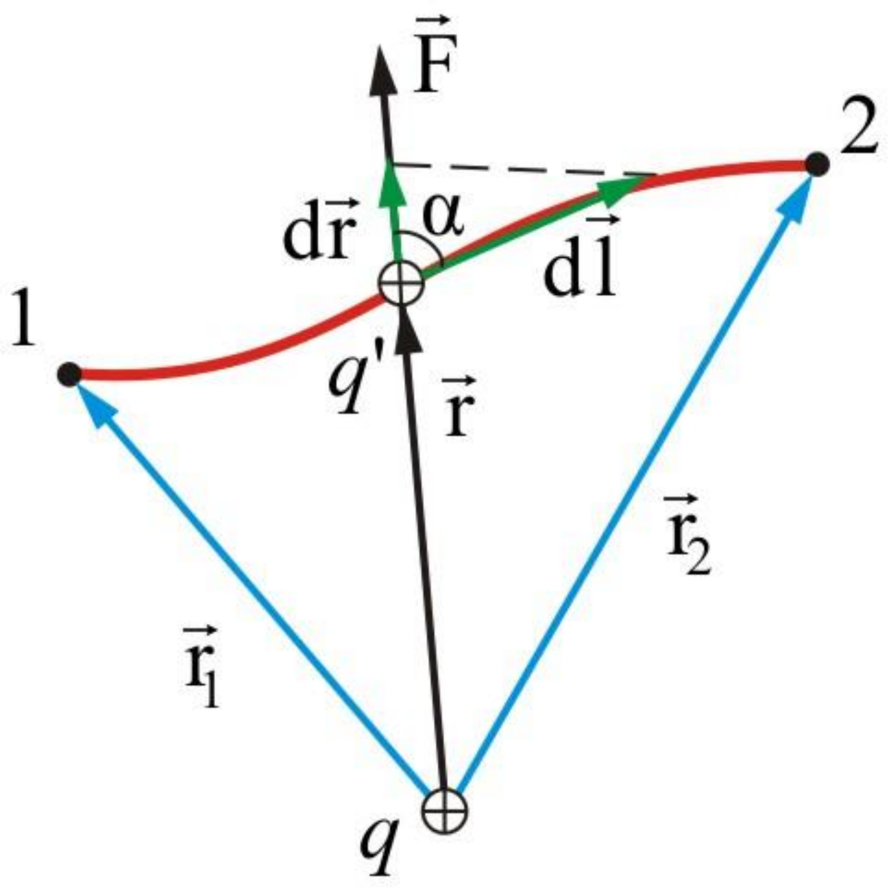
Тема 3. ПОТЕНЦИАЛ И РАБОТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ. СВЯЗЬ НАПРЯЖЕННОСТИ С ПОТЕНЦИАЛОМ

3.1. Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$
3.2. Работа сил электростатического поля. Потенциальная энергия
3.3. Потенциал. Разность потенциалов
3.4. Связь между напряженностью и потенциалом
3.5. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности
3.6. Расчет потенциалов простейших электростатических полей

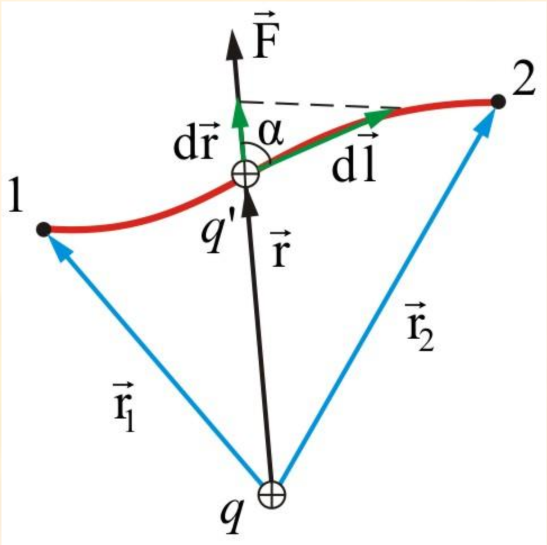
3.1. Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$



- Рассмотрим поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом q.
- В любой точке этого поля на пробный точечный заряд q' действует сила F

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q||q'|}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = F(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

- Вычислим работу, которую совершает электростатическое поле, созданное зарядом *q* по перемещению заряда *q'* из точки 1 в точку 2.
- Работа на пути d*l* равна:



- $\mathrm{d}A = F\mathrm{d}l\cos\alpha = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{|q||q'|}{r^2}\mathrm{d}l\cos\alpha,$
- где d*r* – приращение радиус-вектора при перемещении на d*l*; $\mathrm{d}r = \mathrm{d}l\cos\alpha,$

$$\mathrm{d}A = \frac{|q||q'|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r.$$

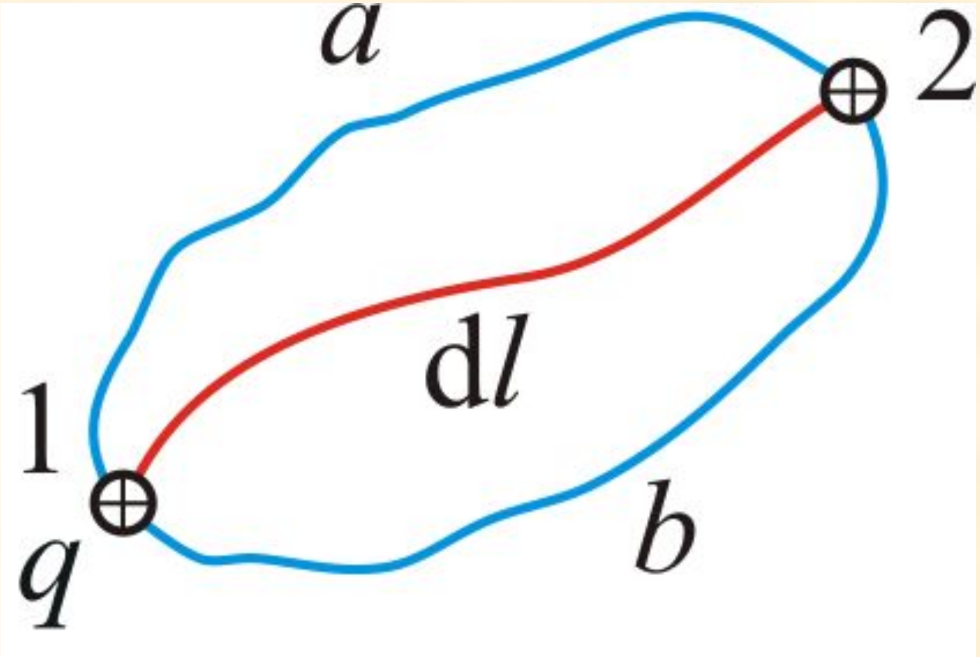
- Полная работа при перемещении из точки 1 в точку 2 равна интегралу:

$$A_{12} = \frac{|q||q'|}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{|q||q'|}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{|q||q'|}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

- Работа электростатических сил не зависит от формы пути, а только лишь от координат начальной и конечной точек перемещения. Следовательно, силы поля **консервативны**, а само поле – **потенциально**.

- Если в качестве пробного заряда, перенесенного из точки 1 заданного поля в точку 2, взять положительный единичный заряд q, то элементарная работа сил поля будет равна:

$$dA = q\vec{E}d\vec{l}.$$



- Тогда вся работа равна: $$A = q\int_1^2 \vec{E}d\vec{l}.$$
- Такой интеграл по замкнутому контуру называется **циркуляцией вектора** $\vec{E}$
- Из независимости линейного интеграла от пути между двумя точками следует, что по *произвольному замкнутому пути*:

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = 0.$$

- Это утверждение и называют **теоремой о циркуляции**.
- Линии электростатического поля не могут быть замкнутыми

3.2. Работа сил электростатического поля. Потенциальная энергия

- **Электростатическое поле потенциально, т.е. обладает потенциальной энергией**.
- Работу сил электростатического поля:

$$A_{12} = W_1 - W_2 .$$

Это выражение для работы можно переписать в виде:

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r_2} .$$

- Потенциальная энергия заряда q' в поле заряда q:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r} + \text{const.}$$

3.3. Потенциал. Разность потенциалов

- Разные пробные заряды $q', q'', \ldots$ будут обладать в одной и той же точке поля разными энергиями *W'*, *W''* и так далее.
- Однако отношение $W / q'_{\text{пр.}}$ будет для всех зарядов одним и тем же.
- Поэтому можно вести скалярную величину, являющуюся энергетической характеристикой собственно поля – **потенциал:**

$$\phi = \frac{W}{q'}.$$

- **потенциал** численно равен потенциальной энергии, которой обладает в данной точке поля единичный положительный заряд.

$$\phi = \frac{W}{q'}.$$

- потенциал точечного заряда

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}.$$

- физический смысл имеет разность потенциалов, поэтому договорились считать, что **потенциал точки, удаленной в бесконечность, равен нулю**.

- Другое определение потенциала:

$$\phi = \frac{A_\infty}{q} \quad \text{или} \quad A_\infty = q\phi$$

- потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки в бесконечность

- Если поле создается системой зарядов, то:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_k \frac{q_k q'}{r_k}.$$

- Для потенциала $\phi = \sum_k \phi_k$ или $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_k \frac{q_k}{r_k}$

- т.е. потенциал поля, создаваемый системой зарядов, равен **алгебраической** сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности.

- Работа сил электростатического поля через разность потенциалов между начальной и конечной точками:

$$A_{12} = W_1 - W_2 = \phi_1 q - \phi_2 q = q(\phi_1 - \phi_2).$$

- Работа над зарядом q равна произведению заряда на убыль потенциала:

$$A = q(\phi_1 - \phi_2) = qU,$$

где U – напряжение.

$$A = qU$$

- за единицу φ принимают потенциал в такой точке поля, для перемещения в которую из бесконечности единичного положительного заряда необходимо совершить работу равную единице.

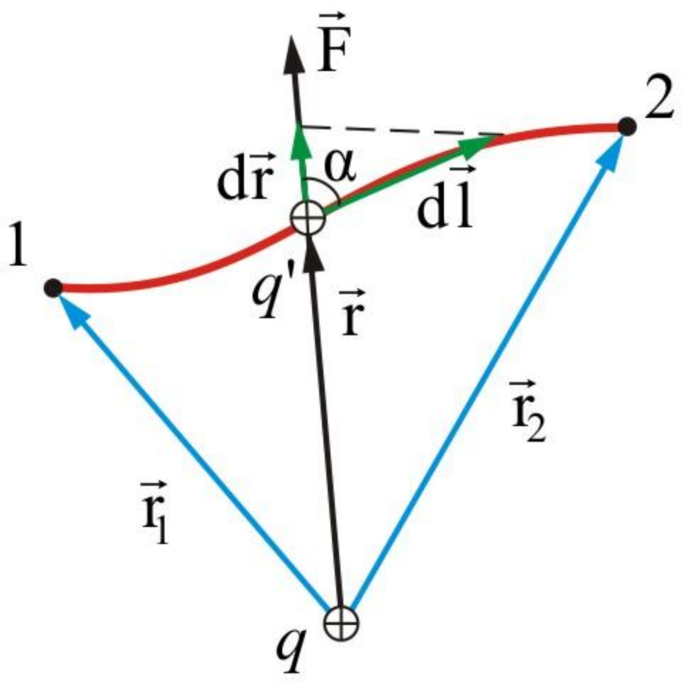
- В СИ единица потенциала $1\,\text{В} = 1\,\text{Дж}/1\,\text{Кл}$

- Электрон - вольт (эВ) – это работа, совершенная силами поля над зарядом, равным заряду электрона при прохождении им разности потенциалов 1 В, то есть:

$$1\ \text{эВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{Кл} \cdot \text{В} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж}.$$

3.4. Связь между напряженностью и потенциалом

- Работу, совершенную силами электростатического поля на бесконечно малом отрезке можно найти так:



$$\mathrm{d}A = F_l \mathrm{d}l = E_l q \mathrm{d}l,$$

$$\mathrm{d}A = -q\mathrm{d}\phi; \qquad E_l q \mathrm{d}l = -q\mathrm{d}\phi$$

$$E_l = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{dl}}.$$

- Тогда $$\boxed{\vec{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial \phi}{\partial y}\boldsymbol{j} - \frac{\partial \phi}{\partial z}\boldsymbol{k},}$$

- По определению градиента сумма первых производных от какой-либо функции по координатам есть градиент этой функции

$\operatorname{grad}\phi$ – вектор, показывающий направление наибыстрейшего увеличения функции.

$$\operatorname{grad}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi$$

$$\vec{E} = -\nabla \phi$$

- Где (набла) означает символический вектор, называемый оператором Гамильтона ∇

Знак минус говорит о том, что вектор направлен в сторону уменьшения потенциала электрического поля.

- Из условия $\vec{E} = -\nabla\phi$ следует одно важное соотношение, а именно, **величина, векторного произведения** $[\nabla, \vec{E}]$ **для стационарных электрических полей всегда равна нулю**.

- Величина $[\nabla, \vec{E}]$ называется **ротором** или **вихрем**

- **Уравнение электростатики**:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = 0$$

- Таким образом кулоновское **электростатическое поле – безвихревое.**

3.5. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

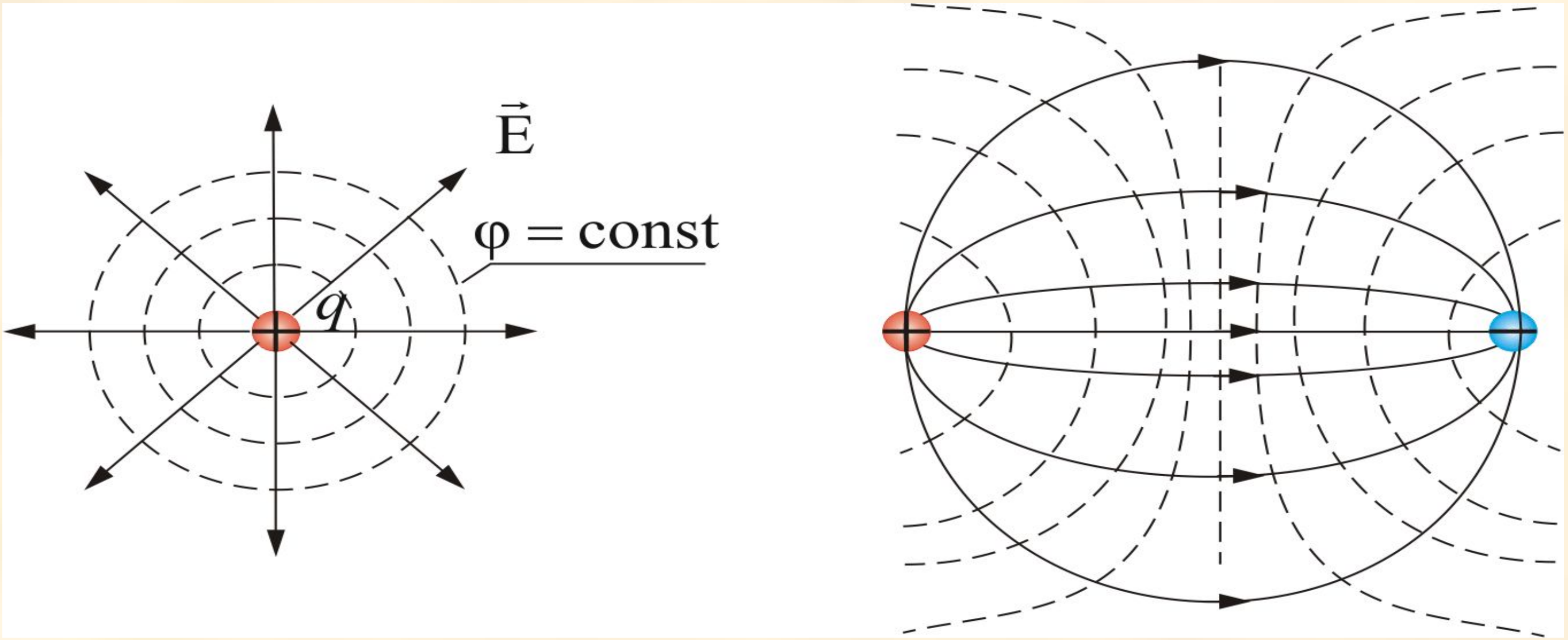
- Напряженность равна разности потенциалов U на единицу длины силовой линии.

- В однородном электрическом поле силовые линии – прямые. Поэтому здесь определить $\vec{E}$ наиболее просто:

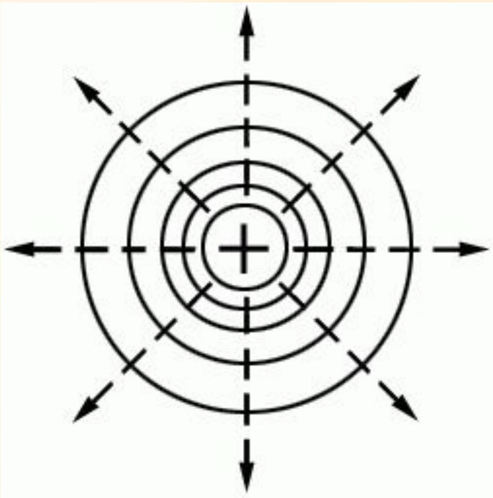
$$E = \frac{U}{l}$$

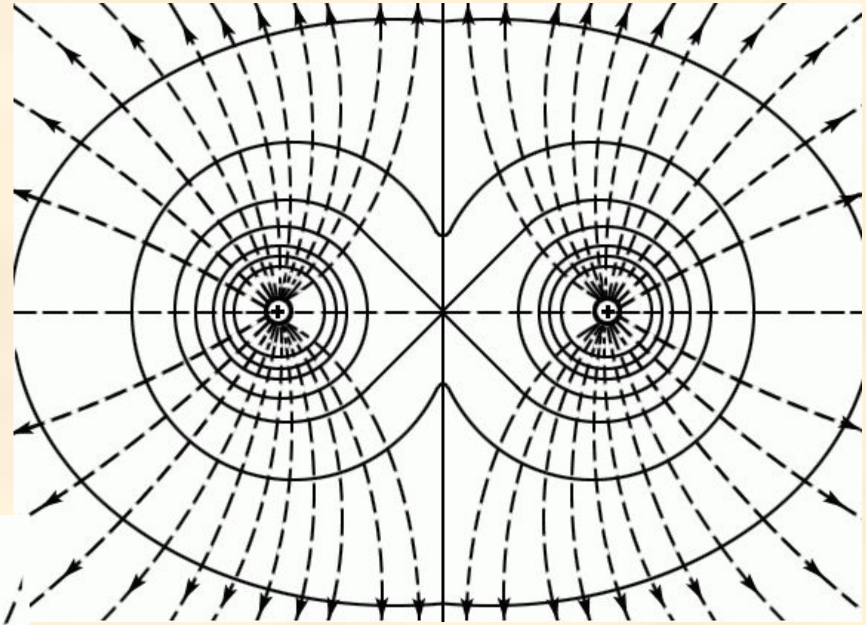
- Воображаемая поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется **эквипотенциальной поверхностью.**
- Уравнение этой поверхности

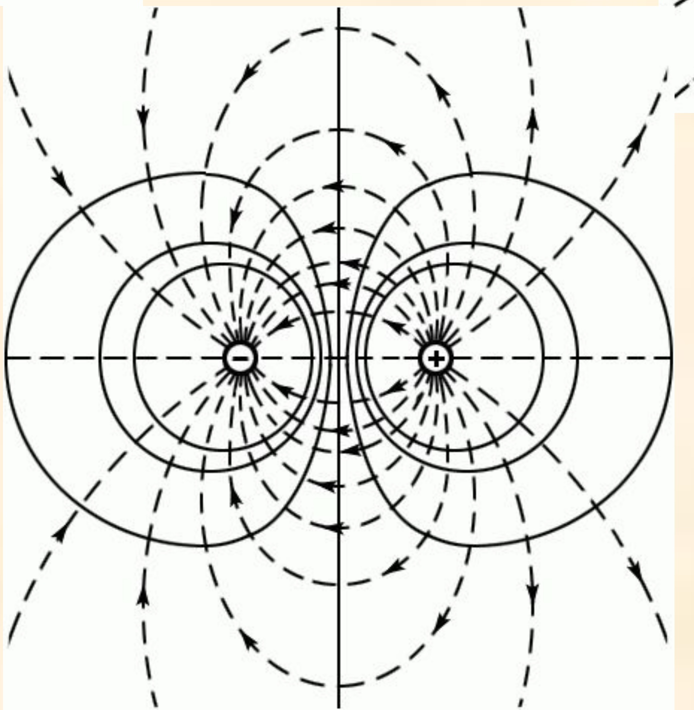
$$\phi = \phi(x, y, z) = \mathrm{const}.$$



Линии напряженности и эквипотенциальные поверхности взаимно перпендикулярны







- Можно по известным значениям φ найти напряженность поля в каждой точке.

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi$$

- или по известным значениям $\vec{E}$ в каждой точке поля найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля.

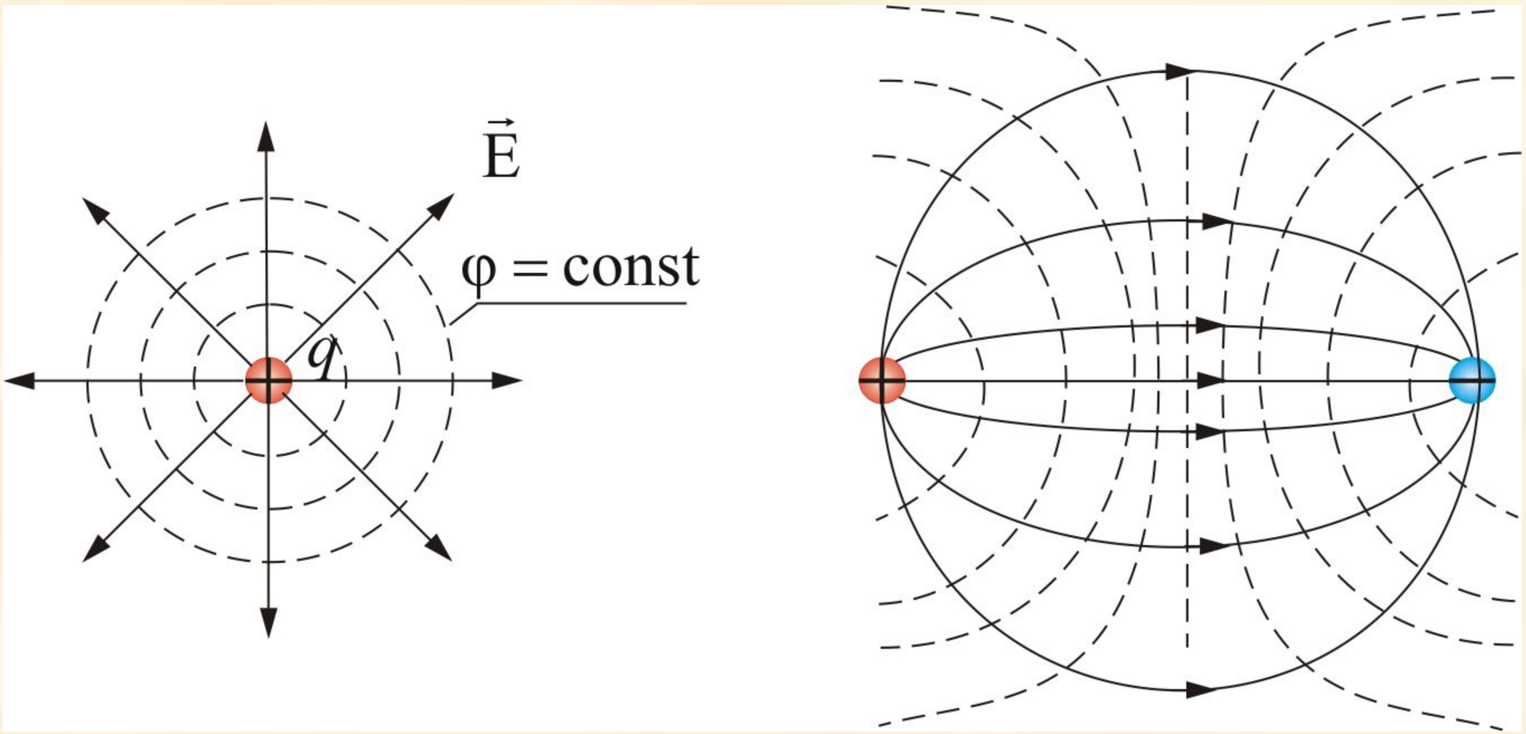
$$\phi_1 - \phi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}).$$

- Для обхода по замкнутому контуру получим: $\phi_1 = \phi_2$

$$\oint (\vec{E}, d\vec{l}) = 0,$$

- циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю.

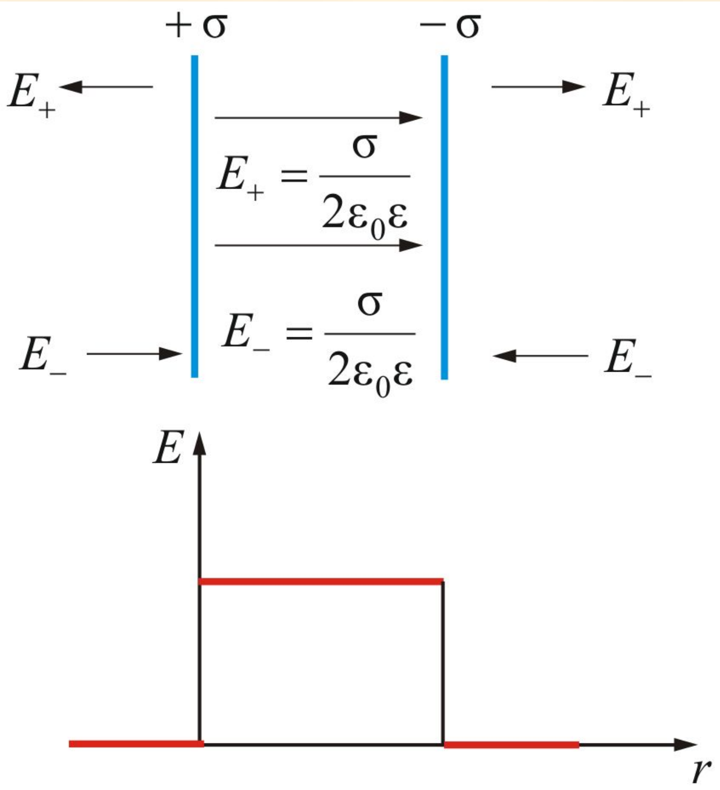
• Линии электростатического поля **не могут быть замкнутыми**: они начинаются на положительных зарядах (**истоки**) и на отрицательных зарядах заканчиваются (**стоки**) или уходят в бесконечность



3.7. Расчет потенциалов простейших электростатических полей

3.7.1. Разность потенциалов между двумя бесконечными заряженными плоскостями

$$E = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}l}, \qquad E = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0} \qquad \mathrm{d}\phi = -E\mathrm{d}l$$



$$\int_1^2 \mathrm{d}\phi = -\frac{|\sigma|}{\varepsilon_0}\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x;$$

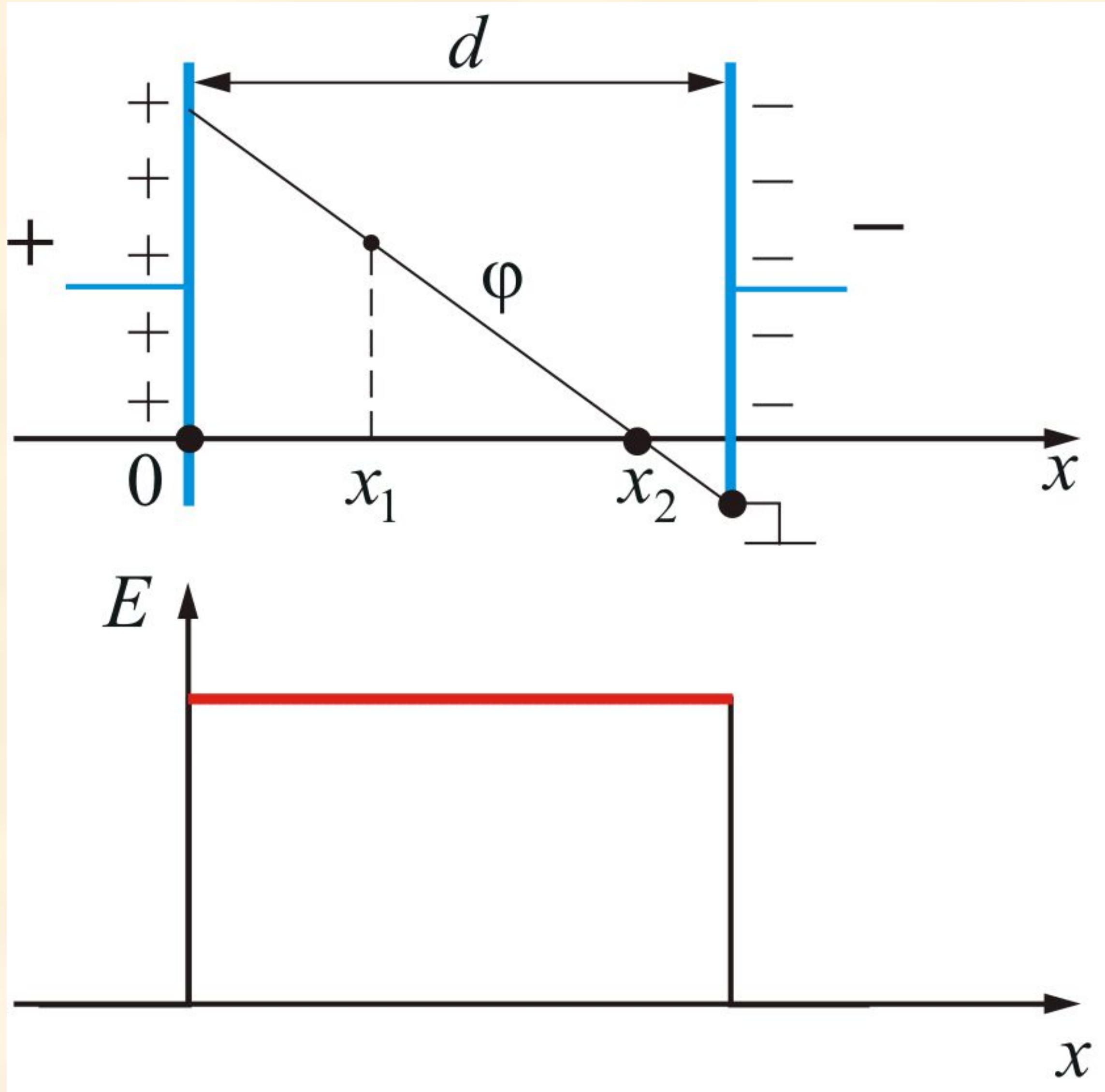
$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0}\left(x_2 - x_1\right)$$

- На рисунке изображена зависимость напряженности *E* и потенциала φ от расстояния между плоскостями.
- При $x_1 = 0$

и $x_2 = d$

$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0}$$



3.7.2. Разность потенциалов между точками поля, образованного бесконечно длинной цилиндрической поверхностью

- С помощью теоремы Остроградского-Гаусса мы показали, что

$$E = \begin{cases} 0 - \text{внутри цилиндра, так как внутри нет зарядов} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \text{ или } \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 Rl} \text{ на поверхности цилиндра} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \text{ или } \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 rl} \text{ вне цилиндра.} \end{cases}$$

- Тогда, т.к.

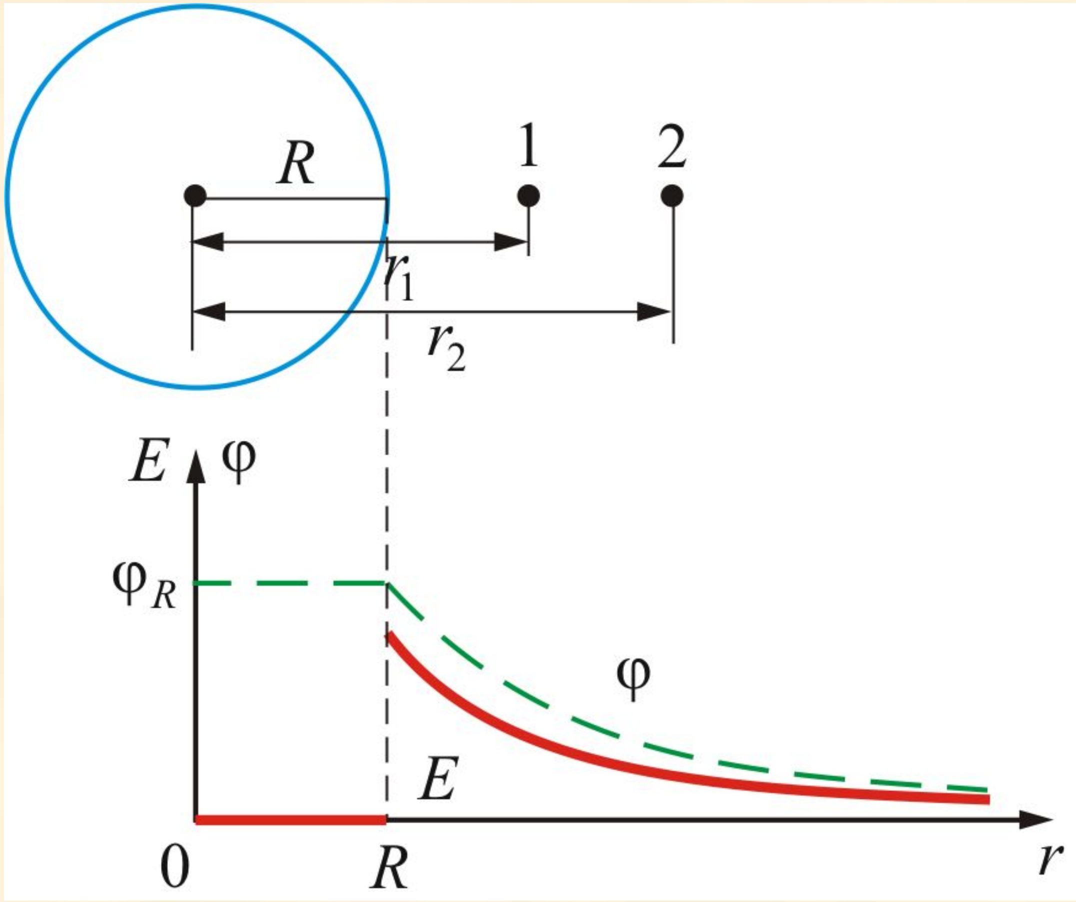
$$d\phi = -E dr; \qquad \int_1^2 d\phi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}$$

- отсюда следует, что разность потенциалов в произвольных точках 1 и 2 будет равна:

$$\phi_2 - \phi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

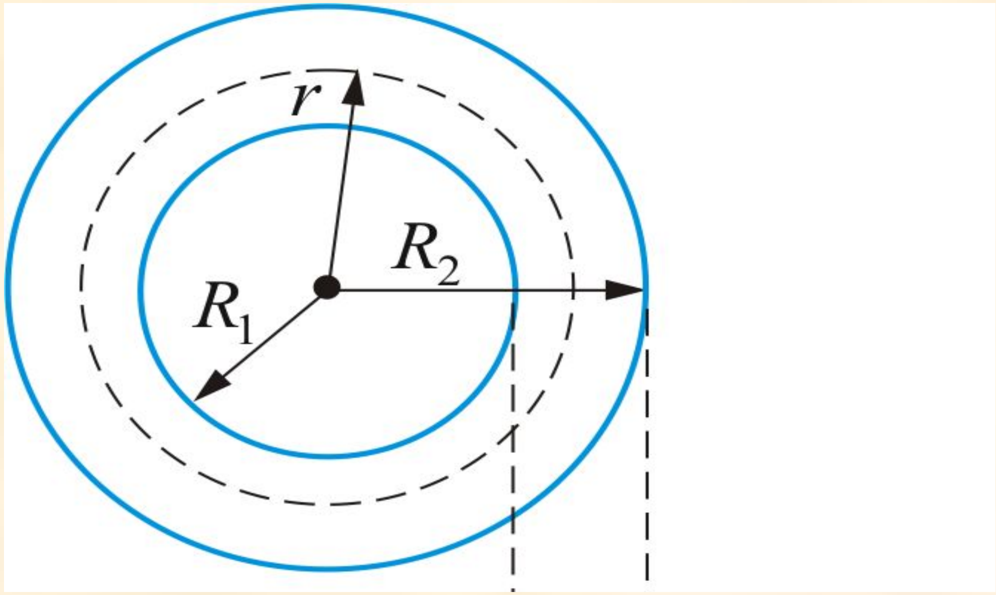
$$\phi = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{1}{R} = \text{const} - \text{на поверхности и внутри цилиндра} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{R} \quad - \text{вне цилиндра.} \end{cases}$$

$$\phi = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \dfrac{1}{R} = \text{const} - \text{внутри и на поверхности цилиндра} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \dfrac{r}{R} \quad - \text{вне цилиндра.} \end{cases}$$



3.7.3. Разность потенциалов между обкладками цилиндрического конденсатора

-



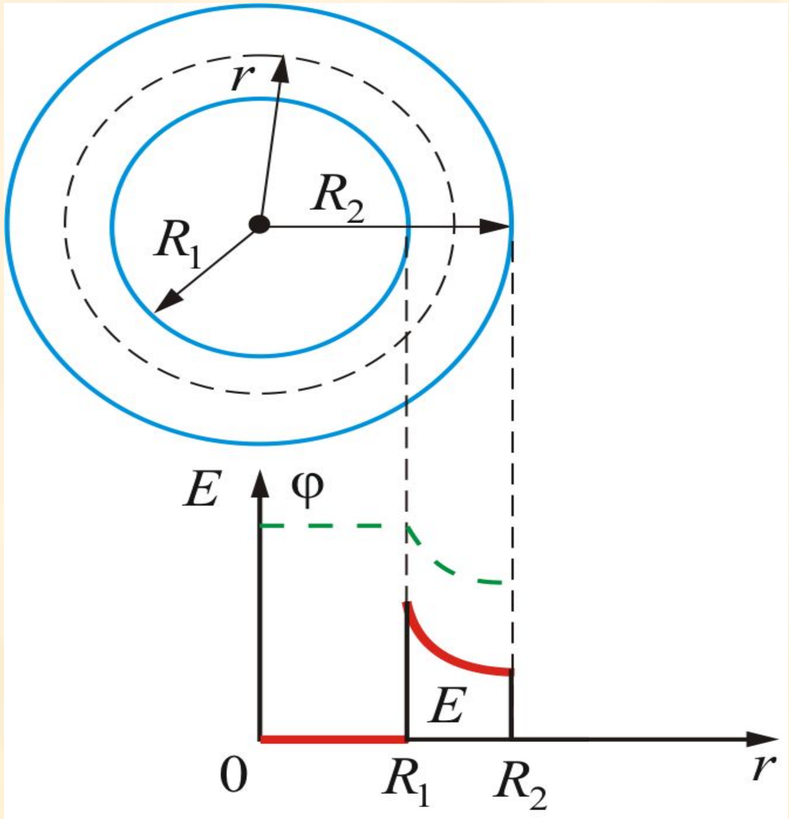
-

$$E = \begin{cases} 0 - \text{внутри меньшего и вне большего цилиндров зарядов нет} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} - \text{между цилиндрами, когда } R_1 < r < R_2. \end{cases}$$

- Т.к. $\mathrm{d}\phi = -E\,\mathrm{d}r$,то
- $$\phi_2 - \phi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$$
-

$$\phi = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{R_2}{R_1} = \text{const} - \text{внутри меньшего цилиндра } (r < R_1) \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{R_1} - \text{между цилиндрами } (R_1 < r < R_2) \\ 0 \ - \ \text{вне цилиндров.} \end{cases}$$

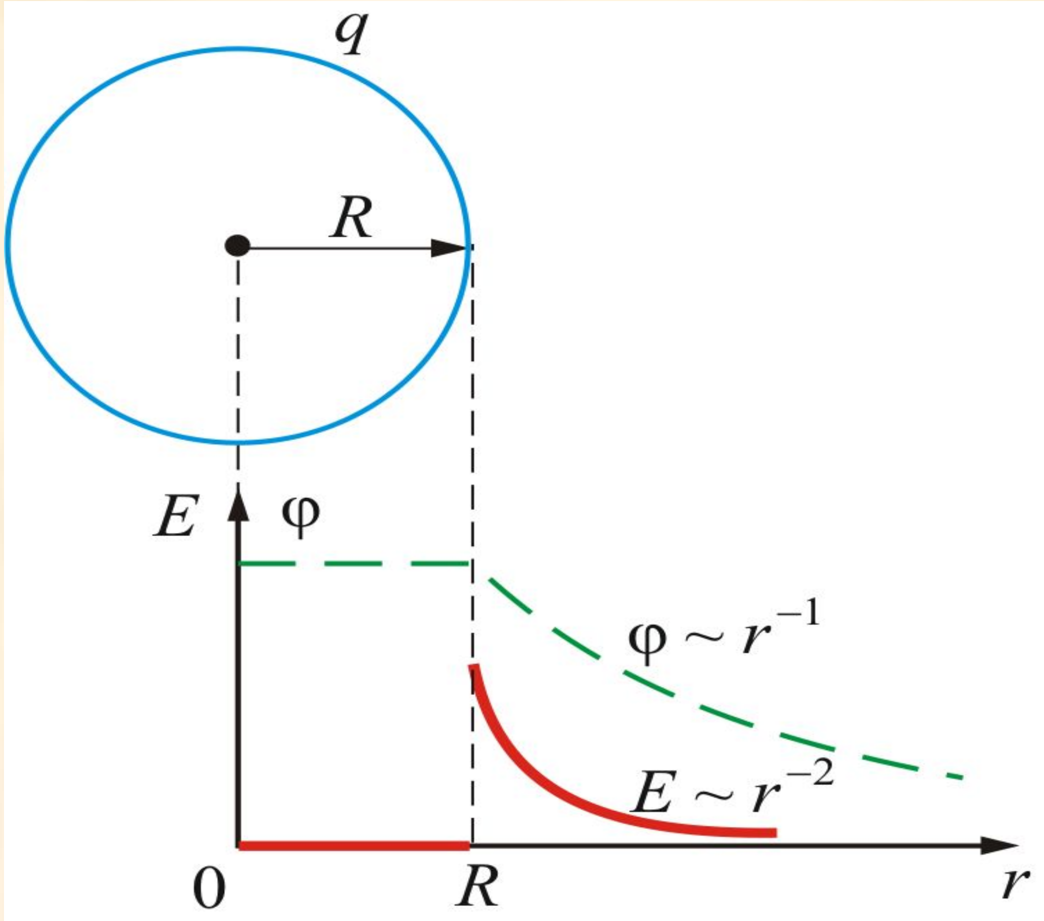
- Таким образом, внутри меньшего цилиндра имеем , $E = 0$, $\varphi = \text{const}$;
- между обкладками потенциал уменьшается по логарифмическому закону,
- вторая обкладка (вне цилиндров) экранирует электрическое поле и φ и *E* равны нулю.



3.7.4. Разность потенциалов заряженной сферы (пустотелой)

- Напряженность поля сферы определяется формулой

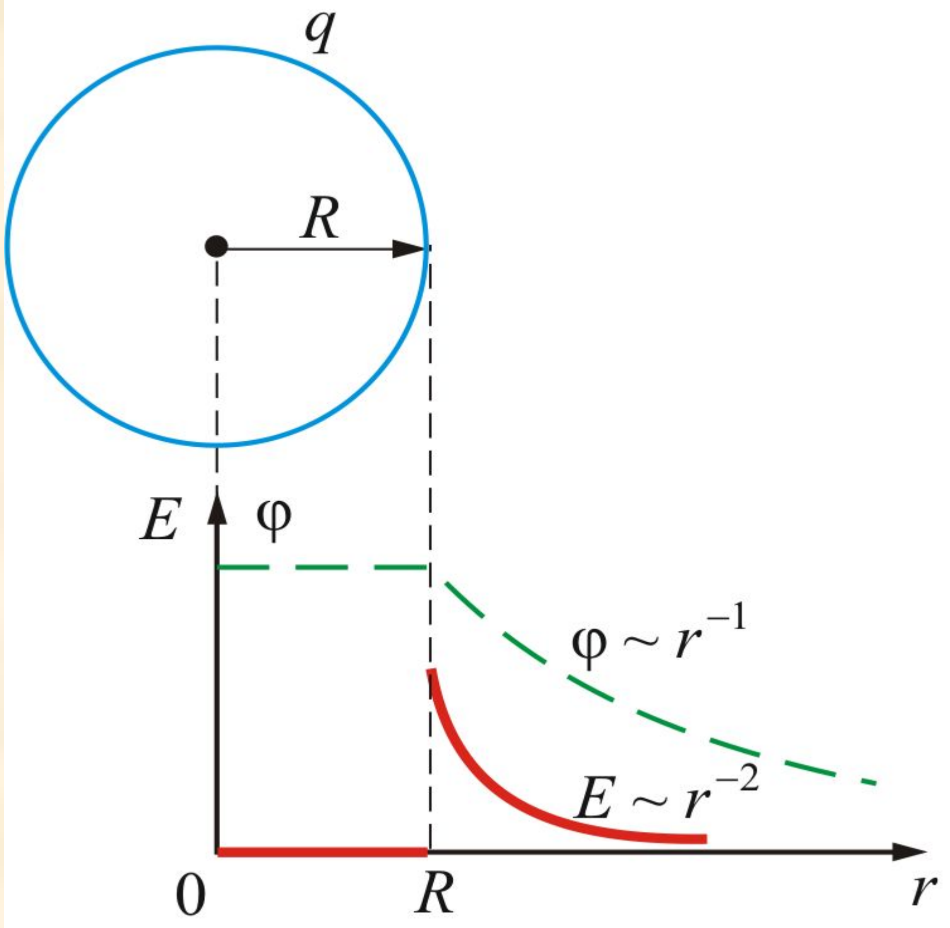
$$E(r) = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



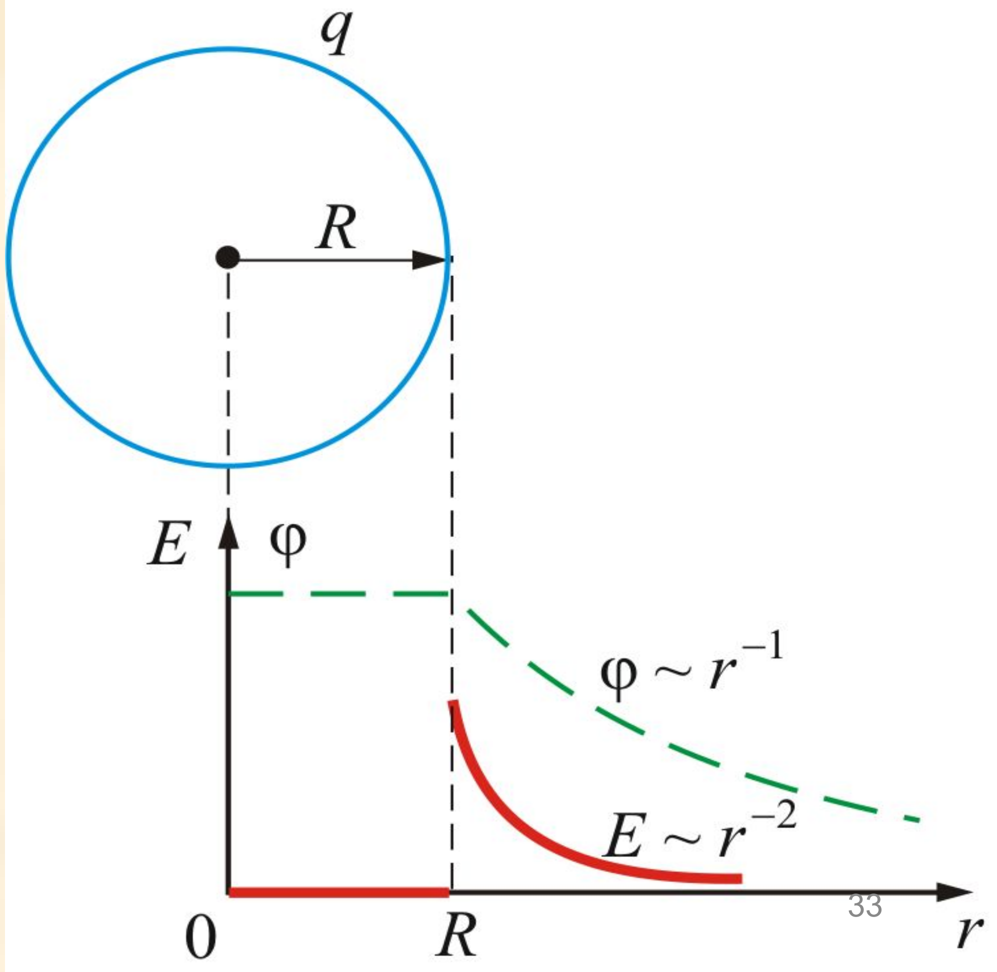
- А т.к. $\mathrm{d}\phi = -E\mathrm{d}r$, то

$$\phi_1 - \phi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

т.е. $\phi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$.



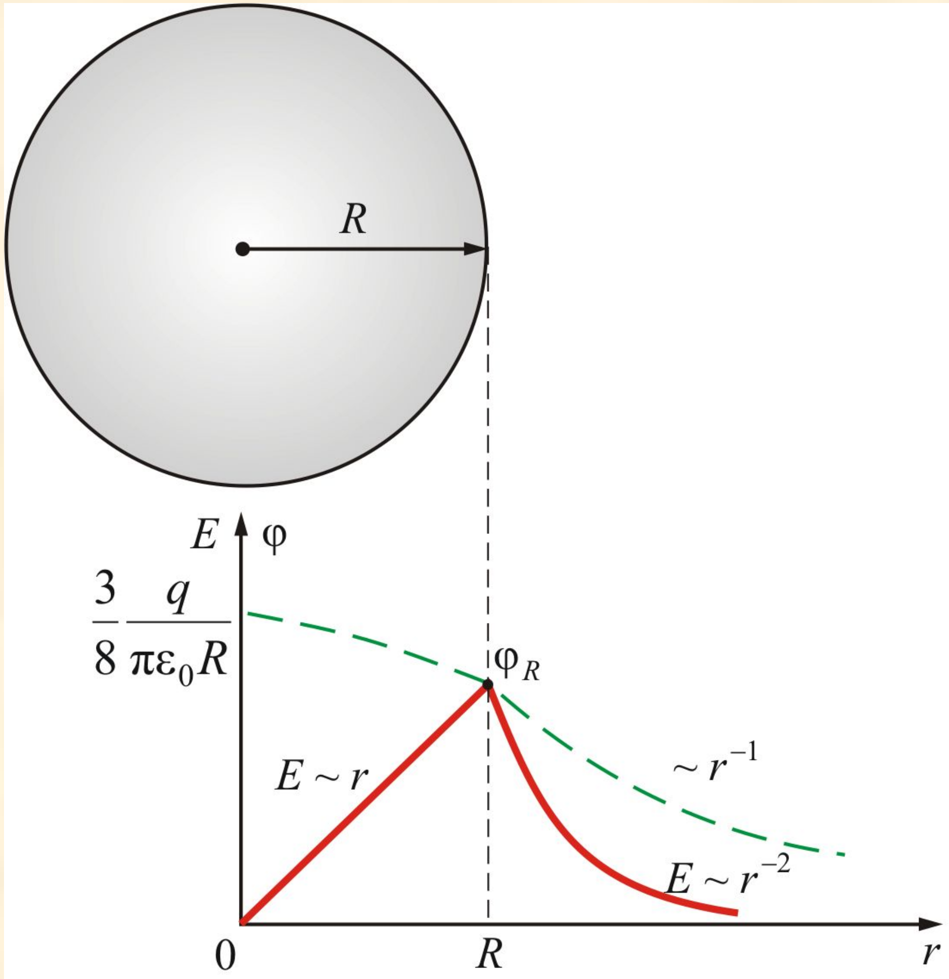
$$\phi = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0} = \text{const} - \text{внутри и на поверхности} \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \text{вне сферы } (r > R). \end{cases}$$



3.7.5. Разность потенциалов внутри диэлектрического заряженного шара

- Имеем диэлектрический шар заряженный с объемной плотностью

$$\rho = \frac{3q}{4\pi R^3}.$$



- Напряженность поля шара, вычисленная с помощью теоремы Остроградского-Гаусса:
-
- $$E = \begin{cases} \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} - \text{внутри шара}\,(r < R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} - \text{на поверхности шара}\,(r = R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \text{вне шара}\ (r > R). \end{cases}$$

- Отсюда найдем разность потенциалов шара:

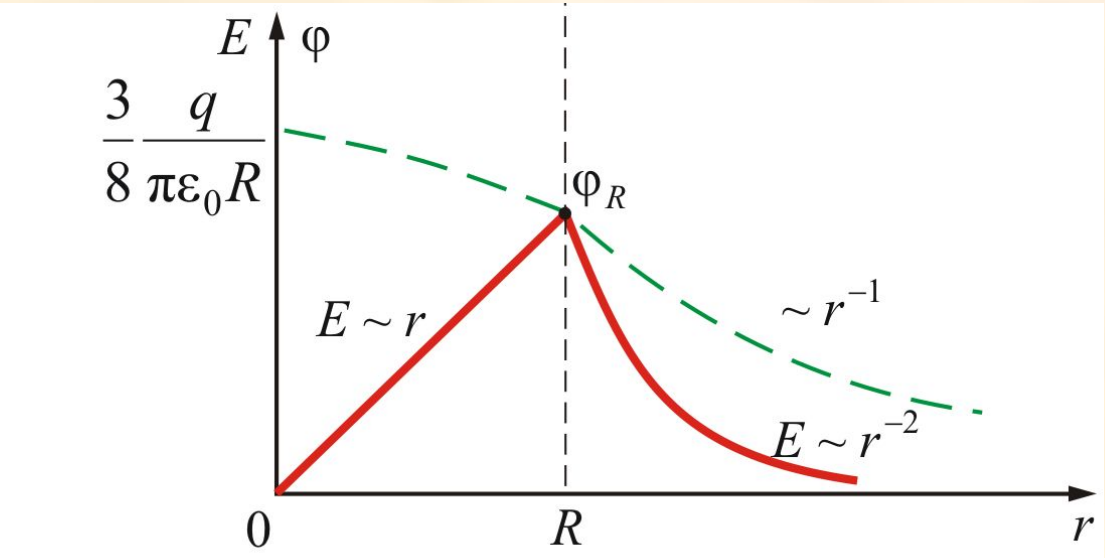
$$\phi_2 - \phi_1 = -\int_1^2 E\mathrm{d}r = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int_1^2 r\mathrm{d}r = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(r_2^2 - r_1^2\right)$$

или

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{q(r_2^2 - r_1^2)}{4\pi\varepsilon_0 2R^3}.$$

- Потенциал шара:

$$\phi = \begin{cases} \dfrac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R} - \text{в центре шара } (r = 0) \\ \dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \dfrac{r^2}{R^2}\right) - \text{внутри шара } (r \le R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \text{на поверхности и вне шара } (r \ge R). \end{cases}$$



- Из полученных соотношений можно сделать следующие **выводы:**

- С помощью теоремы Гаусса сравнительно просто можно рассчитать Е и φ от различных заряженных поверхностей.

- Напряженность поля в вакууме изменяется скачком при переходе через заряженную поверхность.

- Потенциал поля – всегда непрерывная функция координат.