ЛЕКЦИЯ № 3

I. Динамика системы материальных точек

1.Система материальных точек. Центр масс (инерции). Аддитивность массы в нерелятивистской механике.

2. Полный импульс системы материальных точек.
3. Закон сохранения импульса. Внутренние и внешние силы.
4. Теорема о движении центра масс. Система центра масс.

II. Работа и энергия

5. Механическая работа. Мощность.
6. Кинетическая энергия частицы и системы частиц.
7. Консервативные, неконсервативные и гироскопические силы.

Система материальных точек

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек с заданными массами m_i, где $i = 1, 2, ..., n$ - номер частицы. Состояние системы материальных точек задаётся путём определения состояния всех материальных точек, входящих в данную систему:

$$\left\{ \vec{r}_i(t), \vec{V}_i(t) \right\}$$

Центром масс (или **центром инерции**) системы материальных точек называется воображаемая точка С, которая характеризует движение системы этих точек как некого целого, и положение которой характеризуется распределением массы этой системы.

Ее **радиус-вектор** равен:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m}$$

Центр масс (инерции)

Воображаемую точку *C* с радиус-вектором

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

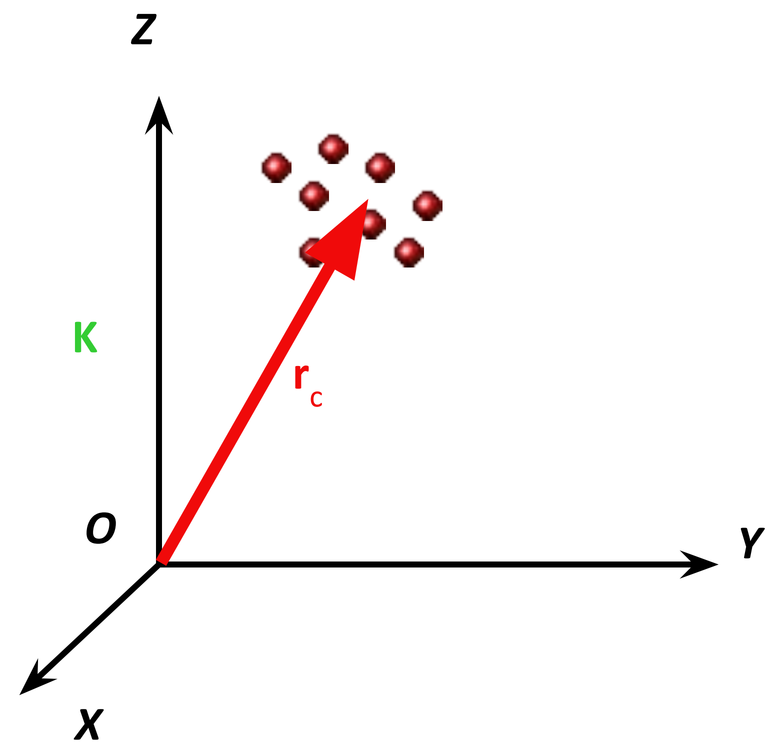
где i - номер точки,

n - количество точек,

m_i - масса i-ой точки и

m - масса всей системы точек

называют центром масс системы материальных точек



Аддитивность массы в нерелятивистской механике.

Полная масса системы материальных точек:

$$\boxed{m = \sum_{i=1}^{n} m_i}$$

в области малых скоростей $\upsilon << c$ находится путём сложения масс всех частиц систем (здесь используется аддитивность массы в нерелятивистской механики). В релятивистской механике (v ~c) масса системы частиц зависит от энергии взаимодействия между частицами, поэтому последняя формула не справедлива.

Скорость центра масс системы материальных точек

Взяв производную $\vec{r}_c$ по времени, получим скорость центра масс:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

$$\boxed{\vec{\upsilon}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i}$$

где $\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{\upsilon}_i$ **- скорость i-ой материальной точки системы**

Отметим, что из формулы в красной рамке следует

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = m\vec{\upsilon}_c$$

Полный импульс системы материальных точек (частиц)

В нерелятивистской механике **полный импульс системы материальных точек** равен сумме импульсов всех частиц системы:

$$\boxed{\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i}$$

где $\vec{p}_i = m_i \vec{\upsilon}_i$ - импульс *i*–ой частицы.

Так как $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = m \vec{\upsilon}_c$, где $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$, $\vec{\upsilon}_c$ - скорость ц.м.

то импульс системы частиц можно определить по формуле:

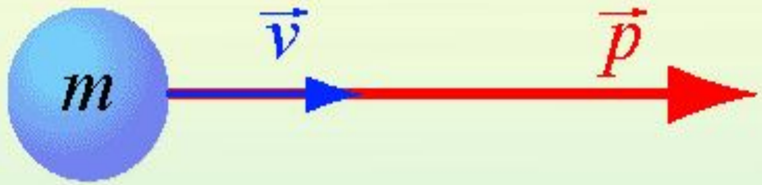
$$\boxed{\vec{p} = m \vec{\upsilon}_c}$$

$$\vec{p}_c = m\vec{\upsilon}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i$$ **- импульс центра масс**

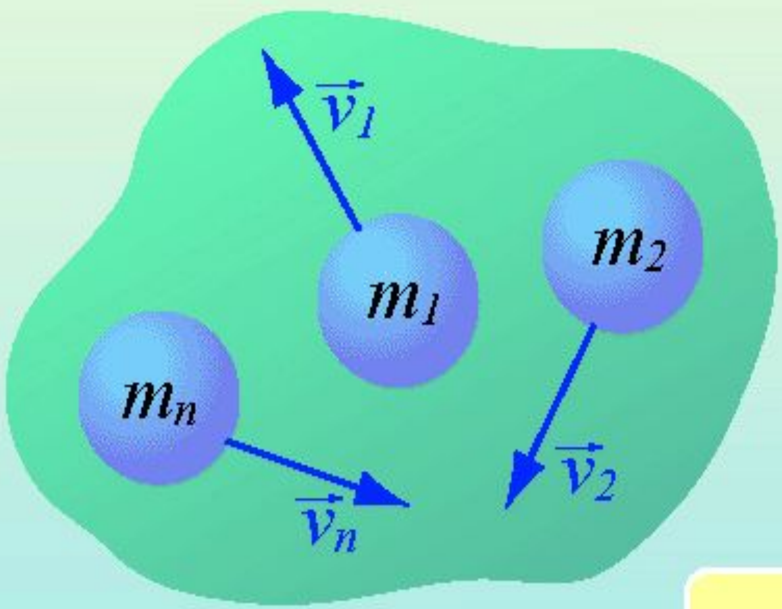
Импульс системы материальных точек (импульс центра масс) равен произведению массы системы на скорость ее центра масс.

Таким образом, связь импульса p_c со скоростью υ_c такая же, как для материальной точки с массой m (масса системы).

Импульс тела – *мера механического движения*



$$\vec{p} = m\vec{v}$$



$$\vec{p}_{сист} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$$

$$\vec{p}_{сист} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n$$

Основное уравнение динамики поступательного движения произвольной системы частиц

Тела, не входящие в состав рассматриваемой системы, называют внешними телами, а силы, действующие на систему со стороны этих тел – внешними силами. Силы взаимодействия между телами внутри системы, называют внутренними силами.

Результирующая всех внутренних сил действующих на i-ое тело:

$$\vec{F}_i^{\text{внутр.}} = \sum_{k \neq i}^{n} \vec{F}_{ik} = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \ldots + \vec{F}_{in},$$

где $k \neq i$, т.к. *i*-ая точка не может действовать сама на себя.

Обозначим $\vec{F}_i^{внеш.}$ – результирующая всех внешних сил приложенных к i-ой точке системы.

По второму закону Ньютона можно записать систему уравнений:

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\vec{\upsilon}_1\right)=\vec{F}_1^{внеш.}+\vec{F}_{12}+\vec{F}_{13}+\ldots+\vec{F}_{1n},$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_2\vec{\upsilon}_2\right)=\vec{F}_2^{внеш.}+\vec{F}_{21}+\vec{F}_{23}+\ldots+\vec{F}_{2n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_n\vec{\upsilon}_n\right)=\vec{F}_n^{внеш.}+\vec{F}_{n1}+\ldots+\vec{F}_{n,n-1}.$$

Сложим эти уравнения и сгруппируем попарно силы $\vec{F}_{ik}$ *и* $\vec{F}_{ki}$:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\vec{\upsilon}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{\mathrm{F}}_i^{\text{внеш.}}+\left(\vec{\mathrm{F}}_{12}+\vec{\mathrm{F}}_{21}\right)+\ldots+\left(\vec{\mathrm{F}}_{n-1,n}+\vec{\mathrm{F}}_{n,n-1}\right).$$

По третьему закону Ньютона $\vec{F}_{ik}=-\vec{F}_{ki}$ *, поэтому все выражения в скобках в правой части уравнения равны нулю. Тогда получаем:*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{\upsilon}_i\right)=\frac{d\vec{p}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\,внеш.}.$$

Вектор $\vec{F}^{\,внеш}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\,внеш.}$ *– суммарный(результирующий) вектор всех внешних сил, тогда:*

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}^{\,внеш}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Скорость изменения импульса системы равна векторной сумме всех внешних сил, действующих на эту систему.

Это уравнение называют ***основным уравнением динамики поступательного движения системы тел.*** Так как импульс системы $\vec{p} = m\vec{\upsilon}_c$ то:

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{\upsilon}_c\right) = \vec{F}$$

Наконец, можно записать ***основное уравнение динамики поступательного движения системы тел*** в виде:

$$\boxed{m\vec{a}_c = \vec{F}}$$

где $\vec{a}_c$ ***– ускорение центра масс.***

Центр масс механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы, и на которую действует сила, равная векторной сумме внешних сил, приложенных к системе:

$$m\vec{a}_c = \vec{F}$$

Это утверждение представляет собой **теорему о движении центра масс.**

Закон сохранения импульса

Механическая система называется ***замкнутой*** *(или изолированной), если на неё не действуют внешние силы, т.е. она не взаимодействует с внешними телами или* $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,внеш.} = 0.$

Строго говоря, каждая реальная система тел всегда не замкнута, т.к. подвержена, как минимум воздействию гравитационных сил. Однако если внутренние силы гораздо больше внешних, то такую систему можно считать замкнутой (например – Солнечная система).

Для замкнутой системы равнодействующий вектор внешних сил тождественно равен нулю:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \equiv 0$$

отсюда $\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = m\vec{v}_c = const.$

Это есть **закон сохранения импульса**: ***импульс замкнутой системы не изменяется во времени.***

Так как импульс системы тел может быть представлен в виде произведения суммарной массы тел на скорость центра инерции:

$\vec{p} = m\vec{\upsilon}_c$ то :

$$\boxed{m\vec{\upsilon}_c = const}$$

При любых процессах, происходящих в замкнутых (изолированных) системах, скорость центра масс сохраняется неизменной.

Закон сохранения импульса является одним из основных законов природы. Он был получен как следствие законов Ньютона, но он справедлив и для микрочастиц и для релятивистских скоростей, когда $\upsilon \approx c$.

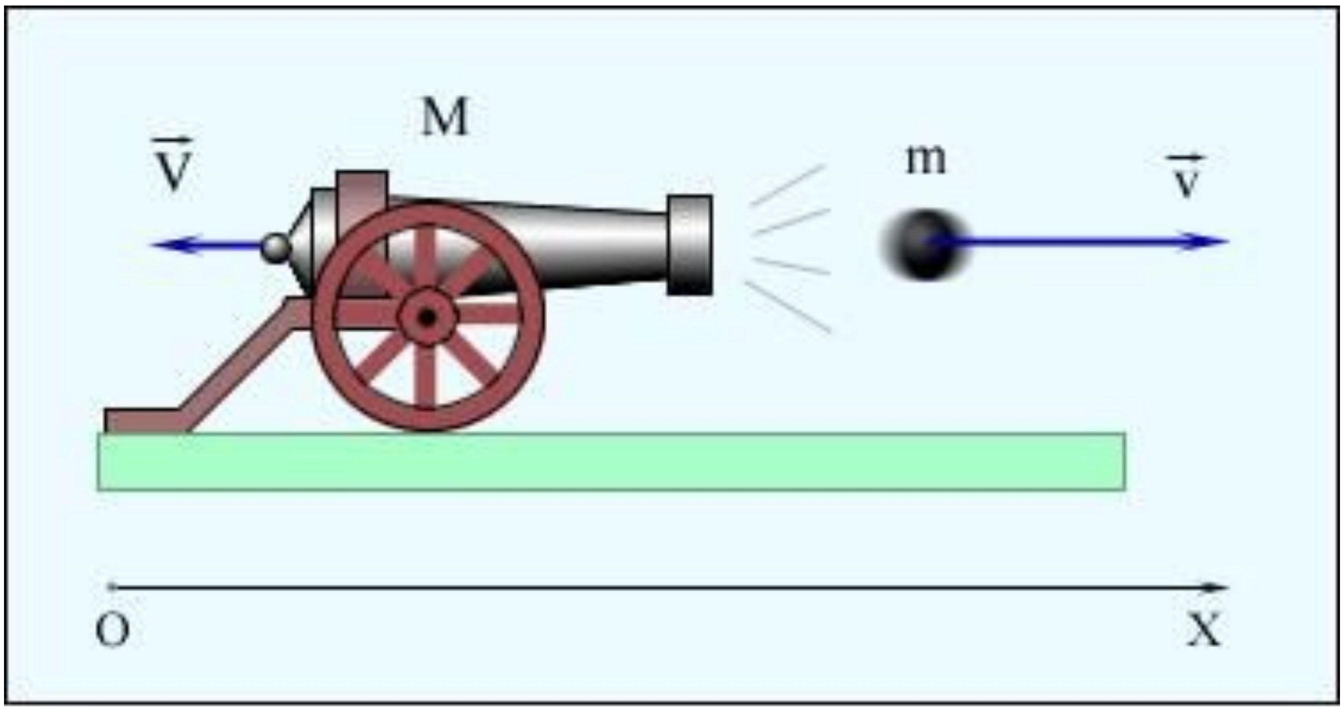
Система центра масс

Система отсчёта, движущаяся со скоростью центра масс, называется системой центра масс(с.ц.м). В этой системе отсчёта начало системы координат помещается в центр масс, поэтому $\vec{r}_c = 0$,

следовательно, $$\vec{\upsilon}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = 0$$

Это означает, что полный импульс системы частиц равен нулю, и наблюдается только относительное движение частиц, поэтому она удобна для анализа столкновения частиц.

При стрельбе из орудия возникает **отдача** – снаряд движется вперед, а орудие – откатывается назад. Снаряд и орудие – два взаимодействующих тела. Скорость, которую приобретает орудие при отдаче, зависит только от скорости снаряда и отношения масс.



$$M\vec{V} + m\vec{v} = M\vec{V}_0 + m\vec{v}_0 = 0$$ т.к. $\vec{V}_0 = \vec{v}_0 = 0$ $$\vec{v} = -\frac{M\vec{V}}{m}$$

Механическая работа. Мощность.

Изменение механического движения тела вызывается силами, которые действуют на него со стороны других тел. Чтобы количественно характеризовать процесс обмена энергии между взаимодействующими телами, в механике вводится понятие ***работы силы****.*

Если тело движется ***прямолинейно*** *и на него действует постоянная сила* $\vec{F}$, *которая составляет некоторый угол* α *с направлением перемещения, то работа этой силы равна произведению проекции силы* F_s $\left(F_s = F\cos\alpha\right)$ *на перемещение точки приложения силы*

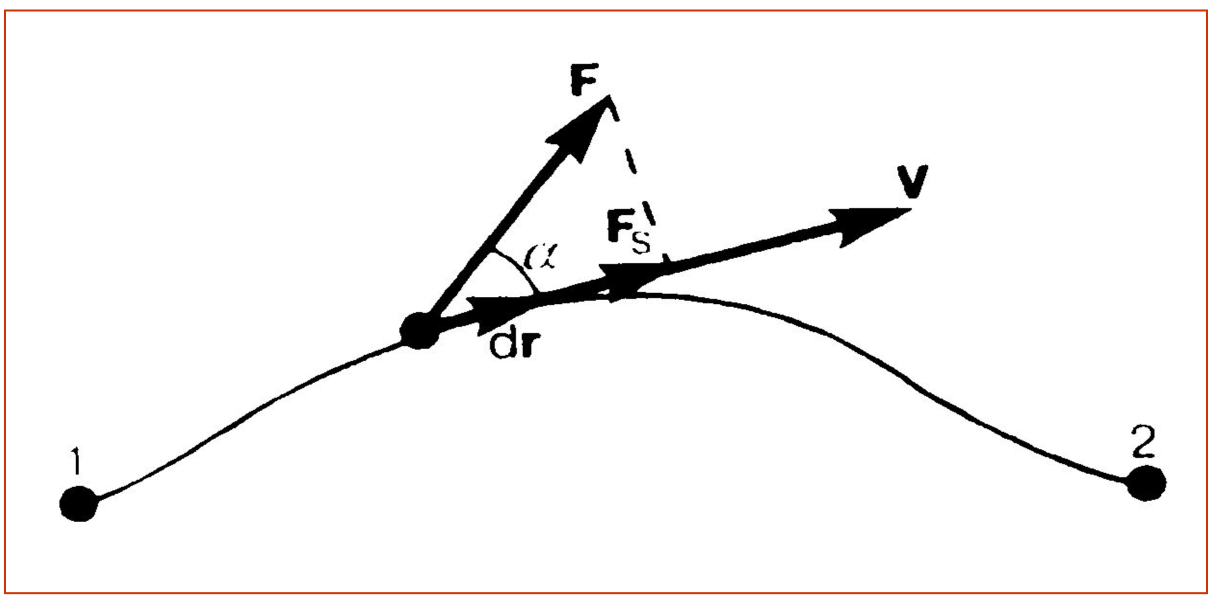
$$A = F_s s = Fs\cos\alpha$$

В общем случае сила может изменяться как по модулю, так и по направлению.

Если рассматривать элементарное перемещение $d\vec{r}$*, то силу* $\vec{F}$ *можно считать постоянной, а движение точки – прямолинейным.*

Элементарная работа силы $\vec{F}$ ***на перемещении*** $d\vec{r}$ ***равна скалярному произведению****:*

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = F\cos\alpha \cdot ds = F_s \cdot ds$$



где

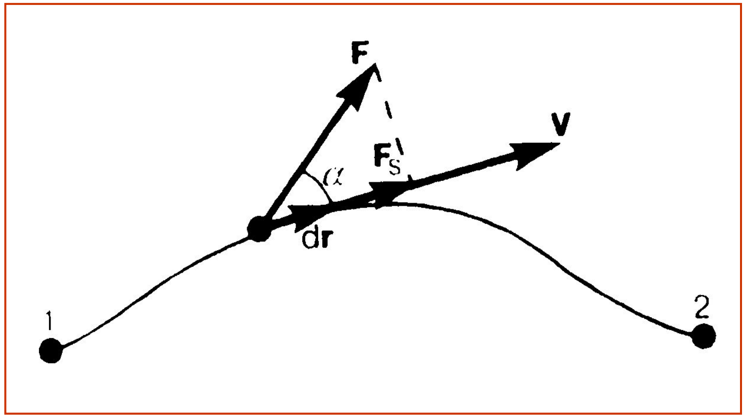
α *- угол между векторами* $\vec{F}$ *и* $d\vec{r}$

$ds = |d\vec{r}|$ *-элементарный путь*

F_s *- проекция вектора силы на* $d\vec{r}$ *перемещение*

Работа силы на участке траектории от точки 1 до точки 2 равна алгебраической сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути.

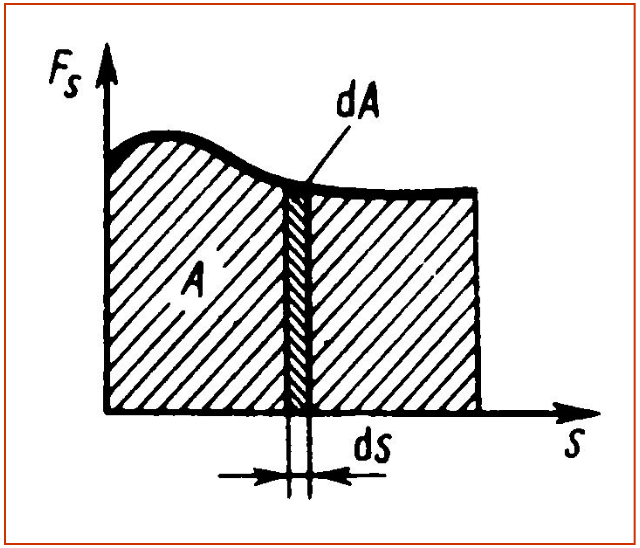
Эта сумма равна определенному интегралу:



$$A = \int_1^2 F \cos\alpha \, ds = \int_1^2 F_s \, ds$$

Для вычисления этого интеграла надо знать зависимость силы F_s *от пути* S *вдоль траектории 1-2.*

Если такая зависимость представлена графически, тогда искомая работа численно равна площади фигуры между осью S *и кривой* $F_s(S)$.



Если, например, ***тело движется прямолинейно****, сила*

$$F = const \quad \text{и} \quad \alpha = const \quad ,$$

то интеграл легко определяется:

$$A = \int_1^2 F ds \cos\alpha = F\cos\alpha \int_1^2 ds = Fs\cos\alpha$$

где S *- пройденный путь.*

Как следует из определения работы при:

1) $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$ *работа силы положительна.*

2) $\alpha > \dfrac{\pi}{2}$ *работа силы отрицательна.*

3) $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ *работа силы равна нулю, так как вектор силы перпендикулярен вектору перемещения.*

Единица работы **– джоуль [Дж]**

1Дж = 1Н·м

Чтобы охарактеризовать скорость совершения работы, вводят понятие ***мощности***

$$N = \frac{dA}{dt}$$

За время dt *сила* $\vec{F}$ *совершает работу* $\vec{F}d\vec{r}$, *и мощность, развиваемая этой силой в данный момент времени:*

$$N = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

то есть равна скалярному произведению силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения силы.

Мощность N - величина скалярная.

Единица мощности – **ватт [Вт]** 1Вт = 1Дж/с

Математическая справка

Нахождение определенного интеграла:

$$F = \int_0^a kx^n dx = \left| k\frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_0^a = k\left(\frac{a^{n+1}}{n+1} - 0\right)$$

где $k = const$

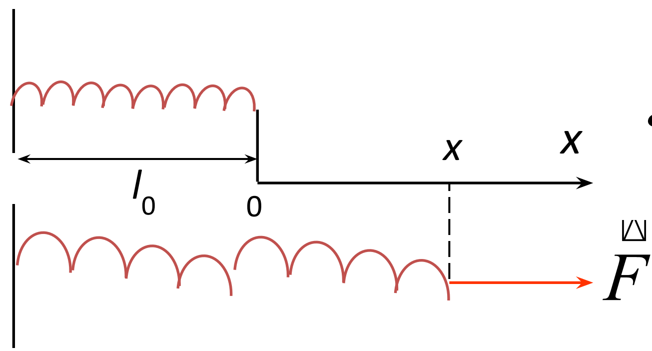
x^n - *степенная функция с показателем степени* $\boldsymbol{n}$

0 *и* $\boldsymbol{a}$ – *пределы интегрирования*

Примеры вычисления работы

Пример . ***Рассмотрим в качестве примера работу, совершаемую при деформации пружины.***

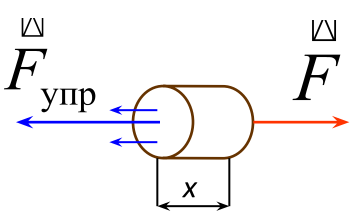
В случае упругой деформации пружины $F = k \cdot x$



где F – *приложенная сила,*

x – *деформация пружины*

Сила упругости пропорциональна деформации:



$$F_{упр} = -F = -kx.$$

где F_x *- проекция силы упругости на ось* x *;*

k *- коэффициент упругости (для пружины – жесткость), а знак минус указывает, что сила направлена в сторону, противоположную деформации.*

Элементарная работа dA *, совершаемая силой при бесконечно малой деформации* dx*, равна:*

$$dA = F_x dx = kxdx$$

Полная работа *силы* F_x *равна:*

$$A = \int_0^x kxdx = \frac{kx^2}{2}$$

Кинетическая энергия частицы.

Кинетическая энергия механической системы – это энергия механического движения этой системы.

Имеем покоящееся тело. На него действует сила $\vec{F}$, под действием которой тело начинает двигаться.

При этом сила совершает работу, а ***энергия движущегося тела возрастает на величину затраченной работы.***

Работа dA силы $\vec{F}$ на пути, который тело прошло за время возрастания скорости от 0 до $\vec{V}$, идет на увеличение кинетической энергии. Покажем это.

Работа силы на конечном перемещении:

$$\underset{1-2}{A}\left(\vec{F}\right) = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F} d\vec{S}$$

Элементарная работа суммы сил $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$ **:**

$$dA\left(F\right) = dA_1 + dA_2 + ... + dA_n$$

Работа суммы сил: $A_{1-2}\left(\vec{F}\right) = \sum_{i=1}^{n} A_{1-2}\left(\vec{F}_i\right),$ ***то есть***:

$$\underset{1-2}{A}\left(\vec{F}\right) = \int_1^2 \vec{F} d\vec{S} = \int_1^2 \frac{d\vec{P}}{dt} \vec{V} dt \cdot$$

$$A_{1-2}(\vec{F}) = \int_1^2 \vec{F} d\vec{S} = \int_1^2 \frac{d\vec{P}}{dt} \vec{V} dt \cdot$$

Здесь $d\vec{S} = \vec{V} dt$ $\quad \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ или

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{P}) = \frac{d}{dt}(m\vec{V}) = m\frac{d\vec{V}}{dt}$$

Полная работа *определяется следующим выражением:*

$$A_{1-2}(\vec{F}) = m\int_1^2 \vec{V} d\vec{V} = m\int_{V_1}^{V_2} V dV = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2}$$

Выражение $\frac{mV^2}{2} = K$ ***кинетическая энергия***

Полная работа связана с изменением кинетической энергии следующим образом:

$$\underset{1-2}{A}\left(\vec{F}\right) = K_2 - K_1$$

Работа <u>всех сил</u>, действующих на тело, равна приращению кинетической энергии этой системы.

Полученную формулу можно записать компактно:

$$A = \Delta K \quad \text{или} \quad \mathrm{d}K = \mathrm{d}A.$$

Последнее выражение можно озвучить так:

Изменение кинетической энергии **dK** ***равно работе внешних сил*** $\mathrm{d}A$.

Важно отметить, что ***приращение кинетической энергии определяется работой не только внешних, но и внутренних сил.***

Кинетическая энергия зависит от массы и скорости тела .

Говорят : ***кинетическая энергия системы есть функция состояния движения.***

В разных инерциальных системах отсчета, движущихся относительно друг друга, скорость тела, а ,следовательно, и его кинетическая энергия будут неодинаковы.

Таким образом, ***кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчета.***

Из теоремы Кенинга следует

В системе центра масс: $\vec{V}_c' = 0$

$$\boxed{K = K' + \frac{MV_0^2}{2}}$$

Кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии всей массы системы, мысленно сосредоточенной в её центре масс и движущейся вместе с ним, и кинетической энергии той же системы в её относительном движении по отношению к центру масс.

Консервативные и неконсервативные силы.

Консервативными называются силы, ***работа которых не зависит от того, по какой траектории произошло перемещение тела, а зависит только от его начального и конечного положений.*** Примеры таких сил : ***упругие силы и гравитационные силы***. Работа упругих сил была рассмотрена ранее.

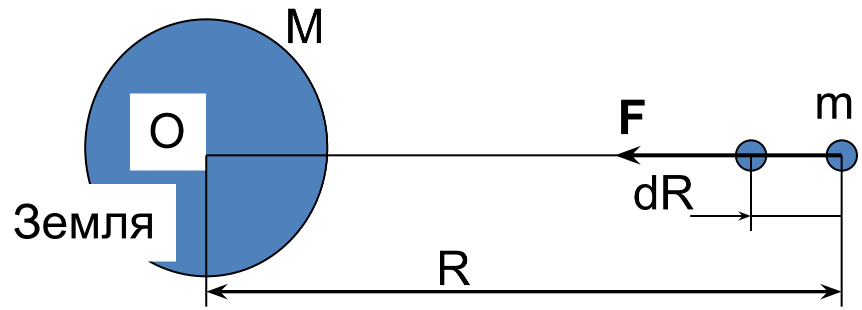
Определим ***работу, совершаемую силой тяготения*** при перемещении ею материальной точки массой m .

На расстоянии R на данное тело действует сила:

$$F = G\frac{Mm}{R^2}$$

При перемещении этого тела на расстояние dR совершается работа

$$dA = -G\frac{mM}{R^2}dR$$



(направления силы F и положительного перемещения dR обратны)

Если тело перемещать с расстояния R_1 до R_2, то работа

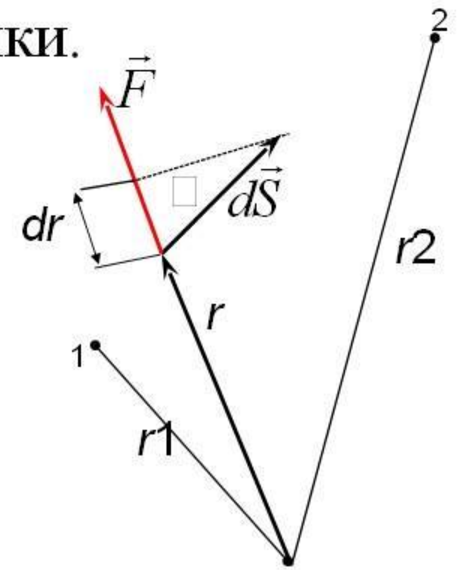
$$A_{12} = \int_{R_1}^{R_2} dA = -\int_{R_1}^{R_2} G\frac{mM}{R^2}dR = m\left(\frac{GM}{R_2} - \frac{GM}{R_1}\right)$$

Из полученного выражения видно, что ***работа зависит только от начального и конечного положения тела.***

Сила тяготения является *центральной силой*. ***Сила называется <u>центральной</u>, если она направлена к одной и той же точке (или от нее) и зависит от расстояния до этой точки, которая называется силовым центром.***

*(*Центральной силой является также сила Кулона*)*.

Можно показать, что работа ***центральной силы*** зависит только от начального и конечного положения материальной точки.



Из рисунка видно, что

dA = dS F(r) cosα = F(r) dS cosα =

= F(r) dr

Итак

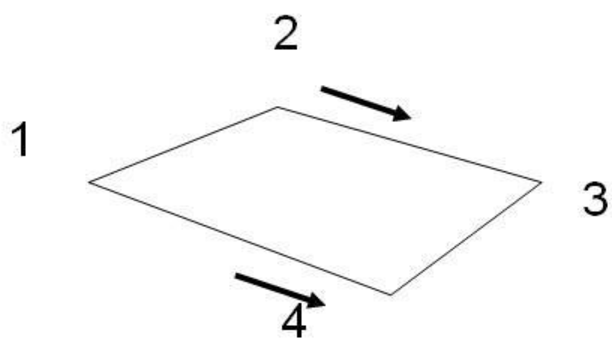
$$dA = F(r)\,dr$$

Окончательно полная работа:

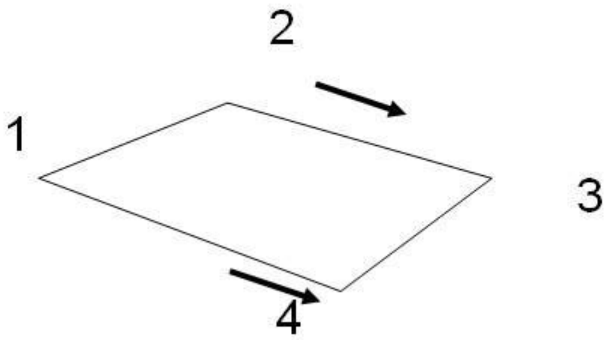
$$A_{1-2}\left(\vec{F}\right) = \int_{r_1}^{r_2} F\left(r\right) dr.$$

Так как по определению величина центральной силы есть функция только расстояния r, то значение определённого интеграла будет зависеть только от величин $r1$ и $r2$, и не будет зависеть от формы траектории.

Можно дать *другое определение консервативной силы.* Рассмотрим перемещение частицы из положения 1 в положение 3 под действием консервативной силы $\vec{F}$.



Работа, совершаемая при этом силой $\vec{F}$, не зависит от траектории, то есть:



Тогда *работа по замкнутой траектории*:

$$A_{12341}(\vec{F}) = A_{123}\left(\vec{F}\right) + A_{341}\left(\vec{F}\right).$$

Но так как:

$$A_{341}\left(\vec{F}\right) = -A_{143}\left(\vec{F}\right) = -A_{123}\left(\vec{F}\right).$$

Получим

$$A_{12341}(\vec{F}) = A_{123}\left(\vec{F}\right) + A_{341}\left(\vec{F}\right) =$$

$$= A_{123}\left(\vec{F}\right) - A_{123}\left(\vec{F}\right) = 0.$$

Отсюда следует еще одно определение консервативных сил: ***работа консервативных сил по любой замкнутой траектории равна нулю.***

Математическая запись этого утверждения может быть представлена, исходя из определения работы, следующим образом:

$$\oint_S \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = A_{12} + A_{21} = A_{12} - A_{12} = 0$$

Интеграл по замкнутому контуру S : $\oint_S \vec{\mathrm{F}}\mathrm{d}\vec{r}$

называется циркуляцией вектора $\vec{\mathrm{F}}$.

Введение нового математического понятия векторного анализа позволяет дать еще одно определение консервативной силы:

Если циркуляция какого-либо вектора силы равна нулю, то эта сила консервативна.

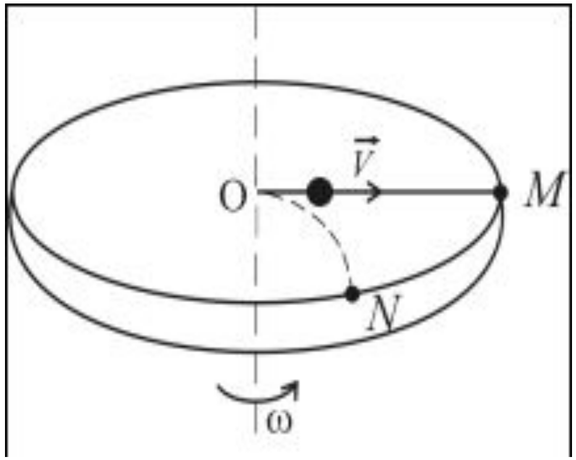
Неконсервативные силы. К ним относятся прежде всего, так называемые, ***диссипативные*** силы: трение, сила вязкого сопротивления. Эти силы ***зависят не только от конфигурации тел, но и от относительных скоростей движения.***

Сила трения направлена против скорости тела, поэтому ***работа сил трения отрицательна***.

Отсюда определение:

Диссипативными называются такие силы, полная работа которых при любых движениях в замкнутой системе всегда отрицательна.

Еще один вид неконсервативных сил ***гироскопические силы.*** Эти силы ***зависят от скорости материальной точки и перпендикулярны к этой скорости. Работа таких сил равна Нулю. Примером таких сил является сила Кореолиса***



По определению, элементарная работа dA ***силы Кориолиса Fк***:

$$dA = \vec{F}_K d\vec{S} = F_K dS \cdot \mathrm{Cos}\,\alpha = 0$$

так как $\mathrm{Cos}\,\alpha = 0$, поскольку $\alpha = \frac{\pi}{2}$