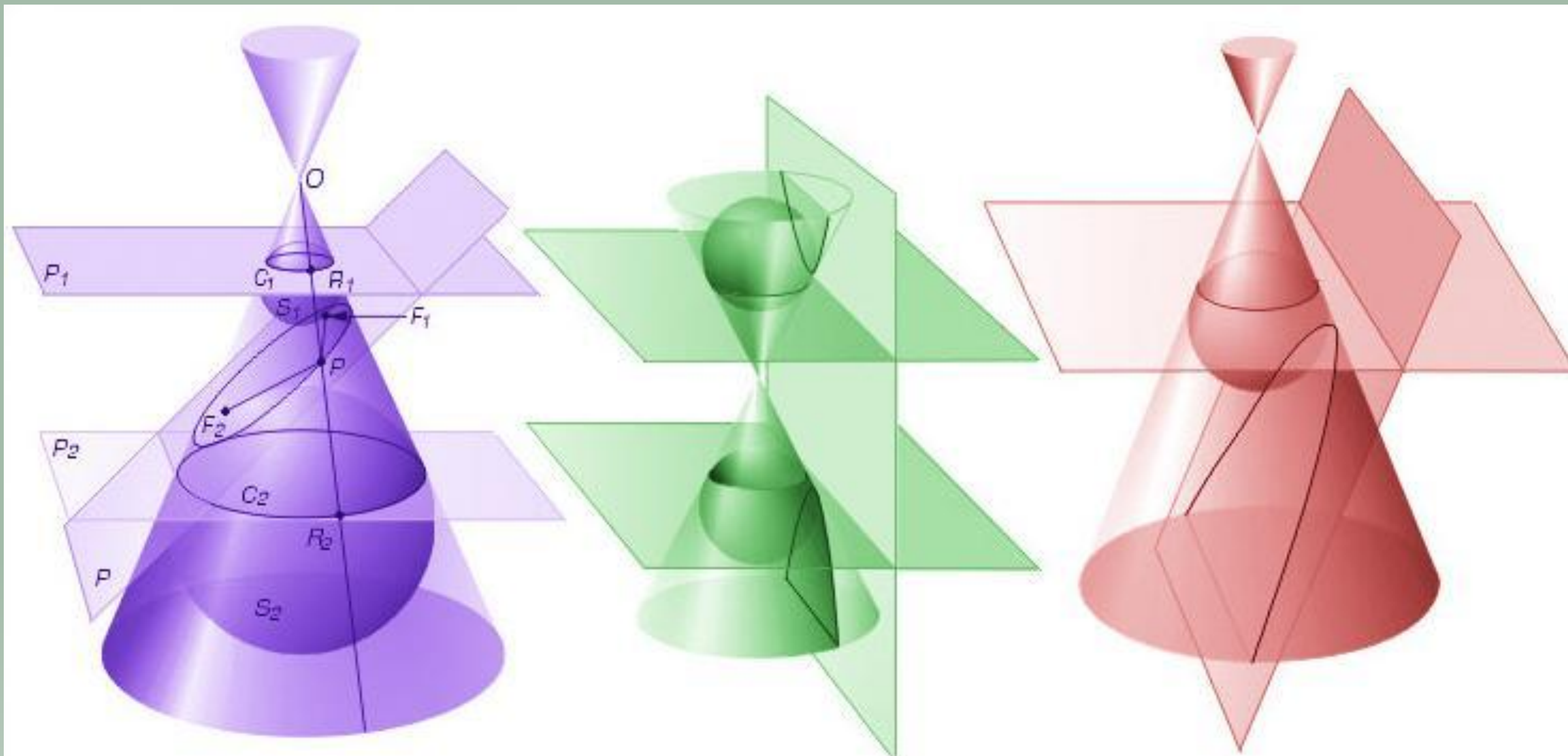
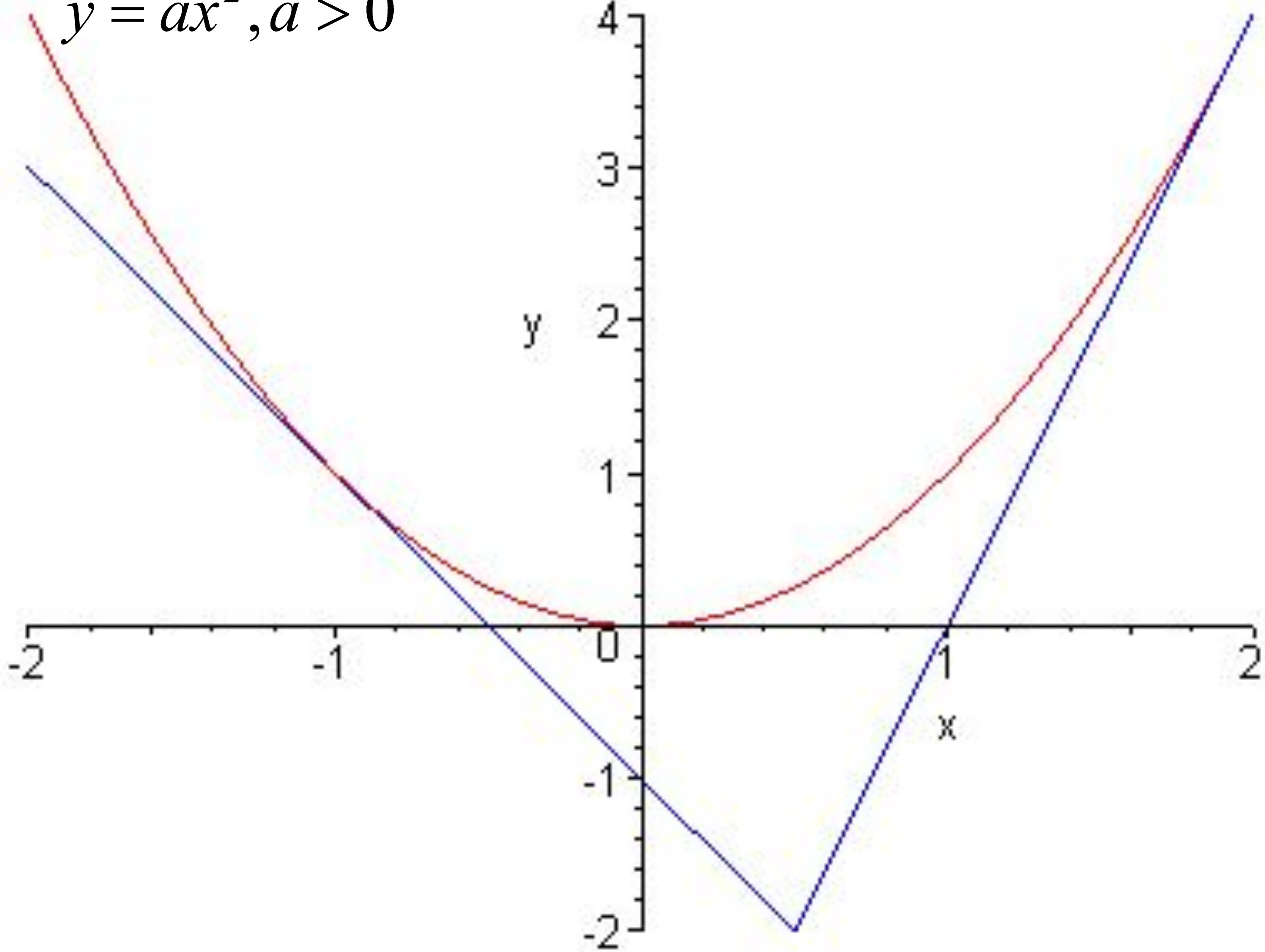
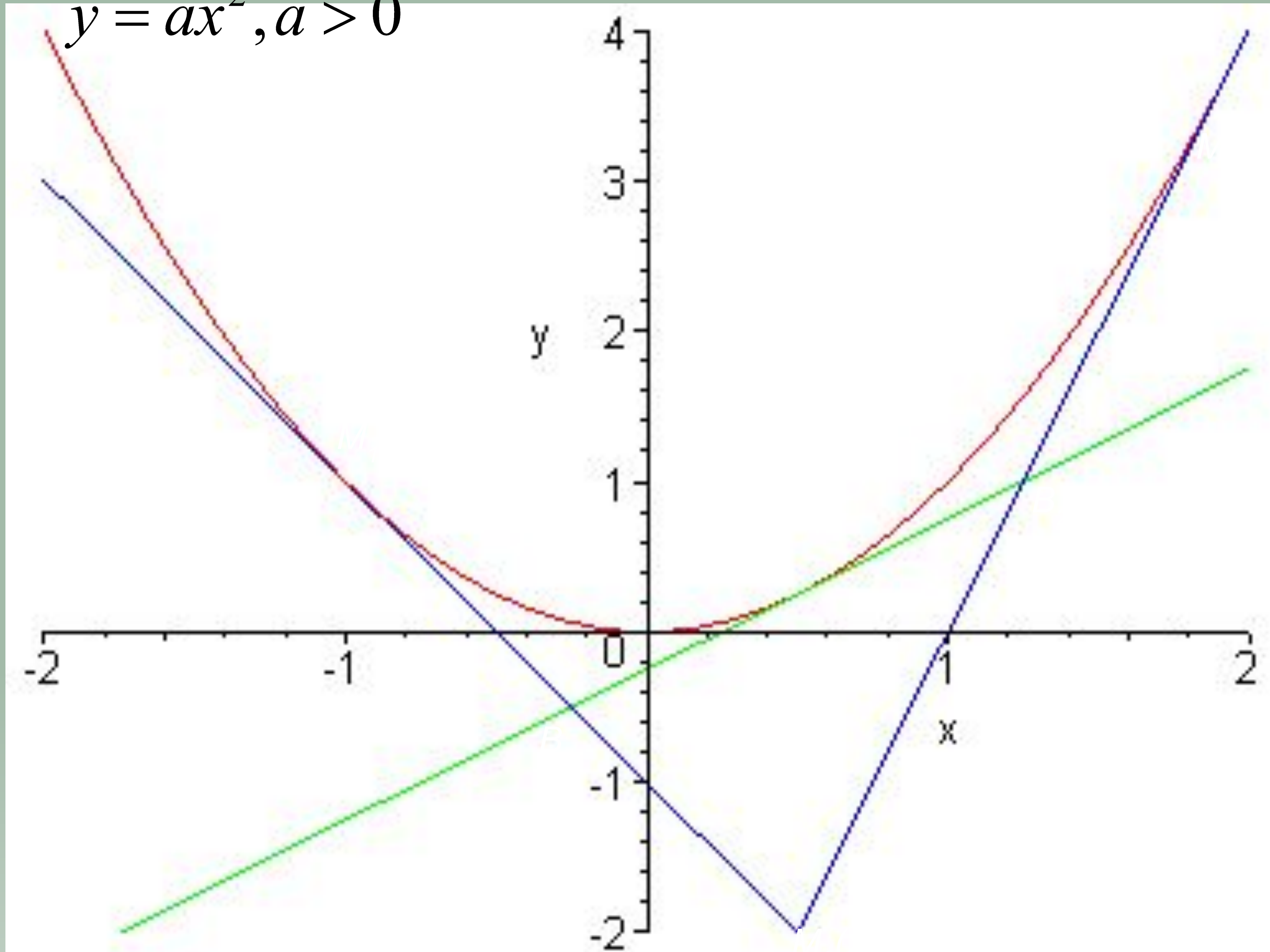
Конические сечения
и свойства их касательных


O
P1
C1
R1
S1
F1
P
F2
P2
C2
R2
P
S2

$y = ax^2, a > 0$

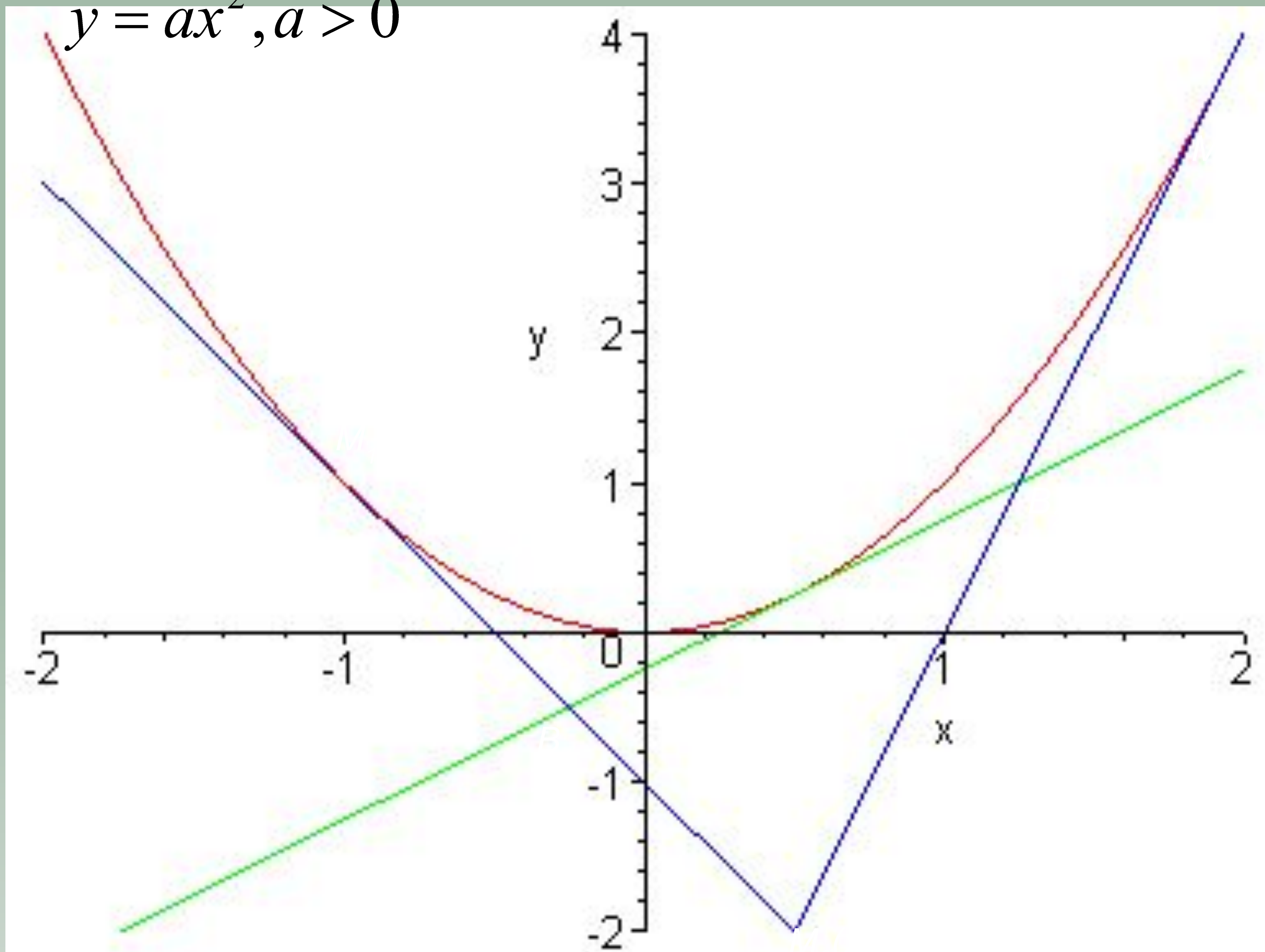


$$y = ax^2, a > 0$$



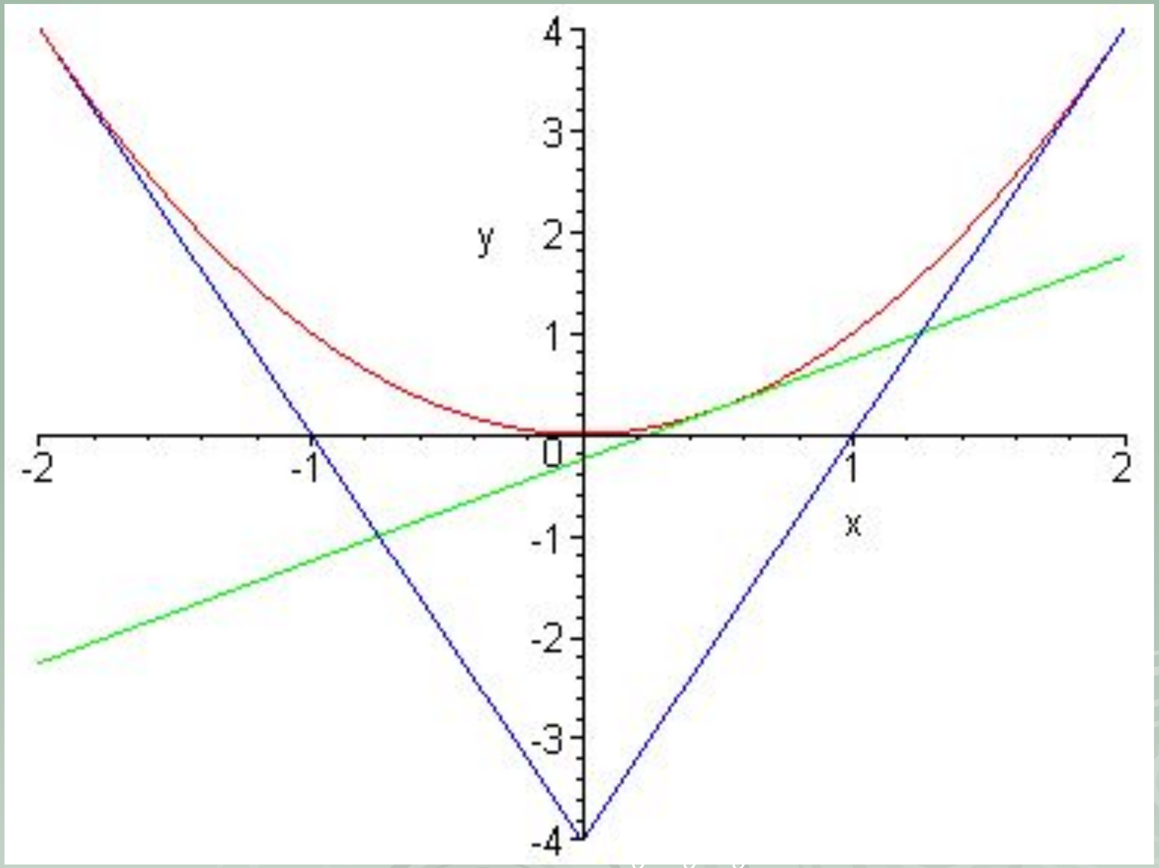
Утверждение 1: $\frac{M_0B_1}{M_0M_1} + \frac{M_0B_2}{M_0M_2} = 1$

$y = ax^2, a > 0$



Следствие 1. Если точка M_0 лежит на оси ординат, то

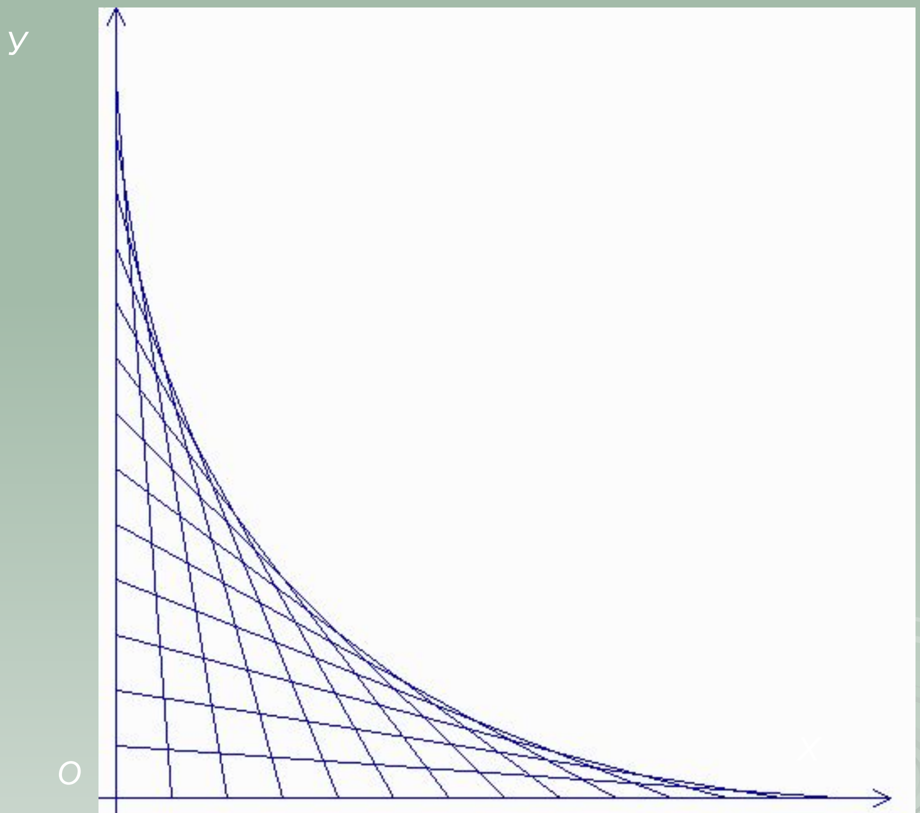
$$M_0B_1 + M_0B_2 = M_0M_1 = const$$

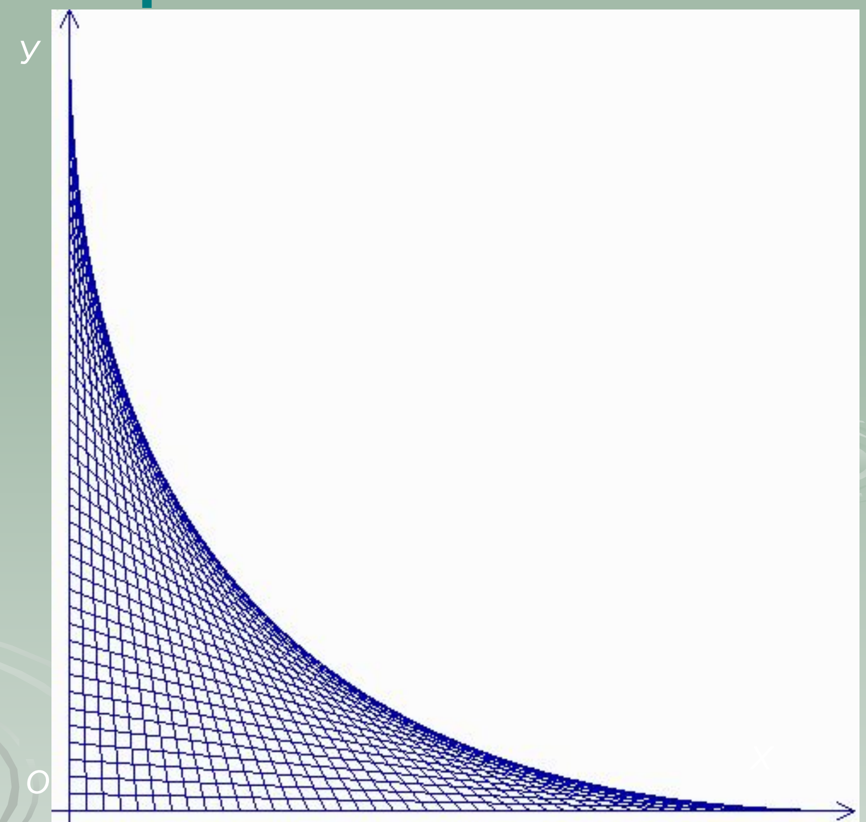


Следствие 2. Огибающей семейства прямых

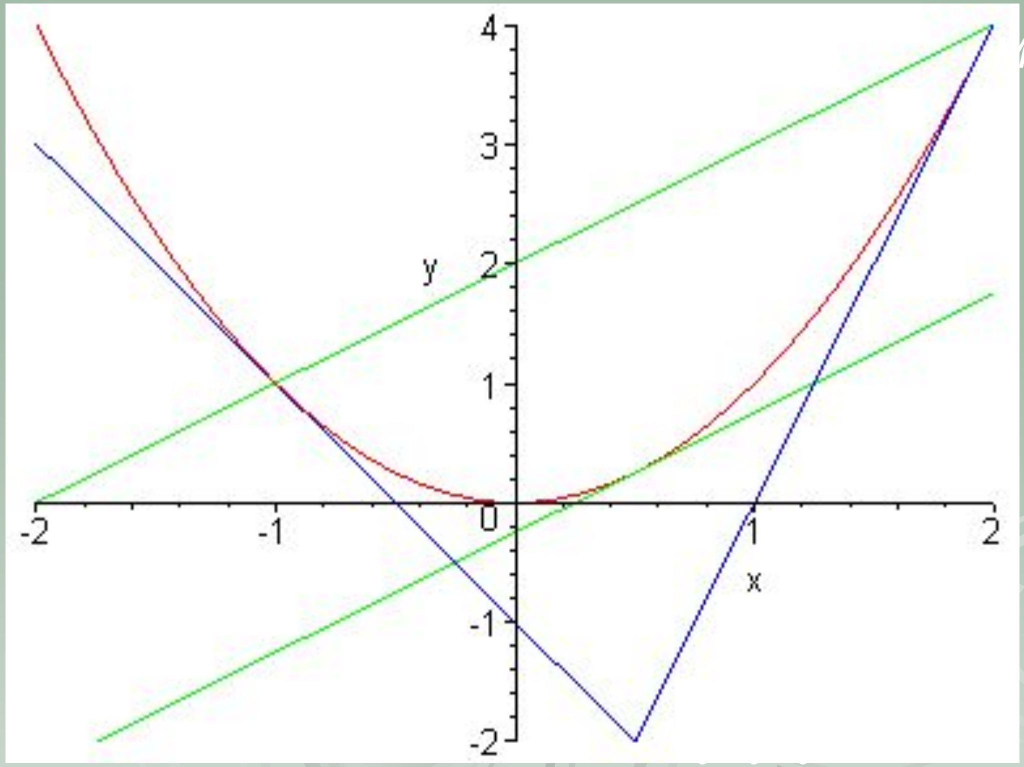
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad a+b=const$$

является парабола



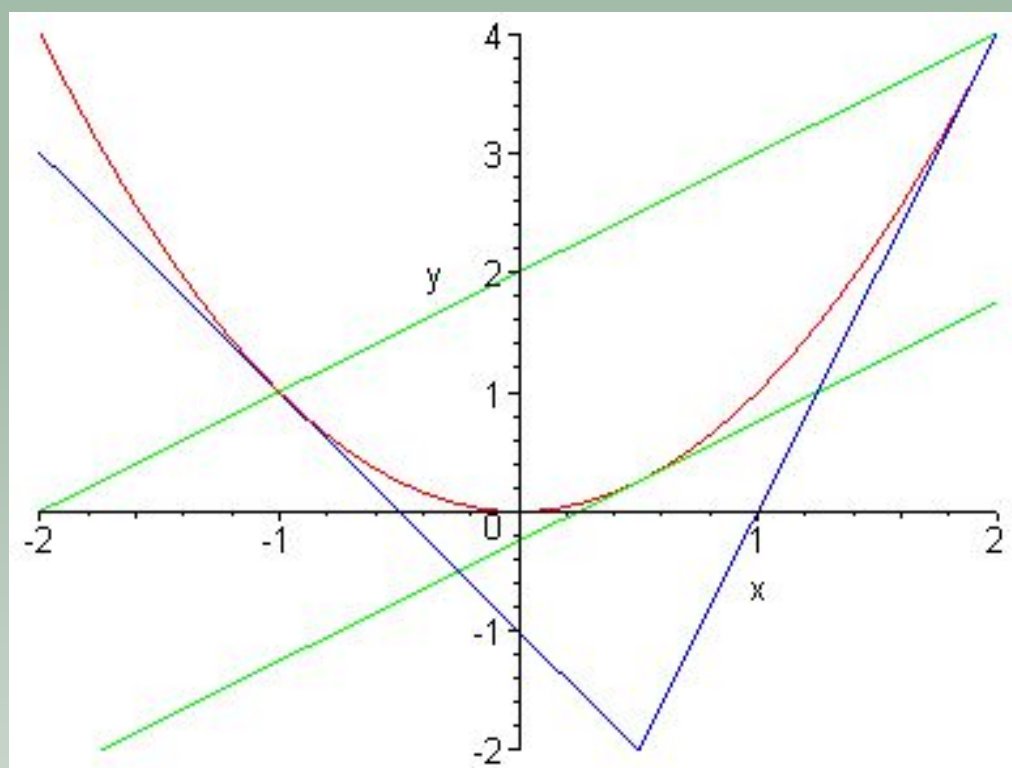


Следствие 3. Пусть прямые, касающиеся параболы в точках M_1 и M_2 пересекаются в точке M_0. Тогда средняя линия треугольника $M_1M_2M_0$, параллельная M_1M_2, касается параболы



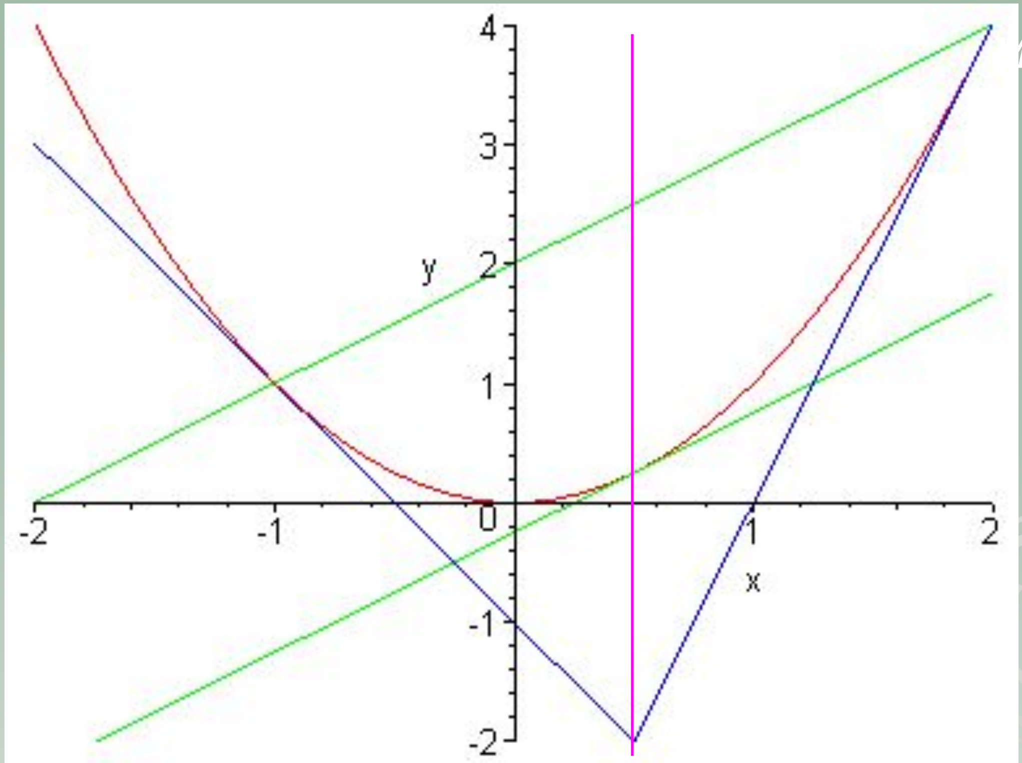
Пусть B_1B_2 – средняя линия треугольника $M_1M_2M_0$. Тогда

$$\frac{M_0B_1}{M_0M_1}+\frac{M_0B_2}{M_0M_2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$



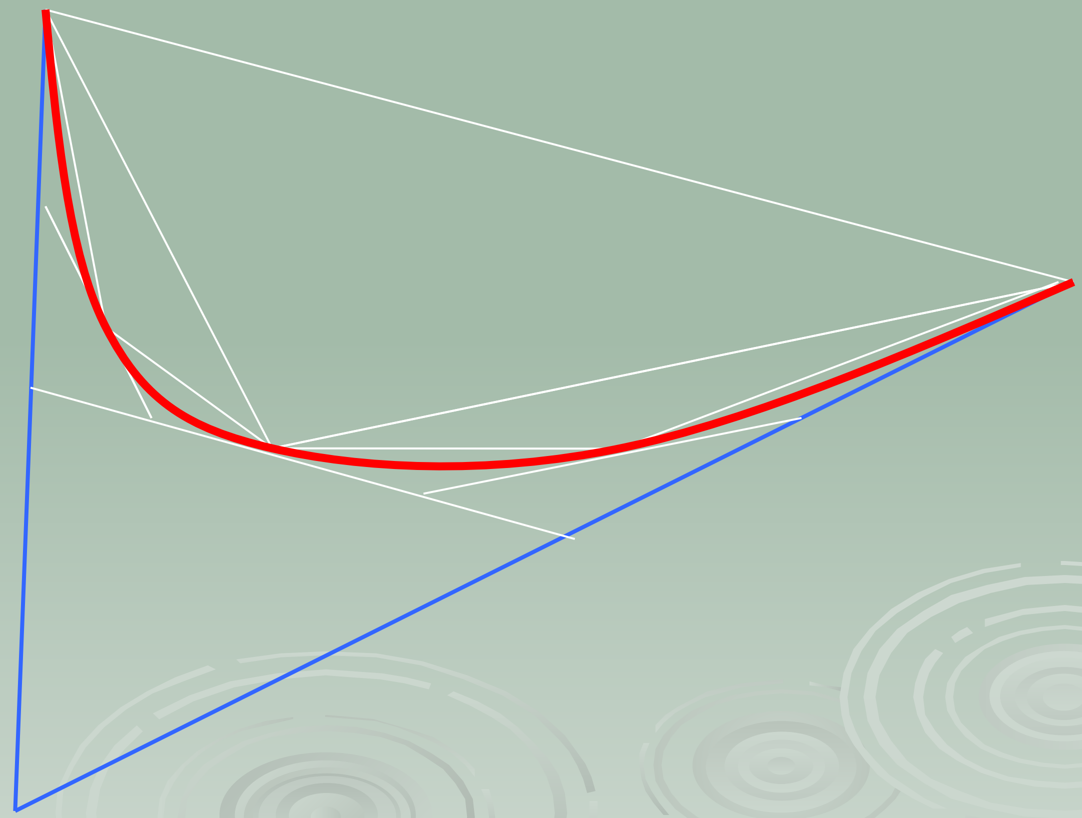
$_2(x_{02};y_{02})$

Следствие 4. Прямая M_0P является медианой треугольника $M_1M_2M_0$ и параллельна оси ординат

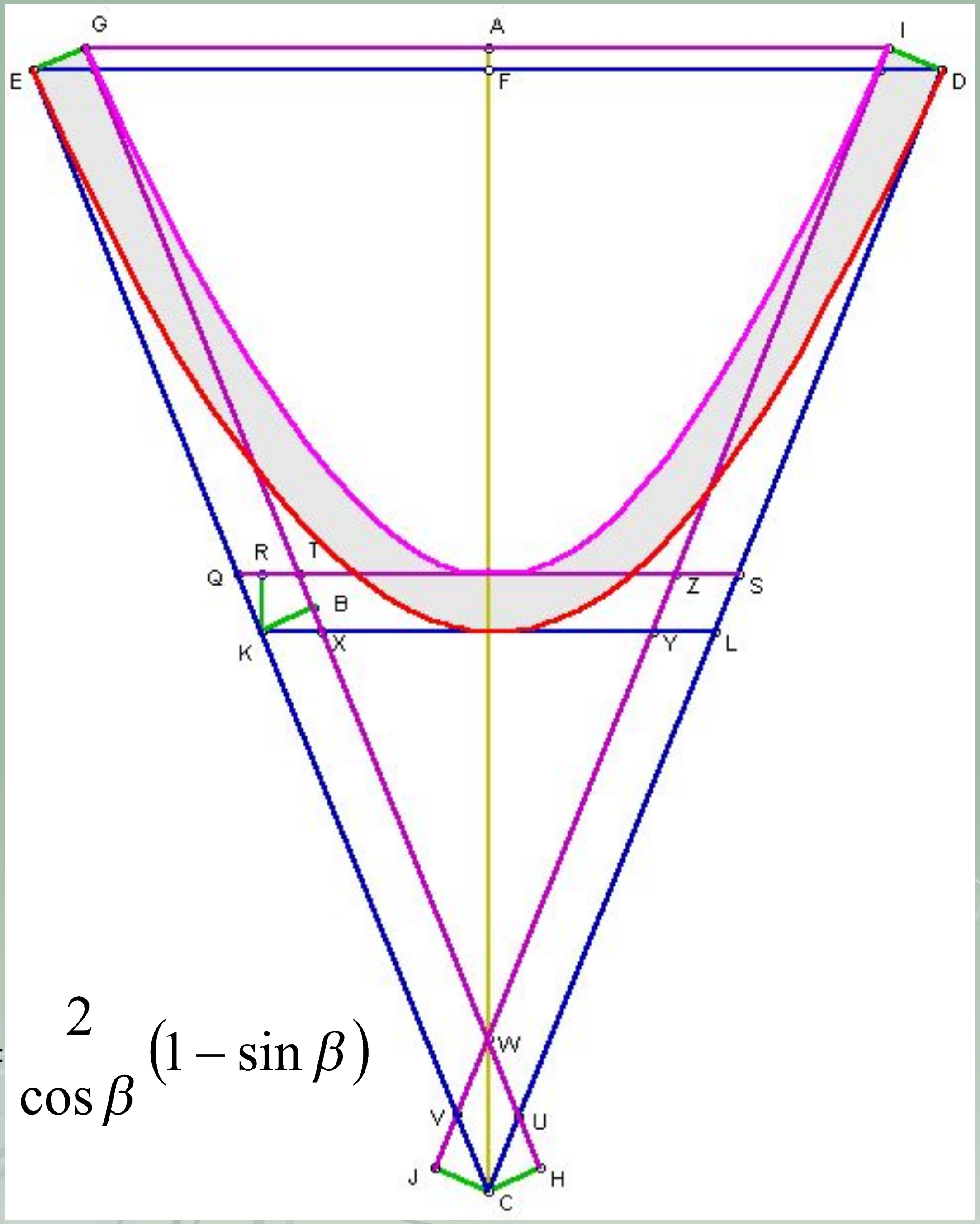


$M_2(x_{02};y_{02})$

Следствие 5. В данный неразвёрнутый угол можно вписать единственную параболу, касающуюся сторон угла в двух данных (отличных от вершины) точках.

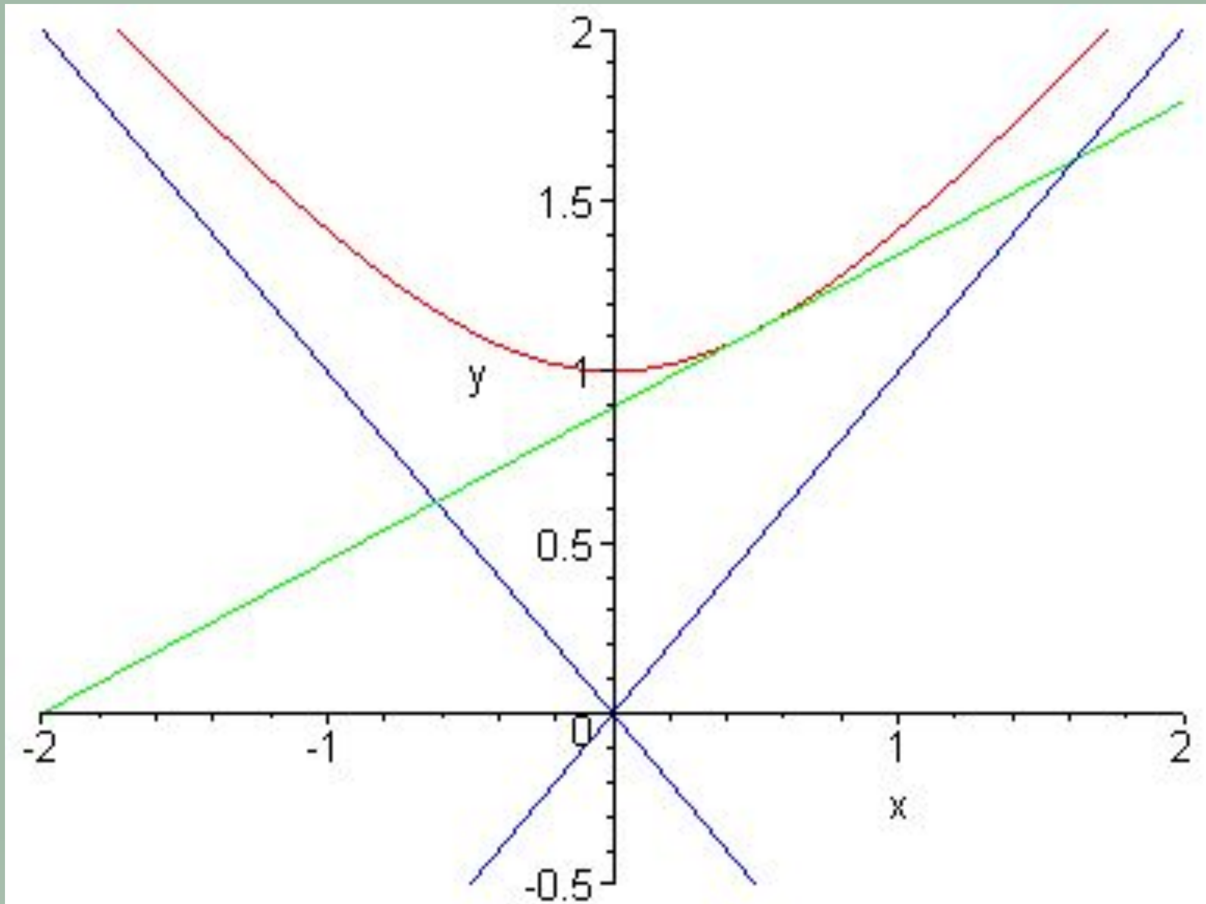


Задача. Останется ли параболоид после обгорания или обледенения параболоидом, сохранится ли оптическое свойство параболоида фокусировать отражённые лучи в одной точке – фокусе?



$$\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{2}{\cos\beta}\left(1-\sin\beta\right)$$

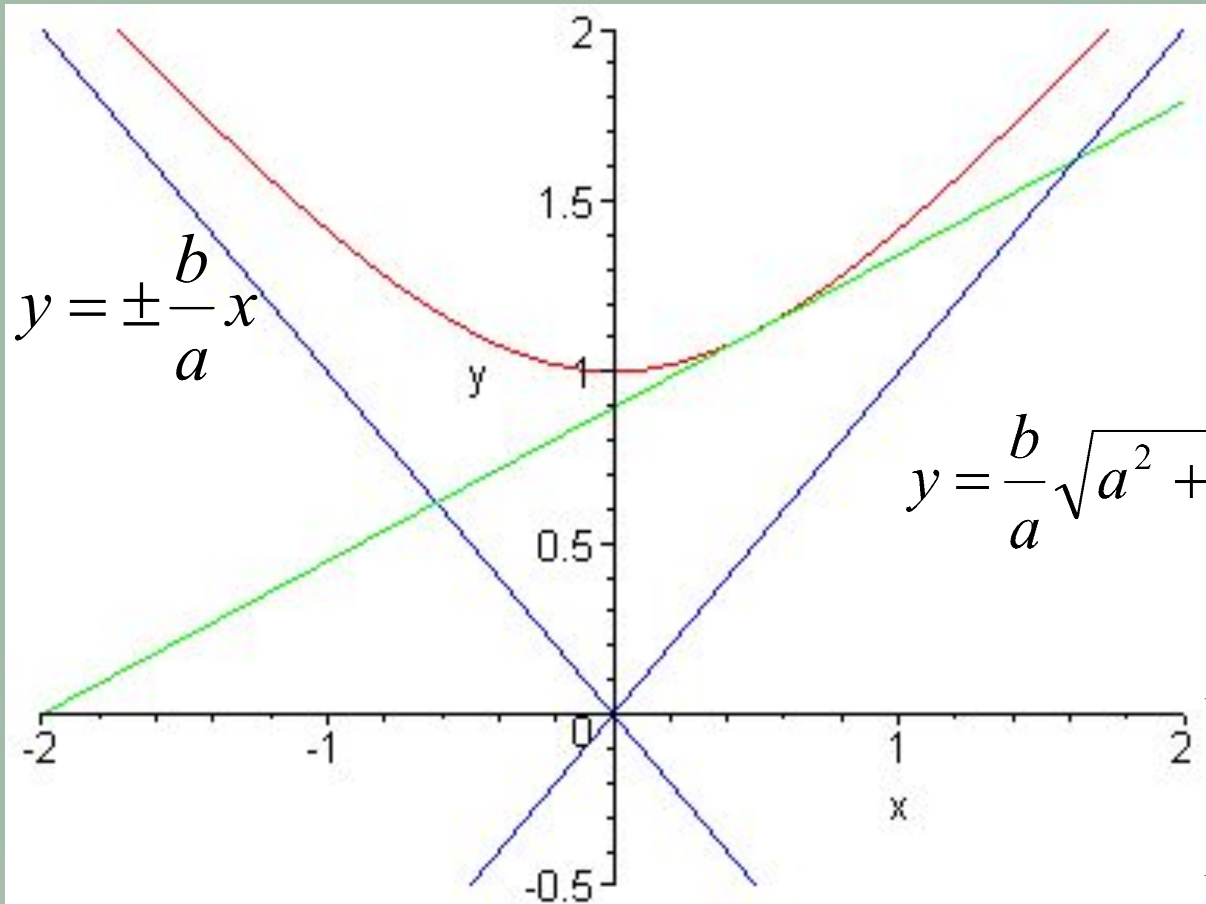
Следствие 6. Параболическая поверхность после обгорания, обледенения или покраски теряет свойства фокусировать отражённые лучи в одной точке.



$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

Утверждение 2. Касательная к гиперболе в произвольной точке отсекает от асимптот отрезки, произведение которых постоянно и не зависит от выбора точки касания.

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$



$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2+x_0^2}+\frac{bx_0}{a\sqrt{a^2+x_0^2}}\left(x-x_0\right)$$

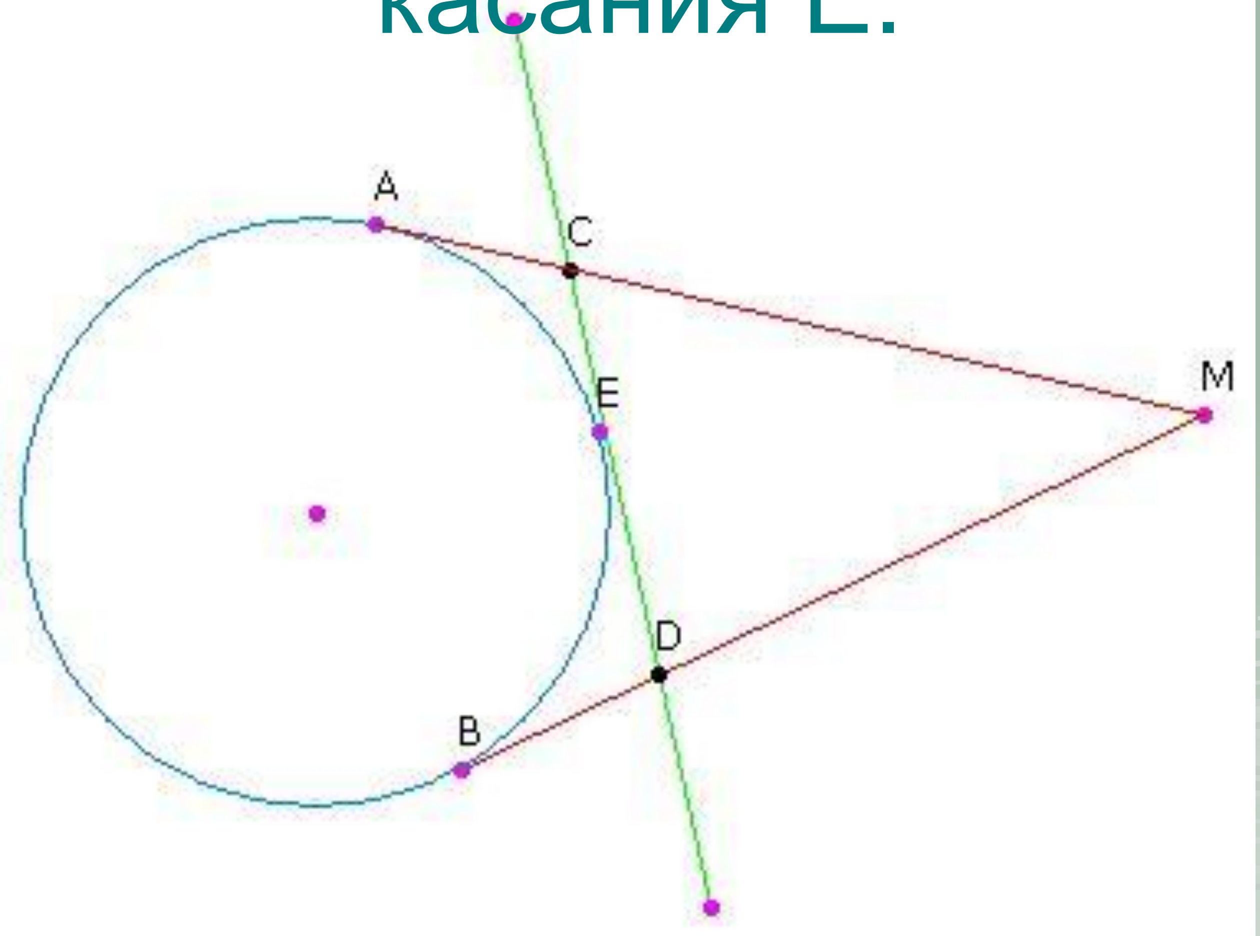
$$M_1\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+x_0^2}-x_0};\frac{ab}{\sqrt{a^2+x_0^2}-x_0}\right)$$

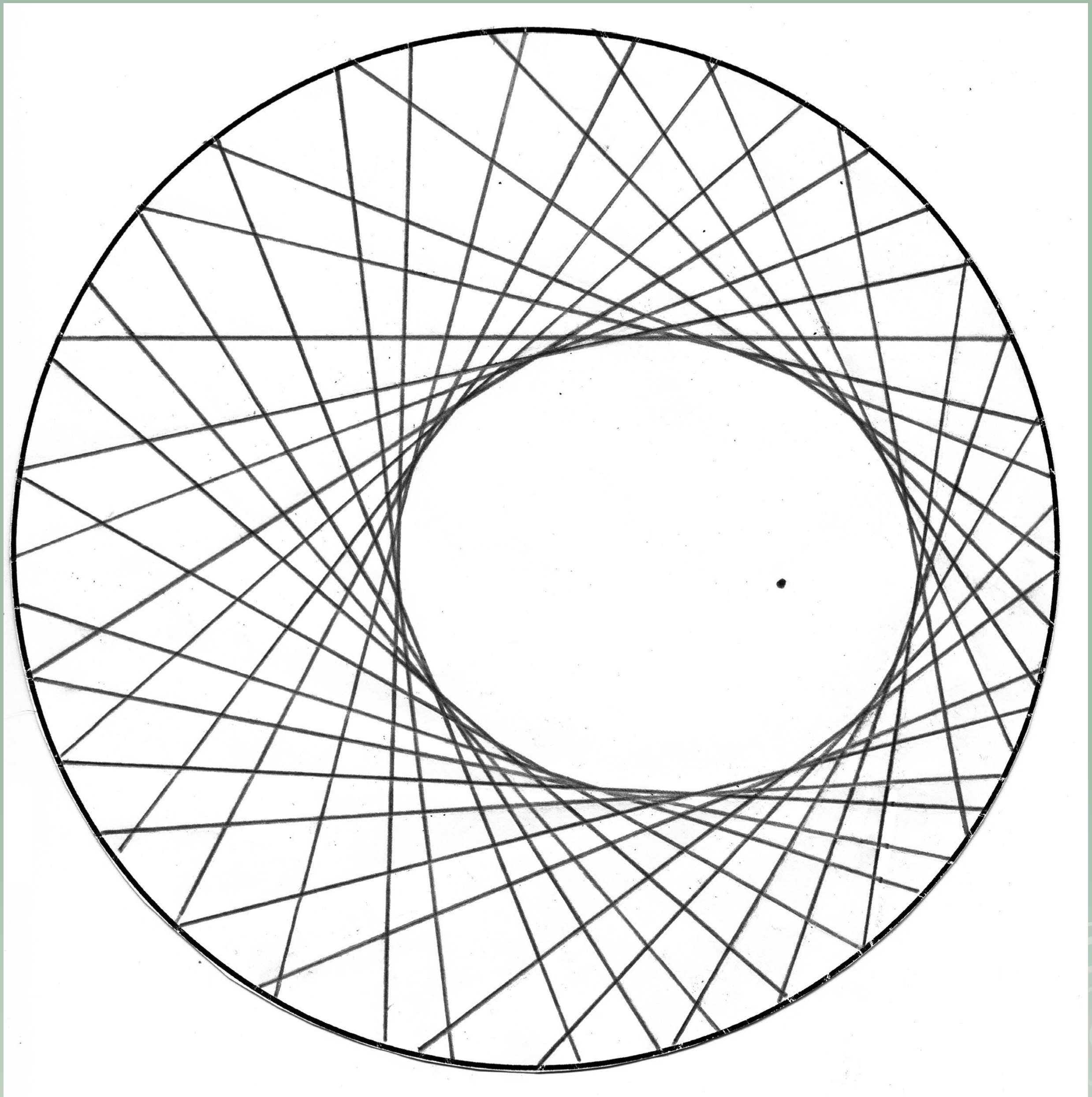
$$M_2\left(-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+x_0^2}+x_0};\frac{ab}{\sqrt{a^2+x_0^2}+x_0}\right)$$

$$OM_1^2=\frac{a^2\left(a^2+b^2\right)}{\left(\sqrt{a^2+x_0^2}-x_0\right)^2}\qquad OM_2^2=\frac{a^2\left(a^2+b^2\right)}{\left(\sqrt{a^2+x_0^2}+x_0\right)^2}$$

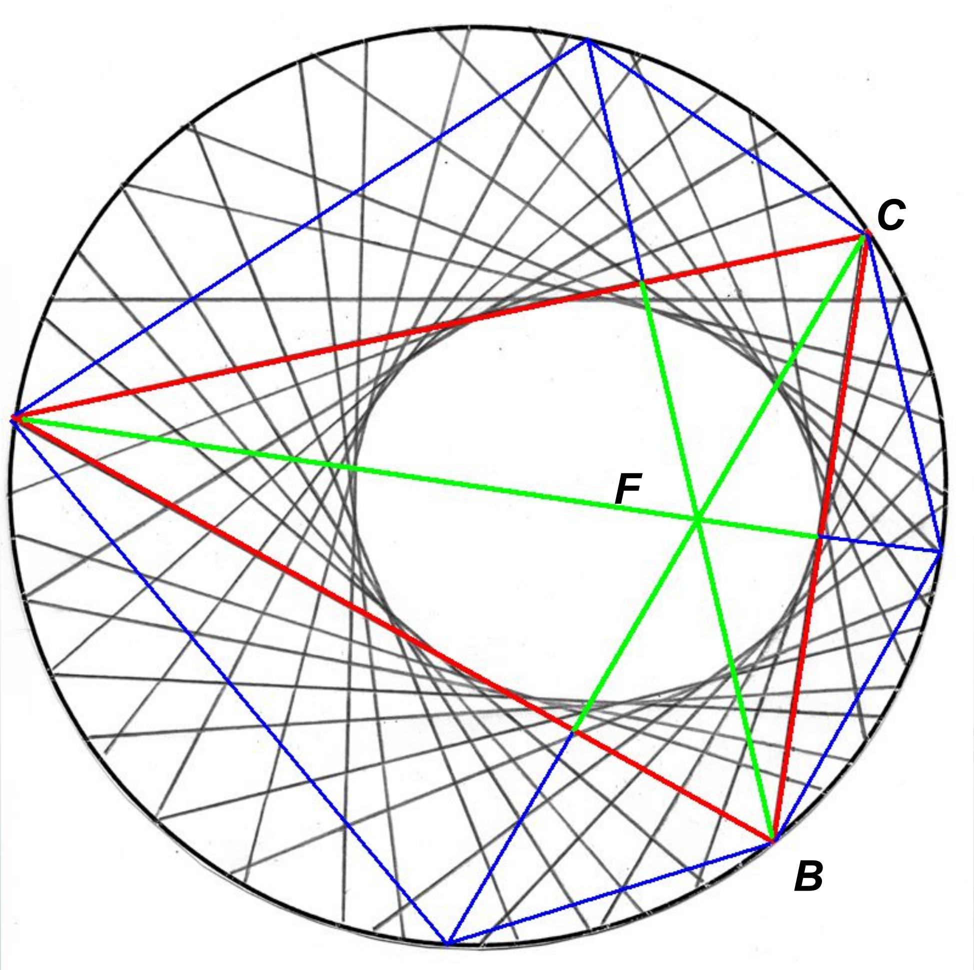
$$OM_1\cdot OM_2=\frac{a^2\left(a^2+b^2\right)}{a^2+x_0^2-x_0^2}=a^2+b^2=const$$

Утверждение 3. Периметр треугольника *MCD* постоянен и не зависит от выбора точки касания Е.





Утверждение 4. эллипс является огибающей семейства треугольников, вписанных в одну и ту же окружность с центром в одном фокусе эллипса, а точки пересечения высот каждого из этих треугольников – второй фокус эллипса



$$M_0B_1 + M\ \ B\ \ = M\ \ M\ \ = const$$