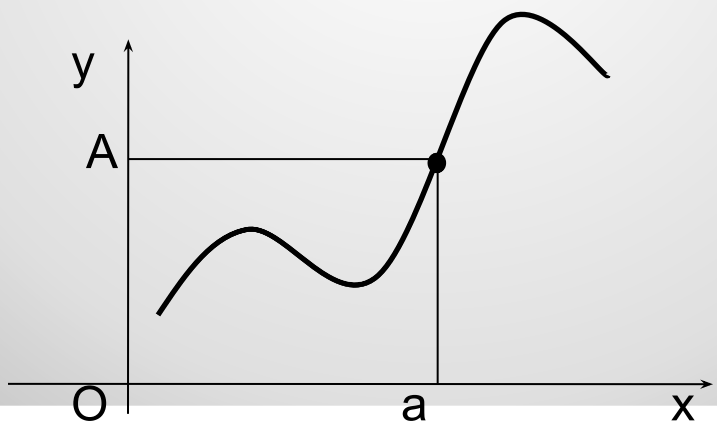
Непрерывность функции

Непрерывность функции в точке

- Функция *f* (*x*), определенная в некоторой окрестности точки *a*, называется ***непрерывной*** в этой точке, если предел функции в точке *a* равен значению функции в точке *a*

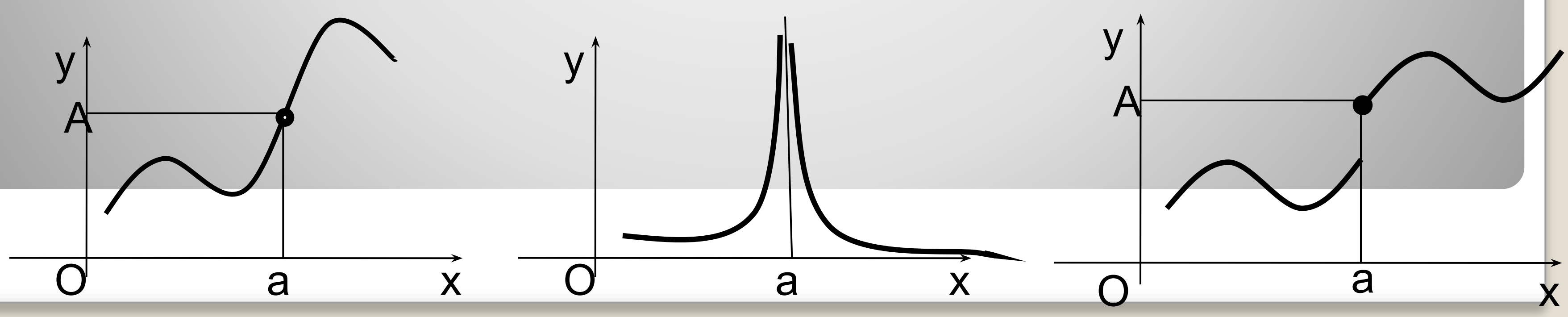


$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Точка разрыва функции

- Пусть функция определена в некоторой окрестности точки *a*, быть может, за исключением самой точки *a*.

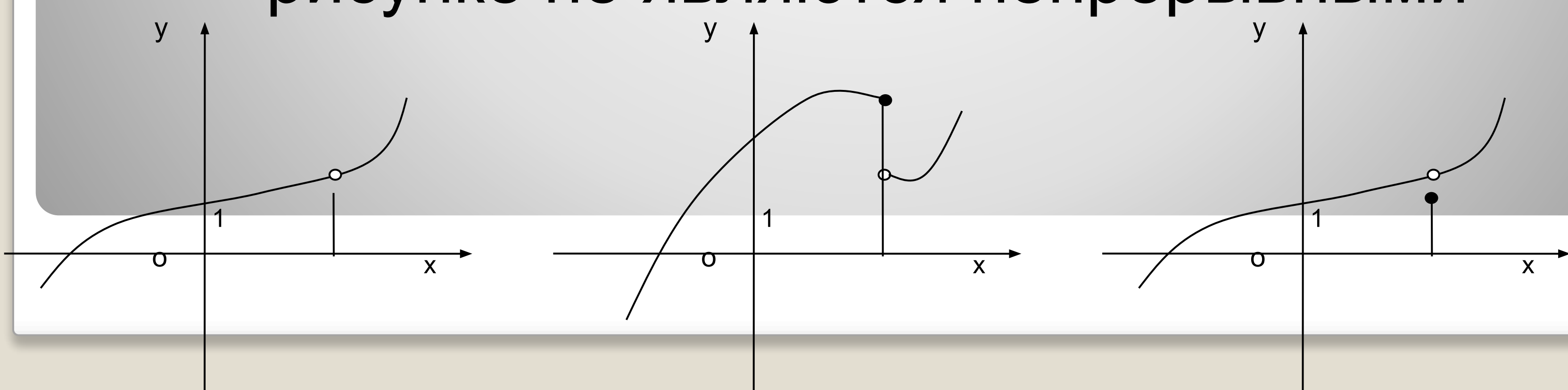
- Точка *a* называется ***точкой разрыва***, если эта функция либо не определена в точке *a*, либо определена, но не является непрерывной в точке *a*.



Таким образом, можно сказать, что функция непрерывна в точке а, если выполнены 3 условия:

1. Функция определена в точке *a* и в некоторой её окрестности;
2. Функция имеет предел при $x \to a$; $\lim f(x)=A$
3. Этот предел равен значению функции в точке *a*, т.е. $A=f(a)$.

Объясните почему функции изображённые на рисунке не являются непрерывными

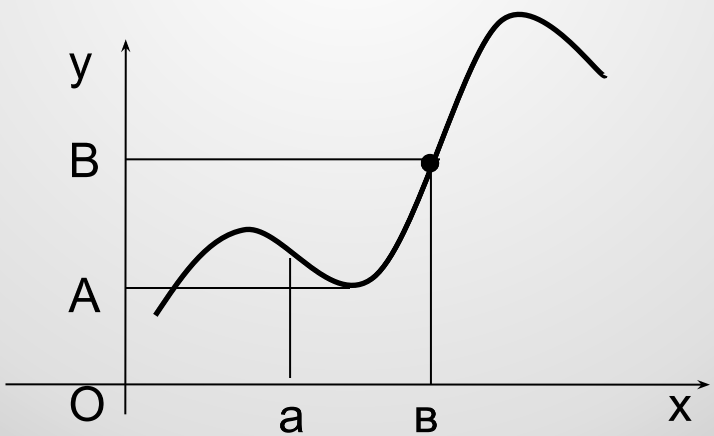


Непрерывность функции на отрезке

- Функцию $f\,(x)$ называют ***непрерывной на отрезке*** $[a;\ b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала $(a;\ b)$ и, кроме того, непрерывна справа в точке a и слева в точке b.

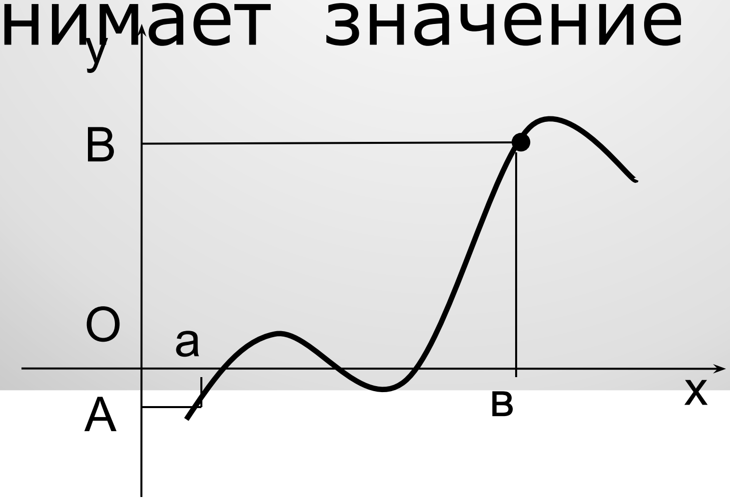
Теорема Вейерштрасса.

- Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на этом отрезке и достигает своего наибольшего и наименьшего значения.
-



Теорема Коши.

- Если функция $f\,(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\,b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то на отрезке $[a;\,b]$ имеется хотя бы один нуль функции f. При этом, если функция строго монотонна на этом отрезке, то она принимает значение 0 лишь один раз.



Теорема о промежуточных значениях.

- Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f(a) \neq f(b)$, то для каждого значения y, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, найдется точка (и возможно, не одна) такая, что $f(x) = C$.

Установите непрерывность функции на интервале (-∞;+∞)

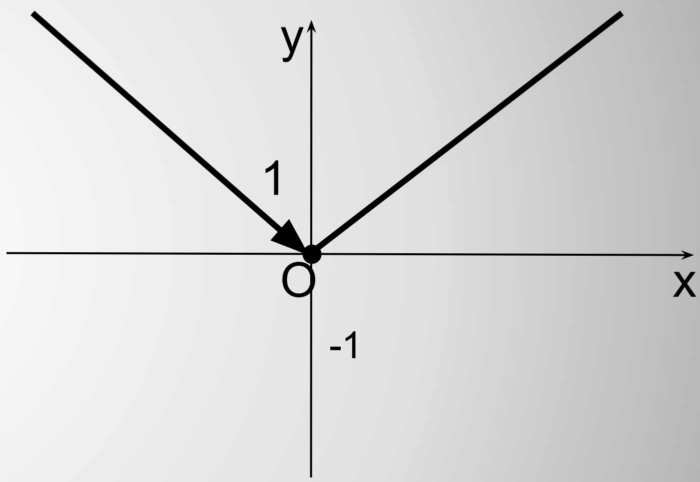
$$f(x)=\begin{cases}-x, \text{ если } x<0,\\ x, \text{ если } x\geq 0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+} x=0$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(-x)=0$$

$$f(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)=f(0)$$



Функция непрерывна на (-∞;+∞).

Установите непрерывность функции на интервале (-∞;+∞)

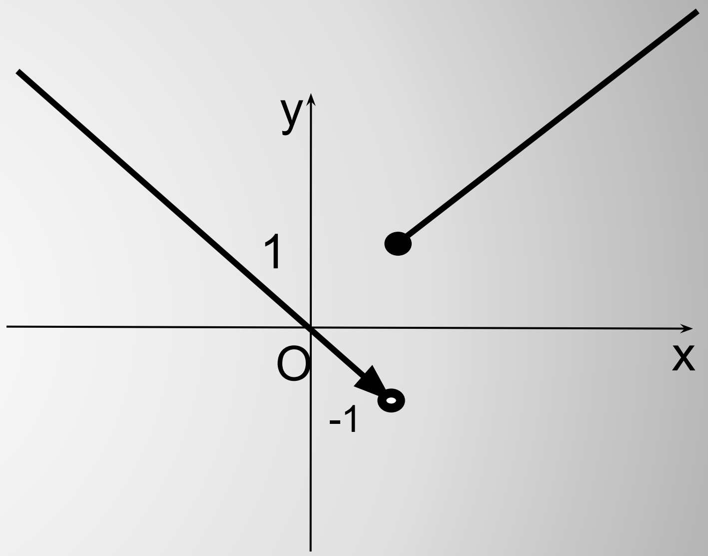
$$f(x)=\begin{cases} -x, \ если\ x<1, \\ x, если\ x\geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+} x=1$$

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(-x)=-1$$

$$f(1)=1$$

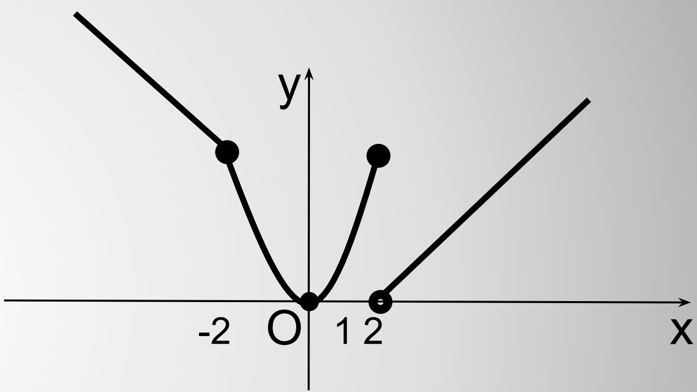
$$\lim_{x\to 1+} f(x)\neq \lim_{x\to 1-} f(x)$$



Функция не является непрерывной на (-∞;+∞).
Разрыв в точке x=1

Установите непрерывность функции на интервале (-∞;+∞)

$$f(x)=\begin{cases}-x+2,\ если\ x<-2,\\ x^2,\ если -2\le x\le 2,\\ x-2,\ если\ x>2\end{cases}$$



$$\lim_{x\to -2+} f(x)=\lim_{x\to -2+} x^2=4$$

$$\lim_{x\to -2-} f(x)=\lim_{x\to -2-}(-x+2)=4$$

$$f(-2)=4$$

$$\lim_{x\to -2+} f(x)=\lim_{x\to -2-} f(x)=f(-2)$$

Функция непрерывна в точке x=-2

$$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}(x-2)=0$$

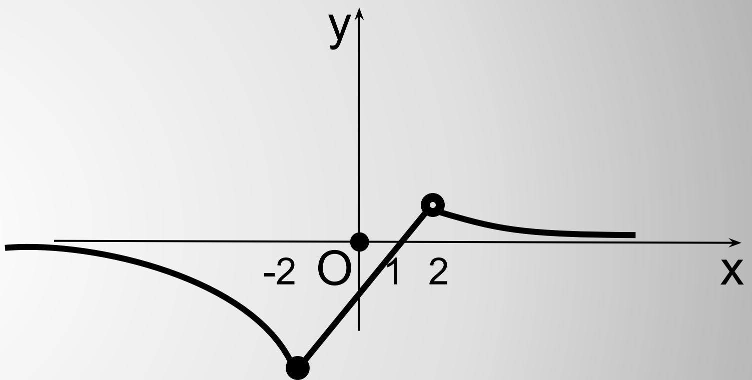
$$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-} x^2=4$$

$$\lim_{x\to 2+} f(x)\ne\lim_{x\to 2-} f(x)$$

Функция не является непрерывной на (-∞;+∞).
Разрыв в точке x=2

Установите непрерывность функции на интервале (-∞;+∞)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6}{x},\ \text{если}\ x<-2,\\ x-1,\ \text{если}\ -2\le x<2,\\ \dfrac{1}{x-1},\ \text{если}\ \ x>2\end{cases}$$



$$\lim_{x\to -2+} f(x)=\lim_{x\to -2+}(x-1)=-3$$

$$\lim_{x\to -2-} f(x)=\lim_{x\to -2-}\frac{6}{x}=-3$$

$$f(-2)=-3$$

$$\lim_{x\to -2+} f(x)=\lim_{x\to -2-} f(x)=f(-2)$$

Функция непрерывна в точке x=-2

Разрыв в точке x=2, так как функция в точке x=2 не определена.

Функция не является непрерывной на (-∞;+∞).

Установите непрерывность функции на интервале (-∞;+∞)

$$f(x)=\begin{cases}x^2-3x+5,\ если\ x>2\\ 4x-5,\ если\ x<2\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}x+3,\ если\ x<-1\\ x^2-x,\ если\ -1\le x\le 3\\ -2x+6,\ если\ x>3\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+4,\ если\ x<-2\\ -x^2+9,\ если\ -2<x<2\\ 2x+1{,}5,\ если\ x\ge 2\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}-0{,}9x-5{,}4,\ если\ x\le -3\\ 4-x^2,\ если\ -3<x\le 2\\ 2{,}5x-5,\ если\ x\ge 2\end{cases}$$