шагу 4.
8. Восстанавливаем путь, проходя массив P.

Под корректностью алгоритма здесь понимается, что:

1. алгоритм завершает работу за конечное время;
2. если решение существует, то алгоритм находит правильное решение.

Алгоритмы поиска путей в графе

Путь минимальной суммарной длины во взвешенном графе с неотрицательными весами (*алгоритм Дейкстры*)

Функция находит путь минимального веса в графе *G=(V,E),* заданном весовой матрицей *w*, у которой элемент *wi j* равен весу ребра, соединяющего *i*-ю и *j*-ю вершины. При этом предполагается, что все элементы *wi j* неотрицательны. Путь ищется из вершины номер *u1* к вершине номер *u2*. Функция использует алгоритм Дейкстры. Для бесконечности используется число *GM,* его можно задавать в зависимости от конкретной задачи.

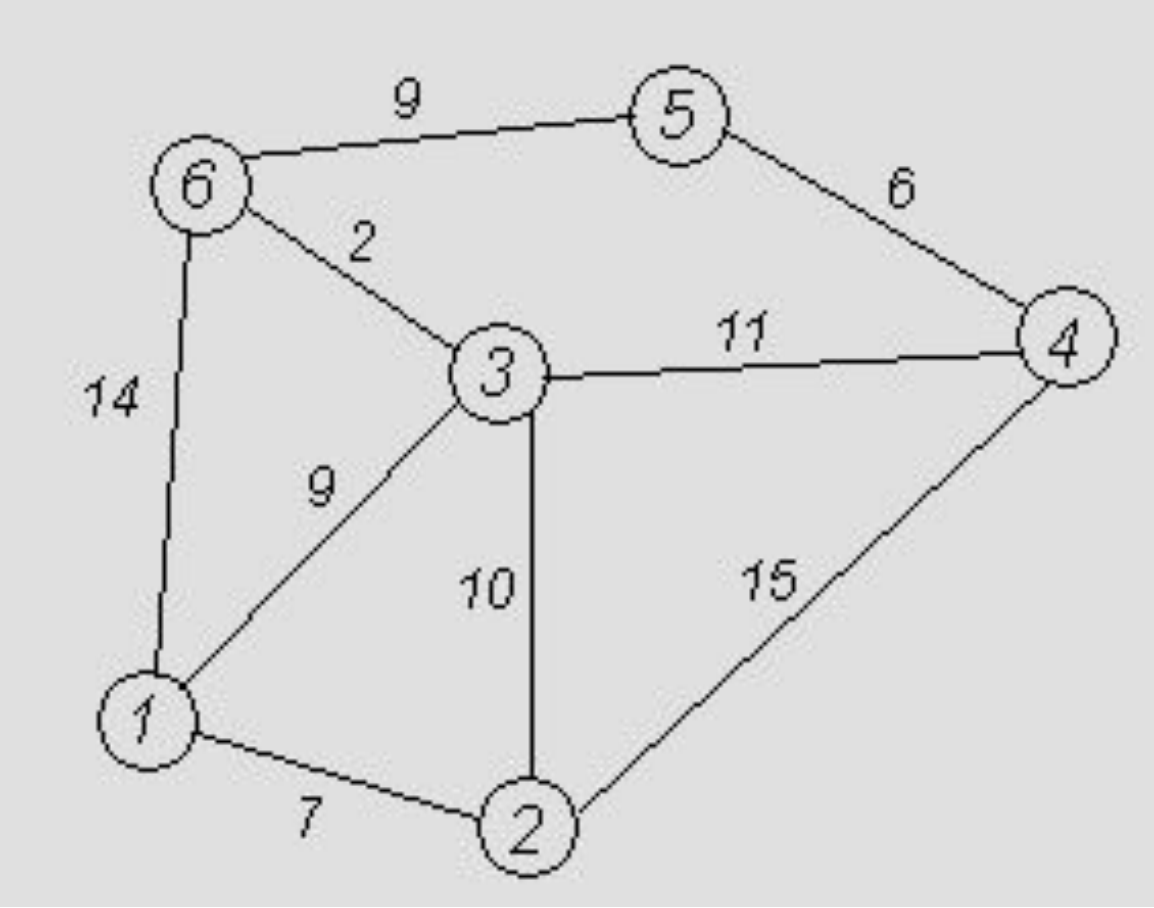
Алгоритмы поиска путей в графе

Алгоритм, по которому происходит поиск, заключается в следующем:

- всем вершинам приписывается вес - вещественное число, *d(i)=GM* для всех вершин кроме вершины с номером *u1*, а *d(u1)=0*;
- всем вершинам приписывается метка *m(i)=0*;
- вершина *u1* объявляется текущей - *t=u1;*
- для всех вершин у которых *m(i)=0*, пересчитываем вес по формуле: *d(i):=min{d(i), d(t)+W[t,i]};*
- среди вершин для которых выполнено *m(i)=0,* ищем ту, для которой *d(i)* минимальна, если минимум не найден, т.е. вес всех “непомеченных” вершин равен бесконечности (*GM*), то путь не существует; ВЫХОД;
- иначе найденную вершину с минимальным весом полагаем текущей и помечаем (*m(t)=1*);
- если t = u2, то найден путь веса d(t),ВЫХОД;
- переходим на шаг 4

Алгоритмы поиска путей в графе

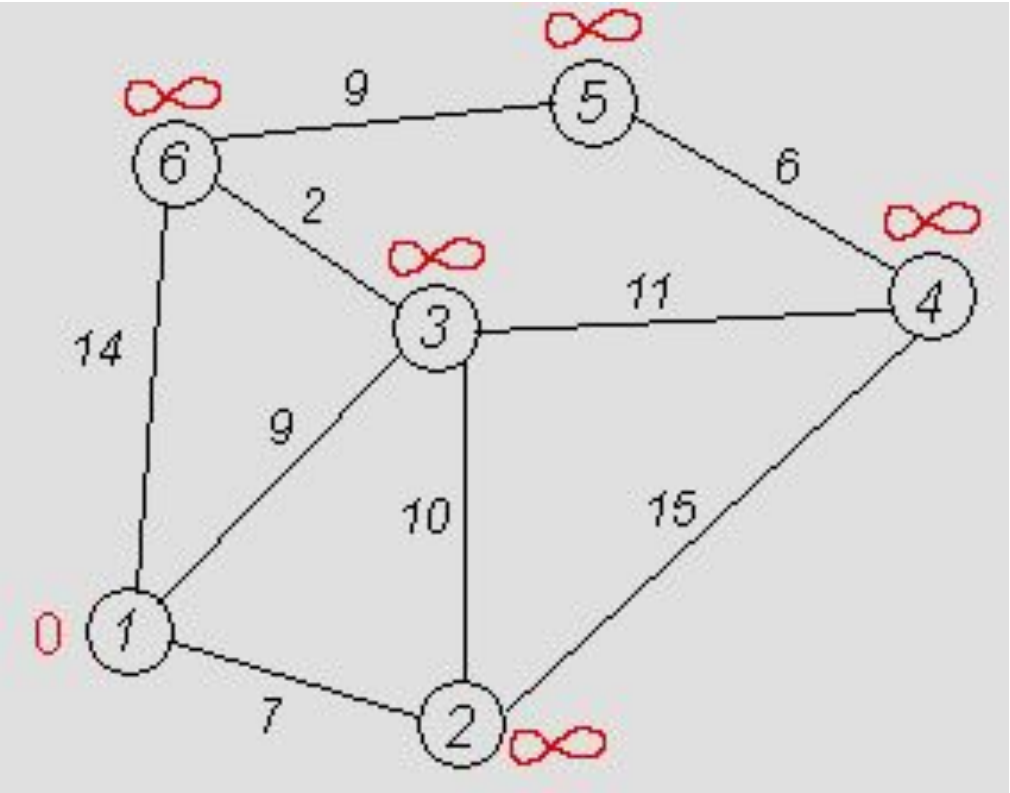
Алгоритм Дейкстры (пример)



Пусть требуется найти расстояния от 1-й вершины до всех остальных.

Алгоритмы поиска путей в графе

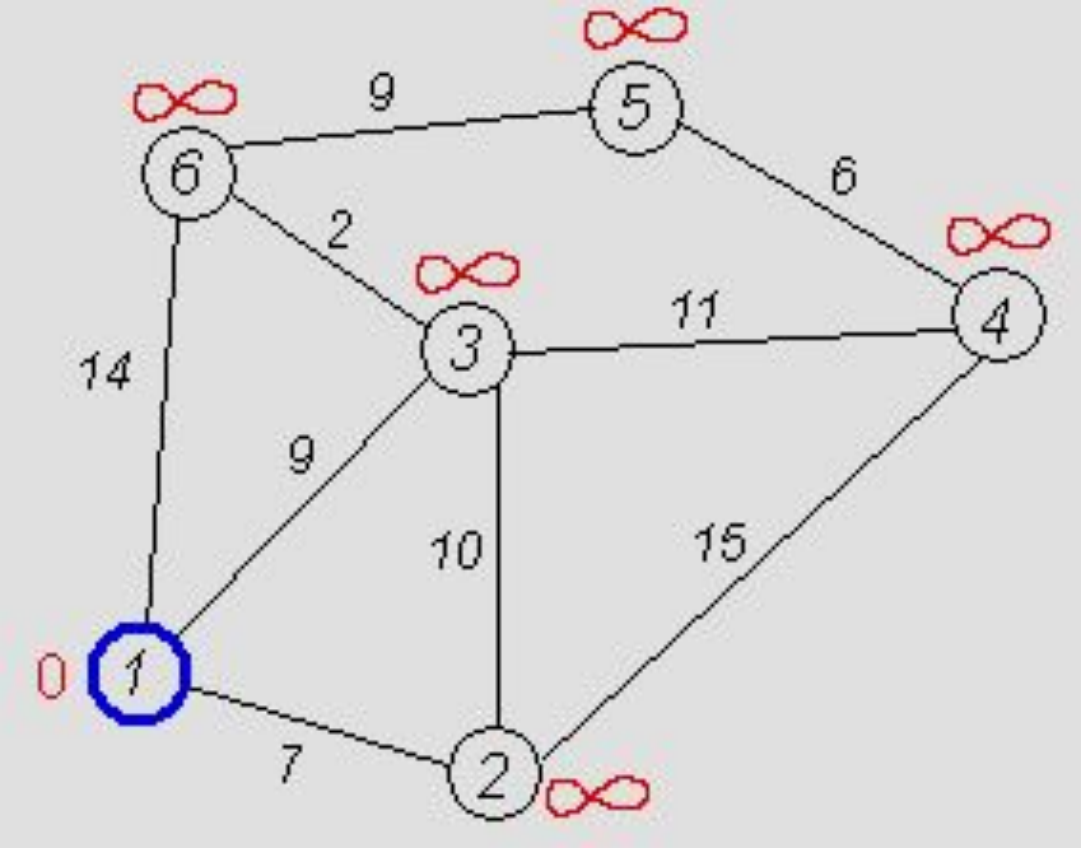
Алгоритм Дейкстры (пример)



Кружками обозначены вершины, линиями — пути между ними (ребра графа). В кружках обозначены номера вершин, над ребрами обозначена их «цена» — длина пути. Рядом с каждой вершиной красным обозначена метка — длина кратчайшего пути в эту вершину из вершины 1.

Алгоритмы поиска путей в графе

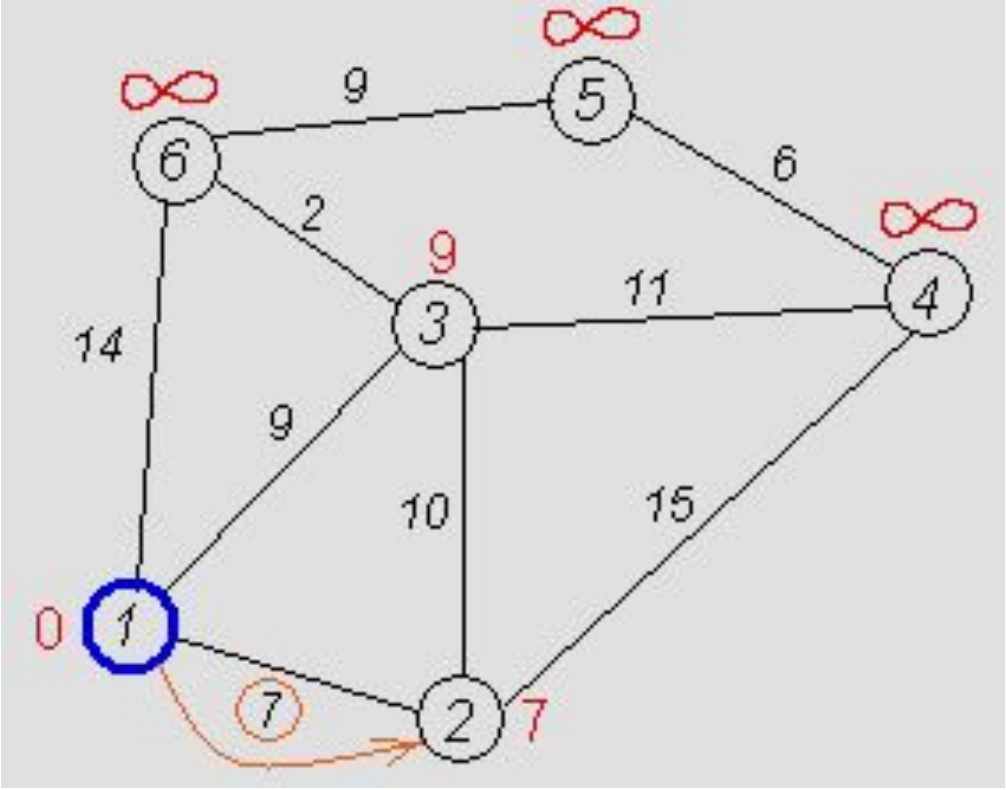
Алгоритм Дейкстры (пример)



Первый шаг. Рассмотрим шаг алгоритма Дейкстры для нашего примера. Минимальную метку имеет вершина 1. Её соседями являются вершины 2, 3 и 6.

Алгоритмы поиска путей в графе

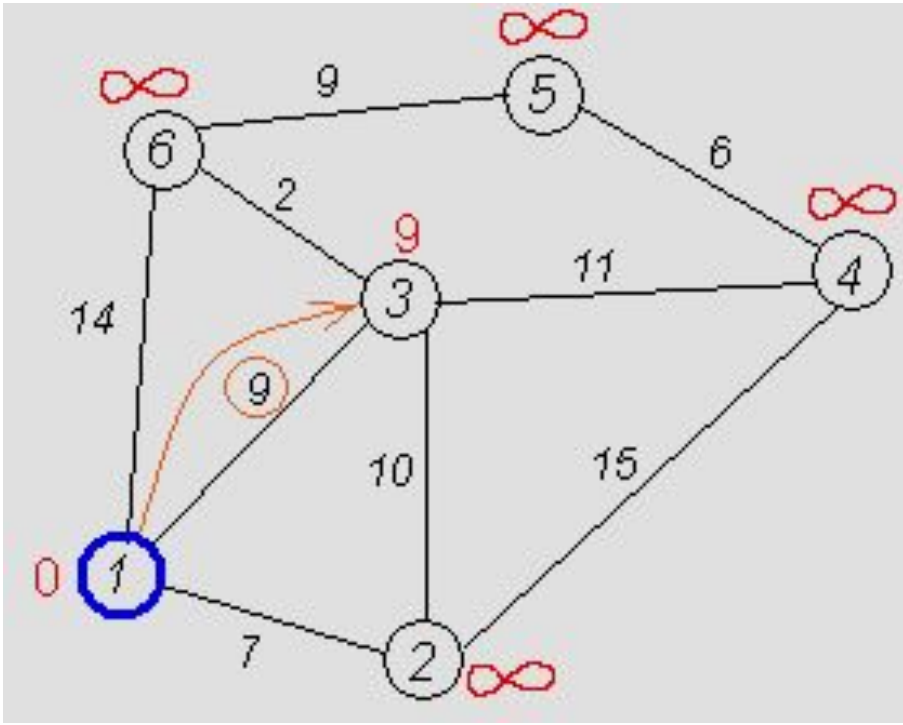
Алгоритм Дейкстры (пример)

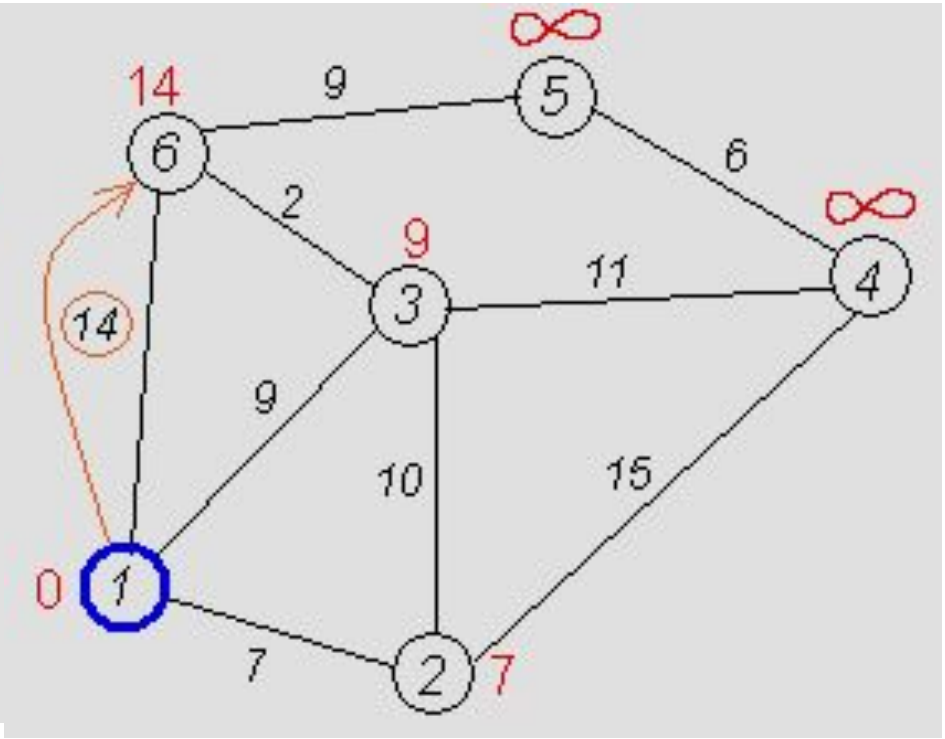


Первый по очереди сосед вершины 1 — вершина 2, потому что длина пути до неё минимальна. Длина пути в неё через вершину 1 равна кратчайшему расстоянию до вершины 1 + длина ребра, идущего из 1 в 2, то есть 0 + 7 = 7. Это меньше текущей метки вершины 2, поэтому новая метка 2-й вершины равна 7.

Алгоритмы поиска путей в графе

Алгоритм Дейкстры (пример)

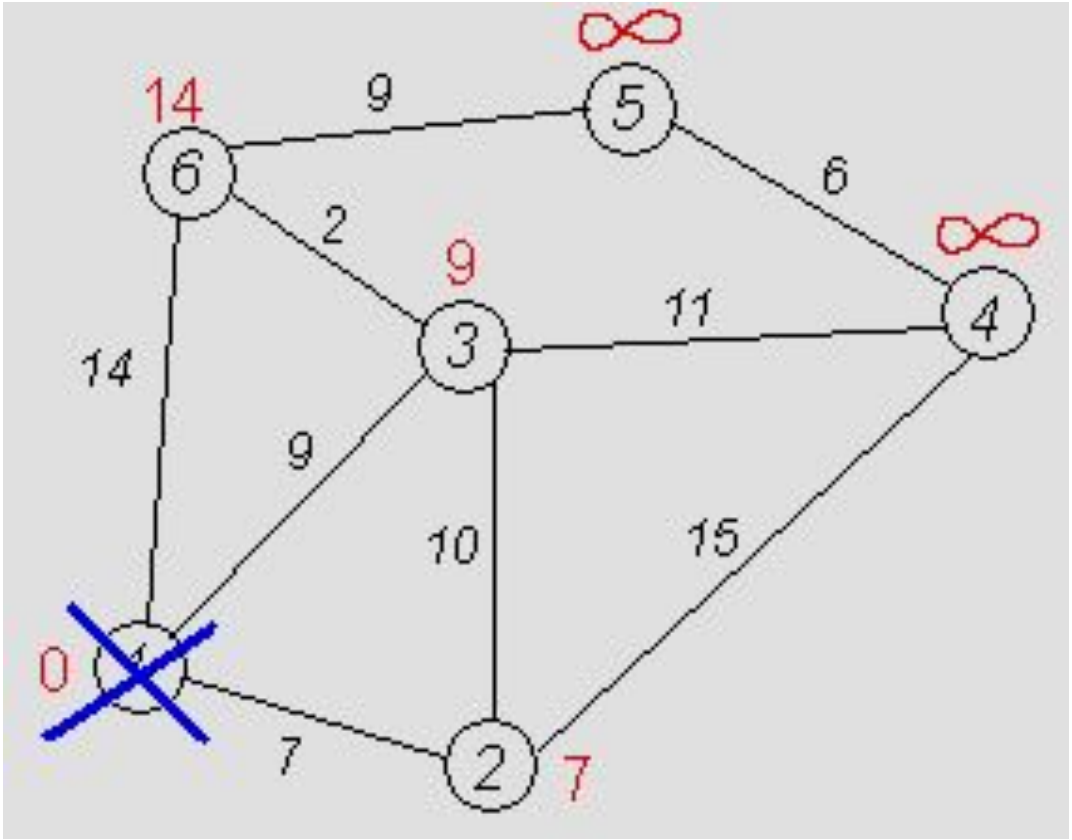




Аналогичную операцию проделываем с двумя другими соседями 1-й вершины — 3-й и 6-й.

Алгоритмы поиска путей в графе

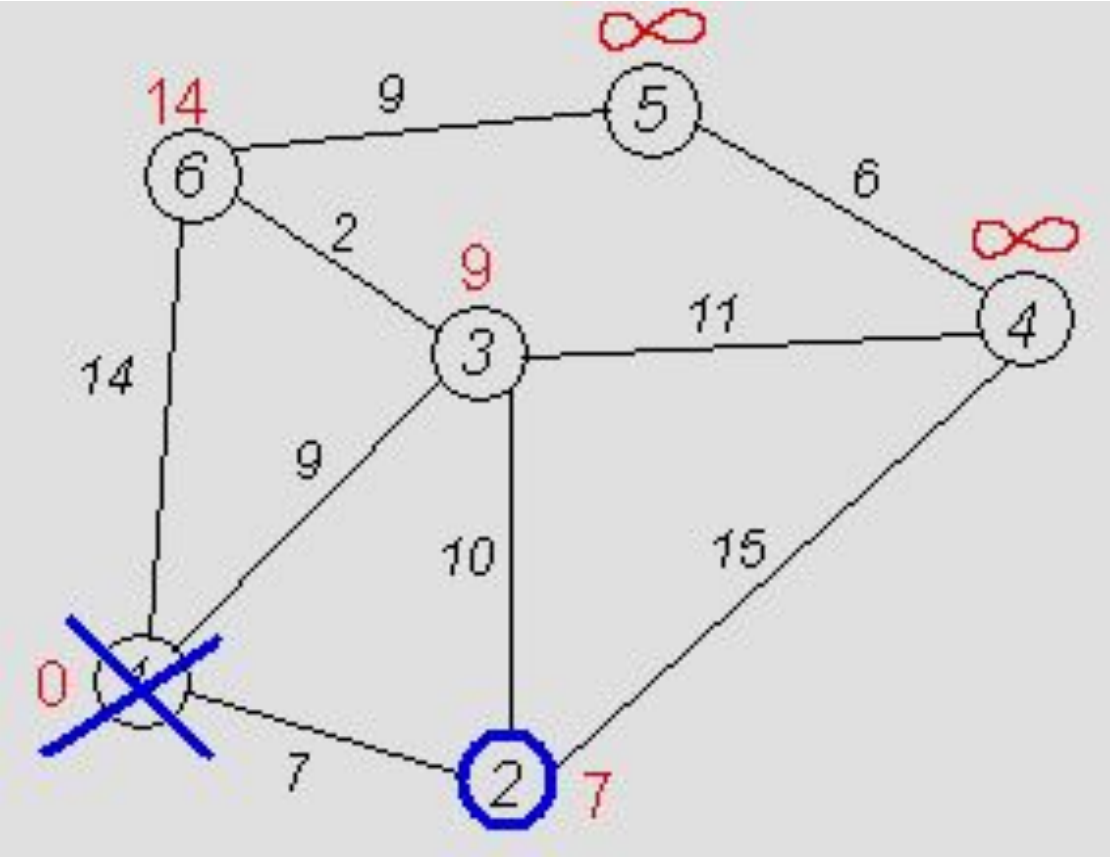
Алгоритм Дейкстры (пример)



Все соседи вершины 1 проверены. Текущее минимальное расстояние до вершины 1 считается окончательным и пересмотру не подлежит (то, что это действительно так, впервые доказал Дейкстра). Вычеркнем её из графа, чтобы отметить, что эта вершина посещена.

Алгоритмы поиска путей в графе

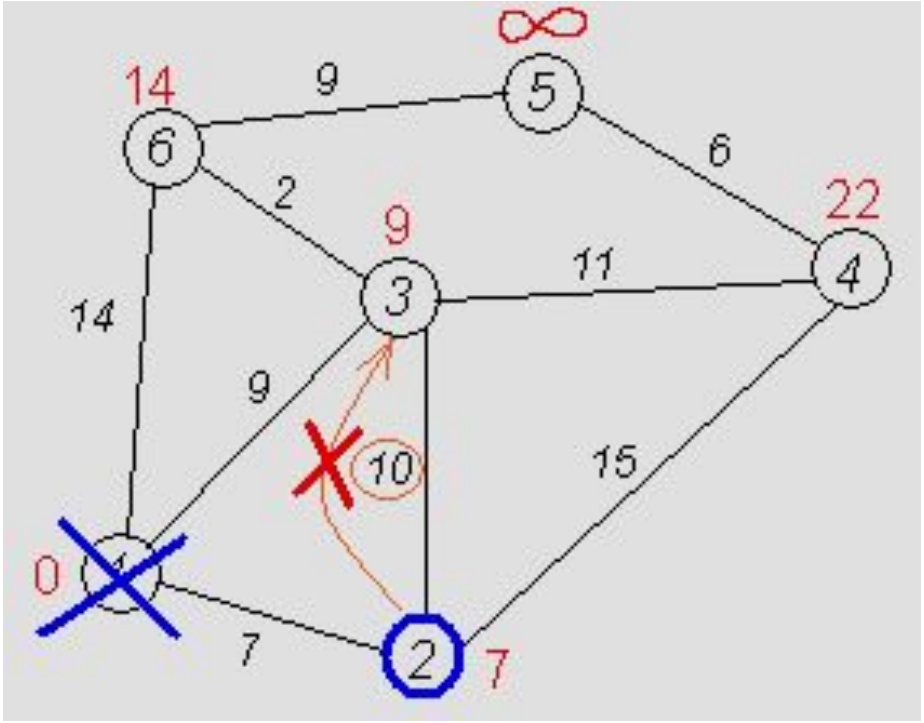
Алгоритм Дейкстры (пример)



Второй шаг. Шаг алгоритма повторяется. Снова находим «ближайшую» из непосещенных вершин. Это вершина 2 с меткой 7.

Алгоритмы поиска путей в графе

Алгоритм Дейкстры (пример)



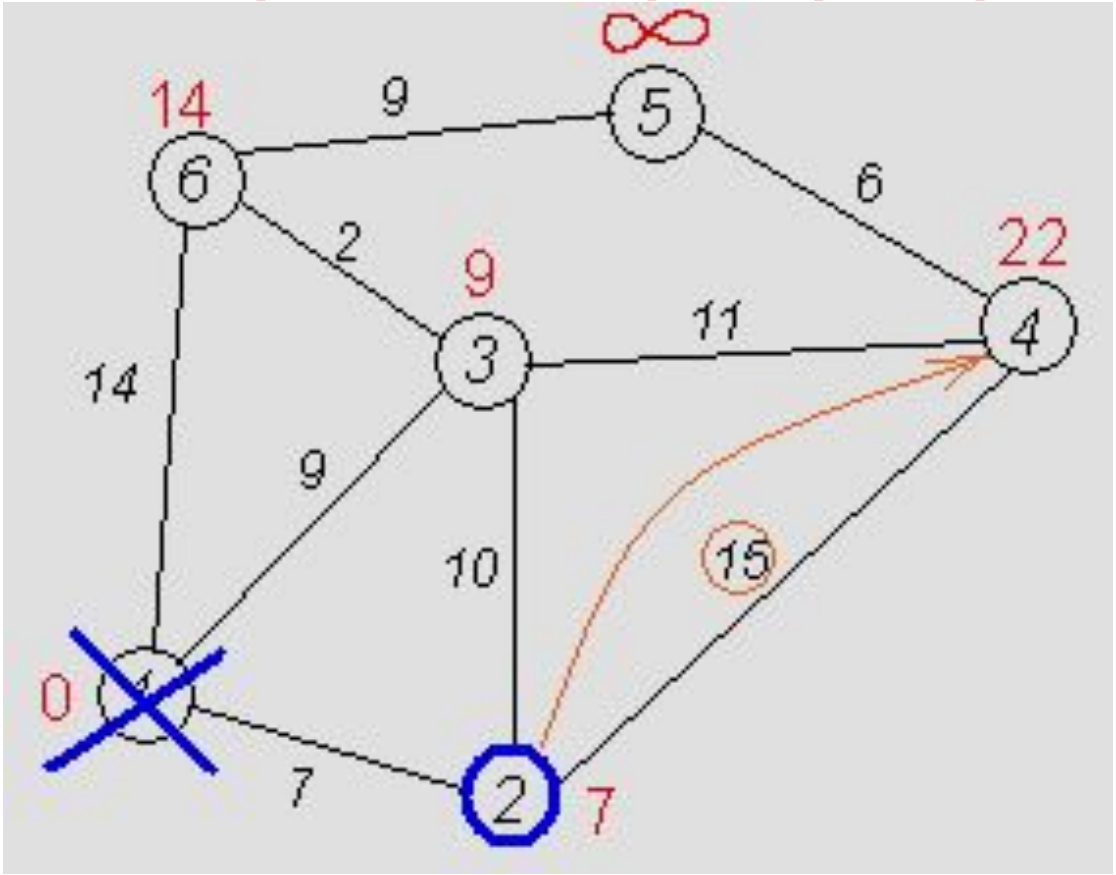
Снова пытаемся уменьшить метки соседей выбранной вершины, пытаясь пройти в них через 2-ю. Соседями вершины 2 являются 1, 3, 4.

Первый (по порядку) сосед вершины 2 — вершина 1. Но она уже посещена, поэтому с 1-й вершиной ничего не делаем.

Следующий сосед вершины 2 — вершина 3. Если идти в неё через 2, то длина такого пути будет = 7 + 10 = 17. Но текущая метка третьей

Алгоритмы поиска путей в графе

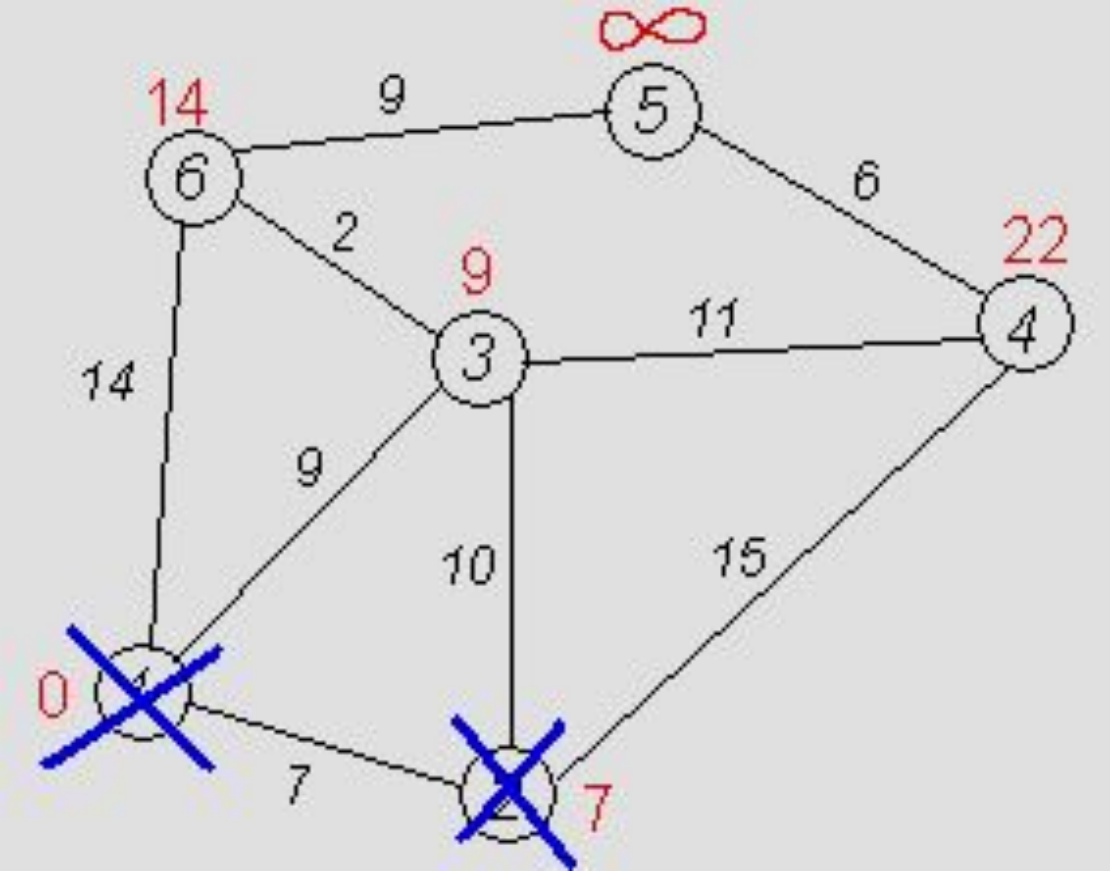
Алгоритм Дейкстры (пример)



Ещё один сосед вершины 2 — вершина 4. Если идти в неё через 2-ю, то длина такого пути будет = кратчайшее расстояние до 2 + расстояние между вершинами 2 и 4 = 7 + 15 = 22. Поскольку 22< , устанавливаем метку вершины 4 равной 22.

Алгоритмы поиска путей в графе

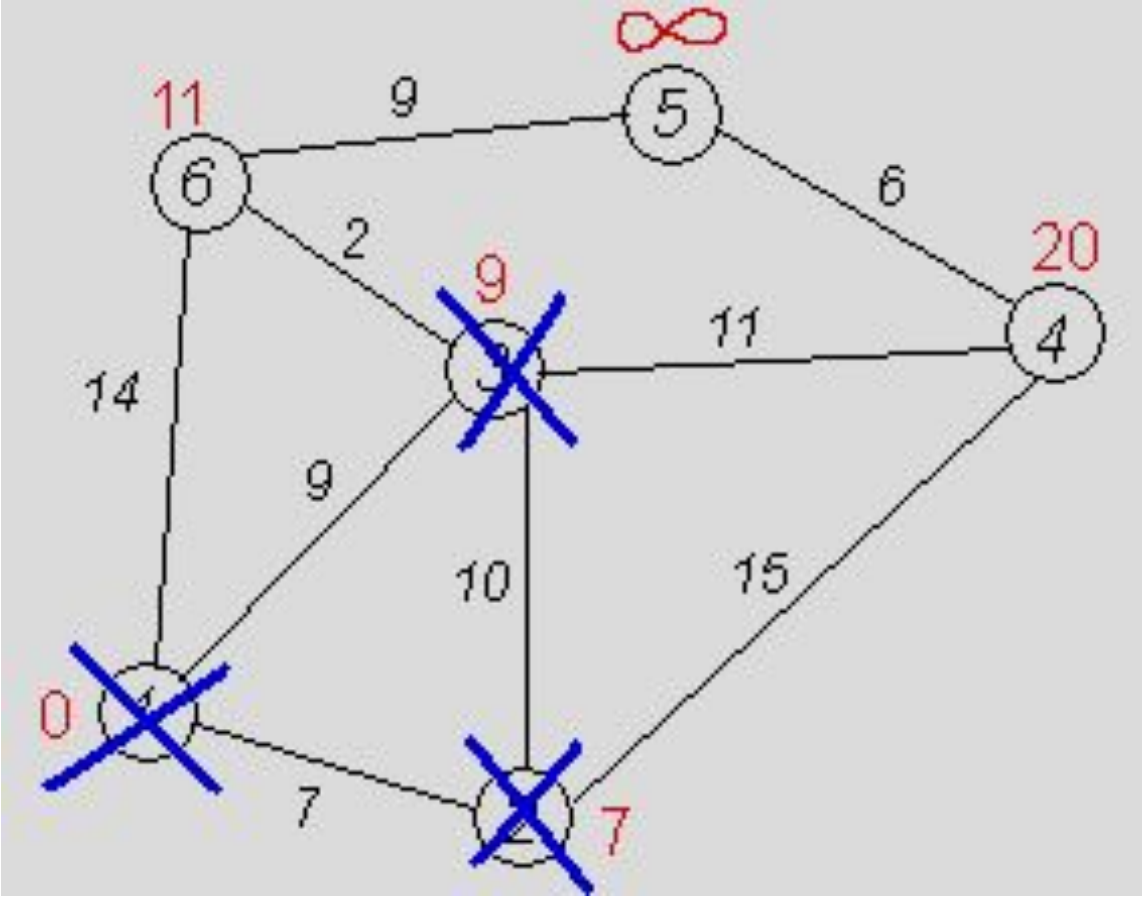
Алгоритм Дейкстры (пример)



Все соседи вершины 2 просмотрены, замораживаем расстояние до неё и помечаем её как посещенную.

Алгоритмы поиска путей в графе

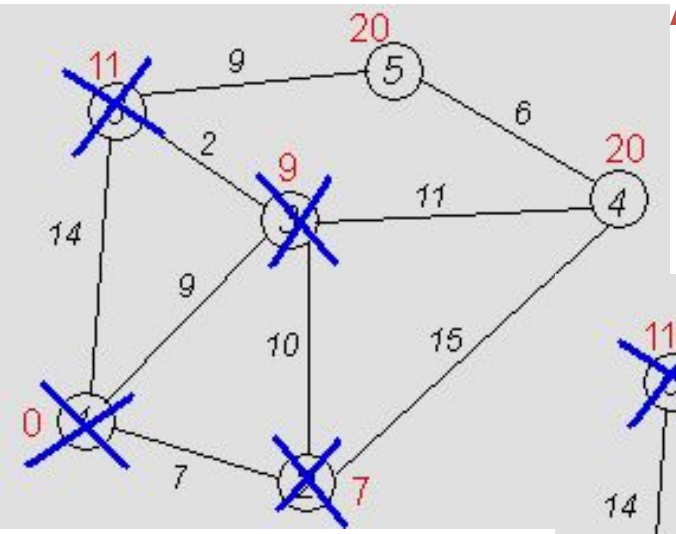
Алгоритм Дейкстры (пример)



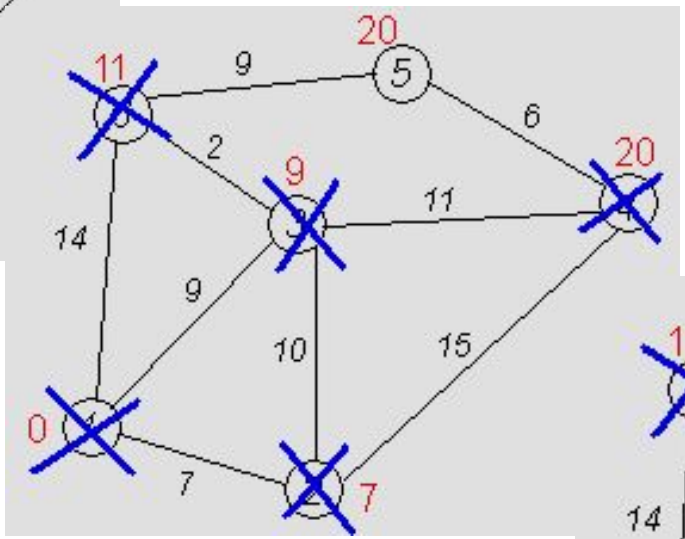
Третий шаг. Повторяем шаг алгоритма, выбрав вершину 3. После её «обработки» получим такие результаты:

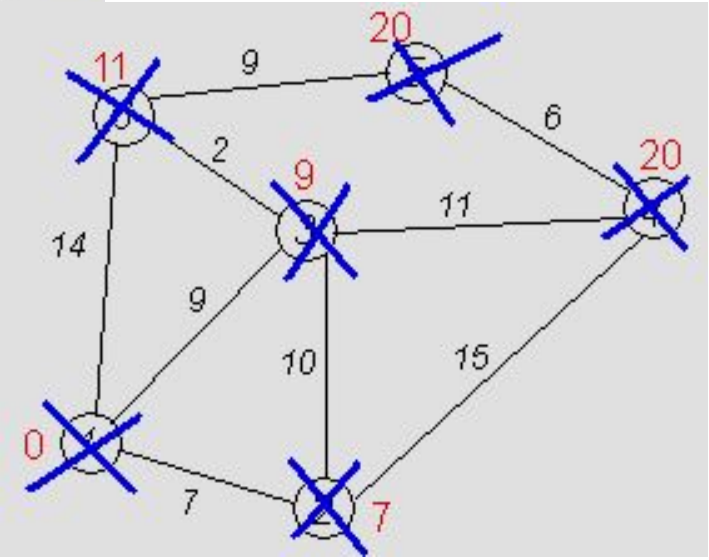
Алгоритмы поиска путей в графе

Алгоритм Дейкстры (пример)



Дальнейшие шаги. Повторяем шаг алгоритма для оставшихся вершин (Это будут по порядку 6, 4 и 5).





Завершение выполнения алгоритма. Алгоритм заканчивает работу, когда вычеркнуты все вершины. Результат его работы виден на последнем рисунке: кратчайший путь от вершины 1 до 2-й составляет 7, до 3-й — 9, до 4-й — 20, до 5-й —

Алгоритмы поиска путей в графе

Путь минимальной суммарной длины во взвешенном графе с произвольными весами для всех пар вершин (алгоритм Флойда)

Функция находит пути минимального веса в графе *G=(V,E),* заданном весовой матрицей *w,* у которой элемент *wi j* равен весу ребра, соединяющего *i*-ю и *j*-ю вершины. При этом полагаем, что *W[i,i]=0* для всех *i*. Путь ищется для всех пар вершин графа. Для бесконечности используется число *GM,* его можно задавать в зависимости от конкретной задачи.

Алгоритм Флойда предполагает последовательное преобразование матрицы весов *W*. В конечном итоге получаем матрицу, элементы *d[i,j]* которой представляют из себя вес минимального пути соединяющего *i* и *j* вершины.

Алгоритмы поиска путей в графе

Нахождение *K* путей минимальной суммарной длины во взвешенном графе с неотрицательными весами (алгоритм Йена)

Алгоритм предназначен для нахождения *K* путей минимальной длины во взвешенном графе между вершинами *u1,u2*. Ищутся пути, которые не содержат петель.

Работа алгоритма начинается с нахождения кратчайшего пути, для этого будем использовать уже описанный алгоритм Дейкстры. Второй путь ищем, перебирая кратчайшие отклонения от первого, третий - кратчайшие отклонения от второго, и т.д.

Алгоритмы поиска путей в графе

Алгоритм:

1. Найти минимальный путь *P1=(v11,...,v1L[1])*. Положить *k = 2*. Включить *P1* в результирующий список.
2. Положить *MinW* равным бесконечности. Найти отклонение минимального веса от *(k–1)*-го кратчайшего пути *Pk-1* для всех *i=1,2,...,L[k-1]*, выполняя для каждого *i* шаги с 3-го по 6-й.
3. Проверить, совпадает ли подпуть, образованный первыми *i* вершинами пути *Pk-1*, с подпутем, образованным первыми *i* вершинами любого из путей *j=1,2,...,k–1*). Если да, положить *W[vk-1i,vji+1]* равным бесконечности, в противном случае ничего не изменять (чтобы в дальнейшем исключить получение в результате одних и тех же путей).4. Используя алгоритм нахождения кратчайшего пути, найти пути от *vk-1i* к *u2*, исключая из рассмотрения корни *(vk-11,...,vk-1i)* (чтобы исключить петли), для этого достаточно положить равными бесконечности элементы столбцов и строк матрицы *W*, соответствующие вершинам, входящим в корень.
5. Построить путь, объединяя корень и найденное кратчайшее ответвление; если его вес меньше *MinW*, то запомнить его.
6. Восстановить исходную матрицу весов *W* и возвратиться к шагу 3.
7. Поместить путь минимального веса (*MinW*), найденный в результате выполнения шагов с 3 по 6, в результирующий список. Если *k = K*, то алгоритм заканчивает работу, иначе увеличить *k* на единицу и вернуться к шагу 2.

Контрольные вопросы

1.Какими структурами данных можно представить в памяти древовидные структуры?

2. Перечислите основные алгоритмы поиска путей в графах?

3. Какие основные классами матриц предствляются графы в памяти компьютера?

Спасибо за внимание!