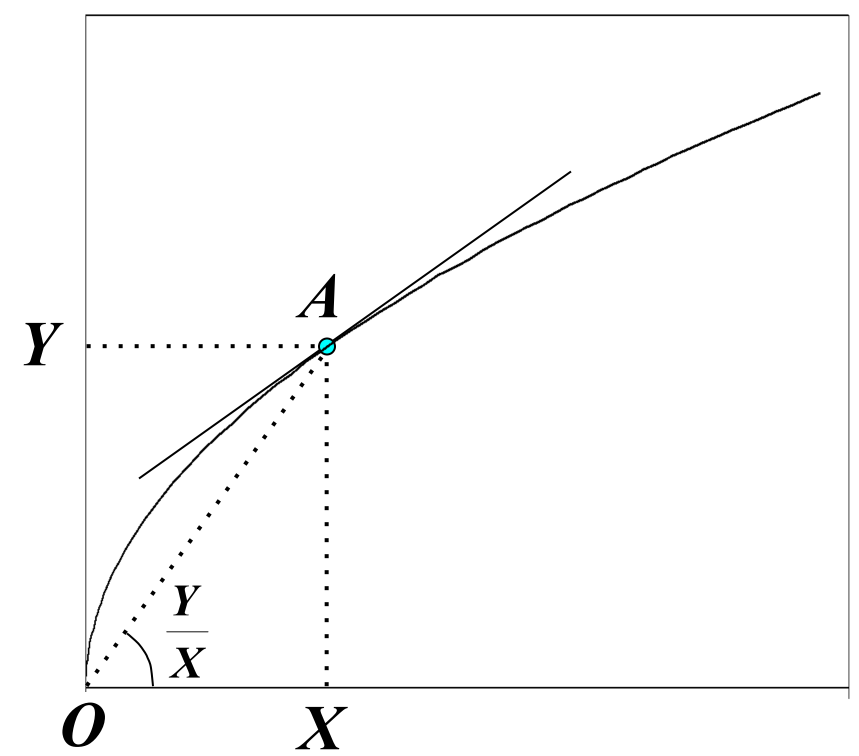
ЭЛАСТИЧНОСТИ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

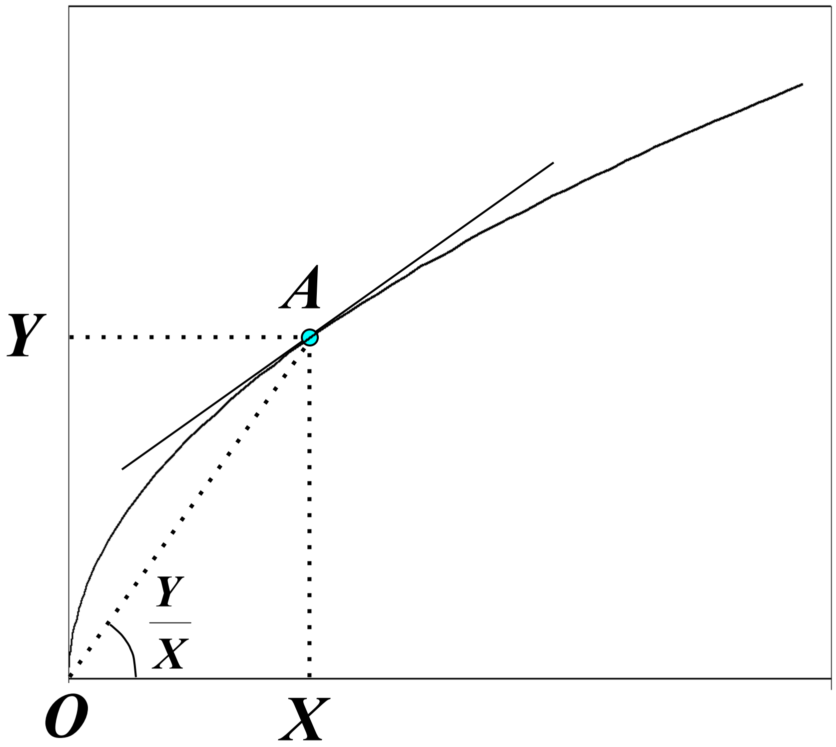
Определение:
Эластичность Y относительно X является пропорциональным изменением в Y за пропорциональное изменение в X.

$$\text{elasticity} = \frac{\mathrm{d}Y/Y}{\mathrm{d}X/X}$$



Эта последовательность определяет эластичность и показывает, как можно оснастить нелинейные модели постоянными эластичностями. Во-первых, общее определение эластичности.

Определение:
Эластичность Y относительно X является пропорциональным изменением в Y за пропорциональное изменение в X.



$$\text{elasticity} = \frac{\mathrm{d}Y/Y}{\mathrm{d}X/X}$$

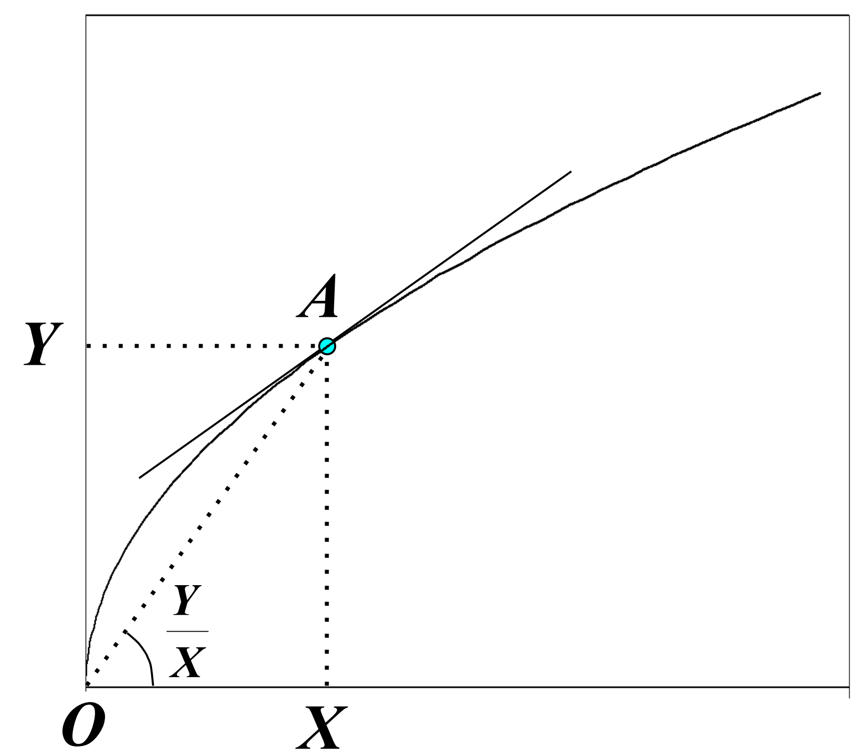
$$= \frac{\mathrm{d}Y/\mathrm{d}X}{Y/X}$$

$$= \frac{\text{slope of the tangent at } A}{\text{slope of } OA}$$

Перестраивая выражение для эластичности, мы можем получить графическую интерпретацию.

Определение: Эластичность Y относительно X является пропорциональным изменением в Y за пропорциональное изменение в X

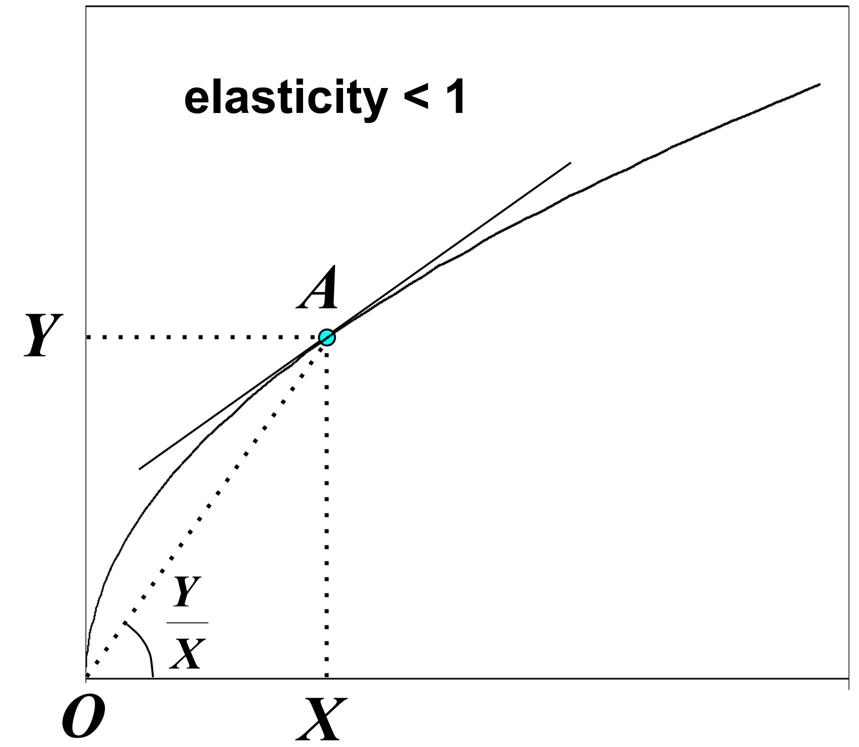
$$\text{elasticity} = \frac{dY/Y}{dX/X} = \frac{dY/dX}{Y/X} = \frac{\text{slope of the tangent at } A}{\text{slope of } OA}$$



Эластичность в любой точке на кривой - отношение наклона тангенса в том пункте к наклону линии, соединяющей пункт с происхождением.

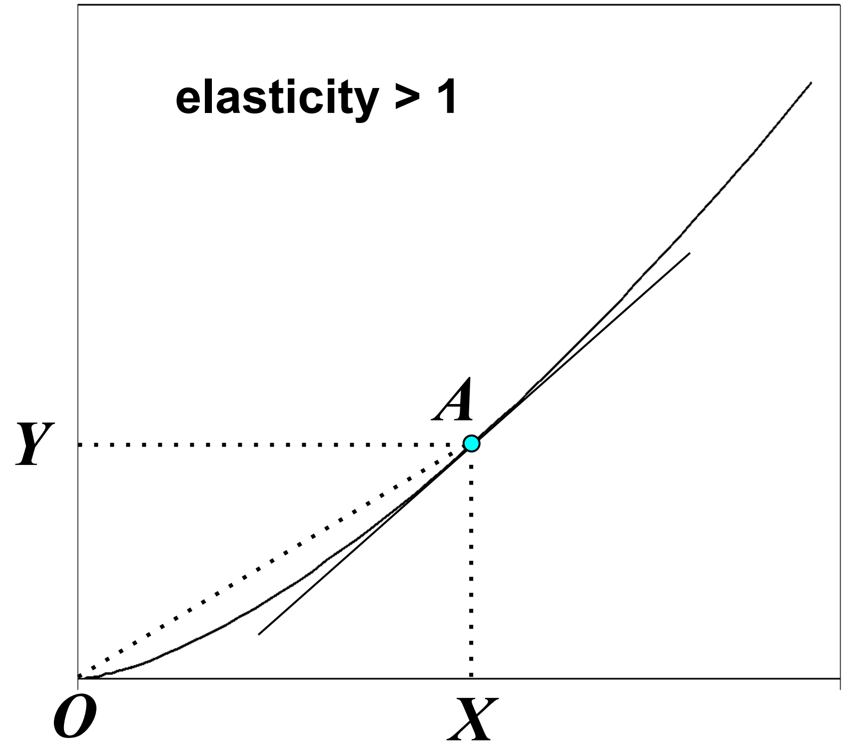
Определение:
elas
ticity Y относительно X является пропорциональным изменением в Y за пропорциональное изменение в X.

$$\text{elasticity} = \frac{dY/Y}{dX/X} = \frac{dY/dX}{Y/X} = \frac{\text{slope of the tangent at } A}{\text{slope of } OA}$$



В этом случае ясно, что тангенс в A более плоский, чем OA линии и таким образом, эластичность должна быть меньше чем 1.

Определение:
Эластичность Y относительно X является пропорциональным изменением в Y за пропорциональное изменение в X



$$\text{elasticity} = \frac{\mathrm{d}Y/Y}{\mathrm{d}X/X} = \frac{\mathrm{d}Y/\mathrm{d}X}{Y/X} = \frac{\text{slope of the tangent at } A}{\text{slope of } OA}$$

В этом случае тангенс в A более крут, чем OA и эластичность больше, чем 1

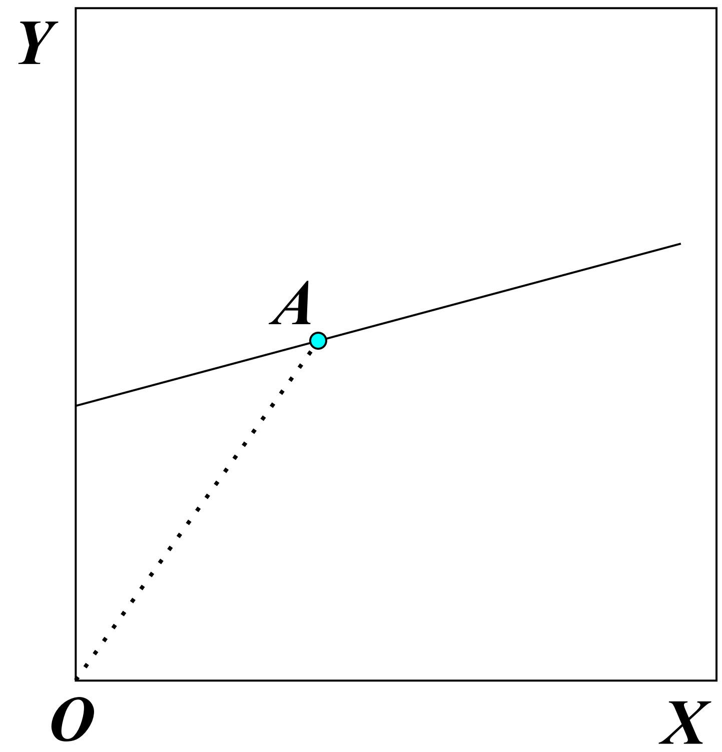
$$Y = \beta_1 + \beta_2 X$$

$$\text{elasticity} = \frac{dY/dX}{Y/X}$$

$$= \frac{\text{slope of the tangent at } A}{\text{slope of } OA}$$

$$= \frac{\beta_2}{(\beta_1 + \beta_2 X)/X}$$

$$= \frac{\beta_2}{(\beta_1/X) + \beta_2}$$



В целом эластичность будет отличаться в различных пунктах на функции, имеющей отношение Y к X

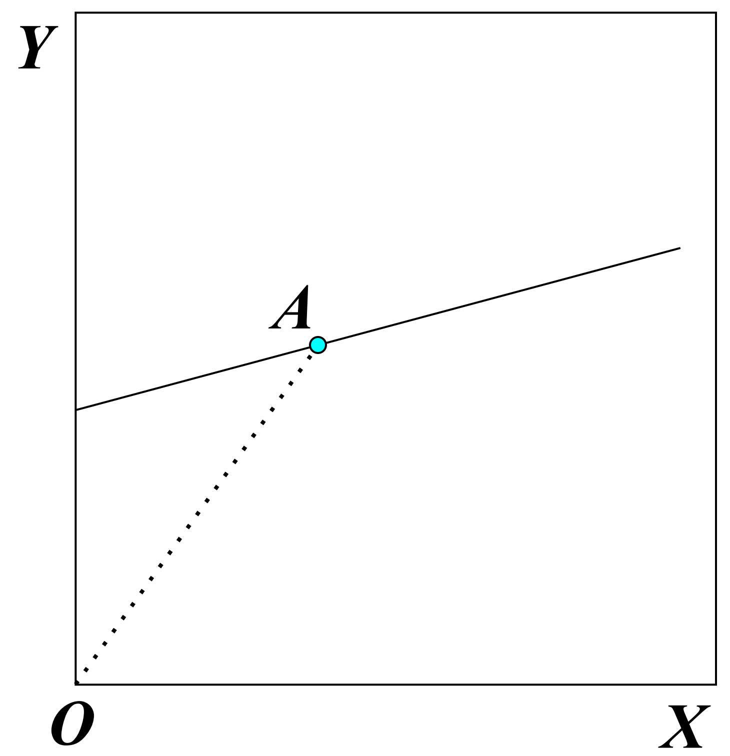
$$Y = \beta_1 + \beta_2 X$$

$$\text{elasticity} = \frac{\mathrm{d}Y / \mathrm{d}X}{Y / X}$$

$$= \frac{\text{slope of the tangent at } A}{\text{slope of } OA}$$

$$= \frac{\beta_2}{(\beta_1 + \beta_2 X)/X}$$

$$= \frac{\beta_2}{(\beta_1 / X) + \beta_2}$$



В примере выше, Y - линейная функция X.

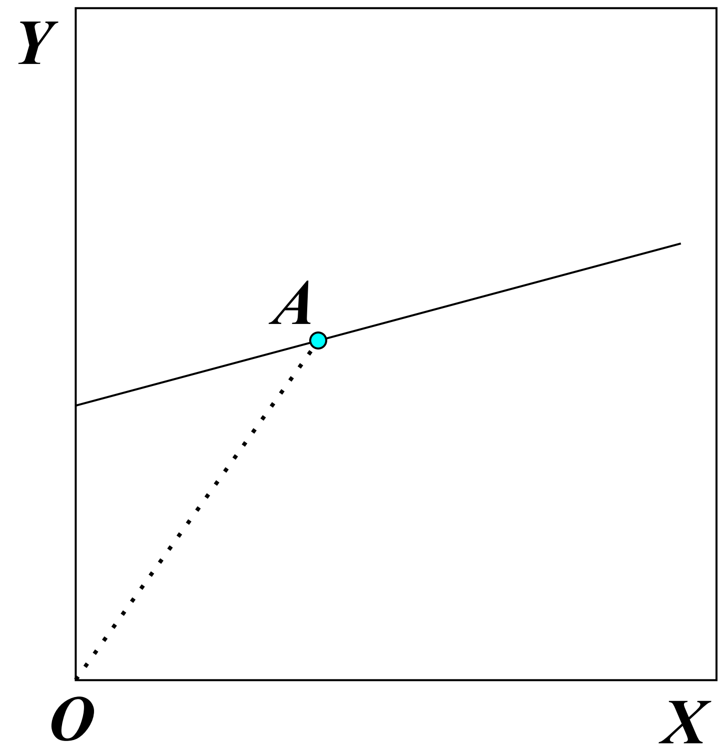
$$Y = \beta_1 + \beta_2 X$$

$$\text{elasticity} = \frac{\mathrm{d}Y / \mathrm{d}X}{Y / X}$$

$$= \frac{\text{slope of the tangent at } A}{\text{slope of } OA}$$

$$= \frac{\beta_2}{(\beta_1 + \beta_2 X) / X}$$

$$= \frac{\beta_2}{(\beta_1 / X) + \beta_2}$$



Тангенс в любом пункте случайный с самой линией, таким образом, в этом случае ее наклон всегда b2. Эластичность зависит от наклона линии, соединяющей пункт с происхождением.

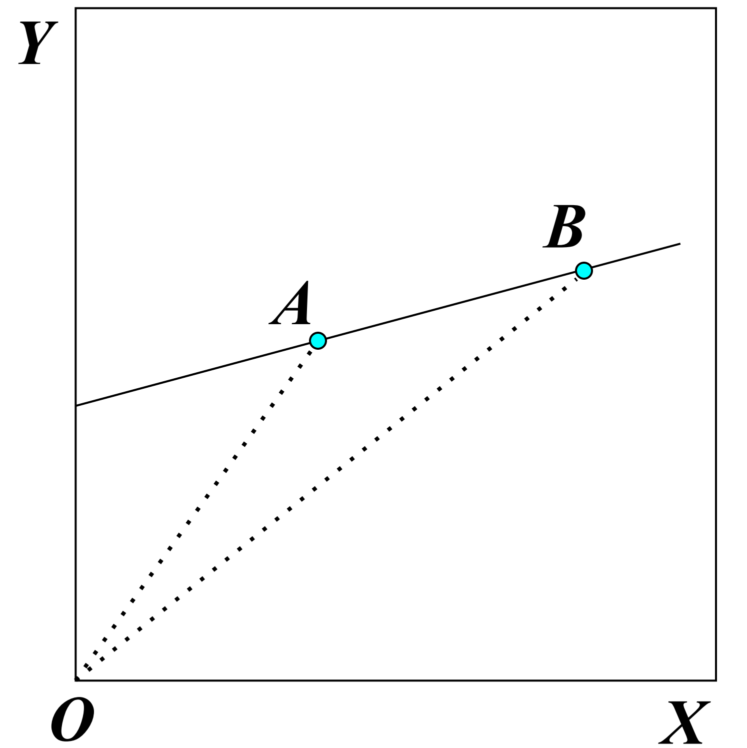
$$Y = \beta_1 + \beta_2 X$$

$$\text{elasticity} = \frac{\mathrm{d}Y / \mathrm{d}X}{Y / X}$$

$$= \frac{\text{slope of the tangent at } A}{\text{slope of } OA}$$

$$= \frac{\beta_2}{(\beta_1 + \beta_2 X) / X}$$

$$= \frac{\beta_2}{(\beta_1 / X) + \beta_2}$$



ОБЬ более плоская, чем ОА, таким образом, эластичность больше в В, чем в А. (Это соединяется с математическим выражением: (b1 / X), + b2 меньше в В, чем в А, предполагая, что b1 положительный.)

ЭЛАСТИЧНОСТИ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

$$Y = \beta_1 X^{\beta_2}$$

Однако у функции типа, показанного выше, есть та же самая эластичность для всех ценностей X

$$Y = \beta_1 X^{\beta_2}$$

$$\frac{dY}{dX} = \beta_1 \beta_2 X^{\beta_2 - 1}$$

Для нумератора выражения эластичности нам нужна производная Y относительно X.

$$Y = \beta_1 X^{\beta_2}$$

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \beta_1 \beta_2 X^{\beta_2 - 1}$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{\beta_1 X^{\beta_2}}{X} = \beta_1 X^{\beta_2 - 1}$$

Для знаменателя нам нужен Y/X

ЭЛАСТИЧНОСТИ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

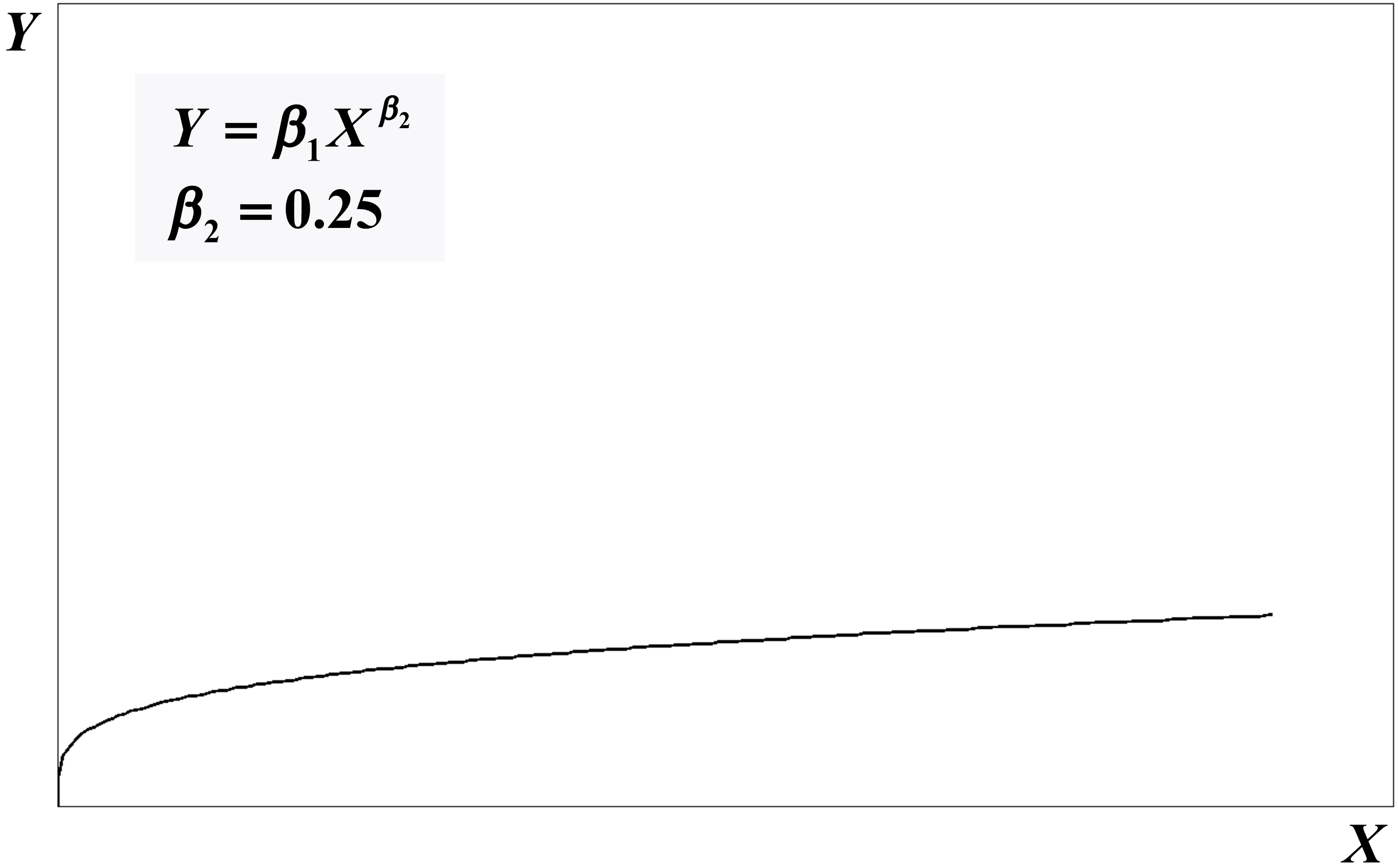
$$Y = \beta_1 X^{\beta_2}$$

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \beta_1 \beta_2 X^{\beta_2 - 1}$$

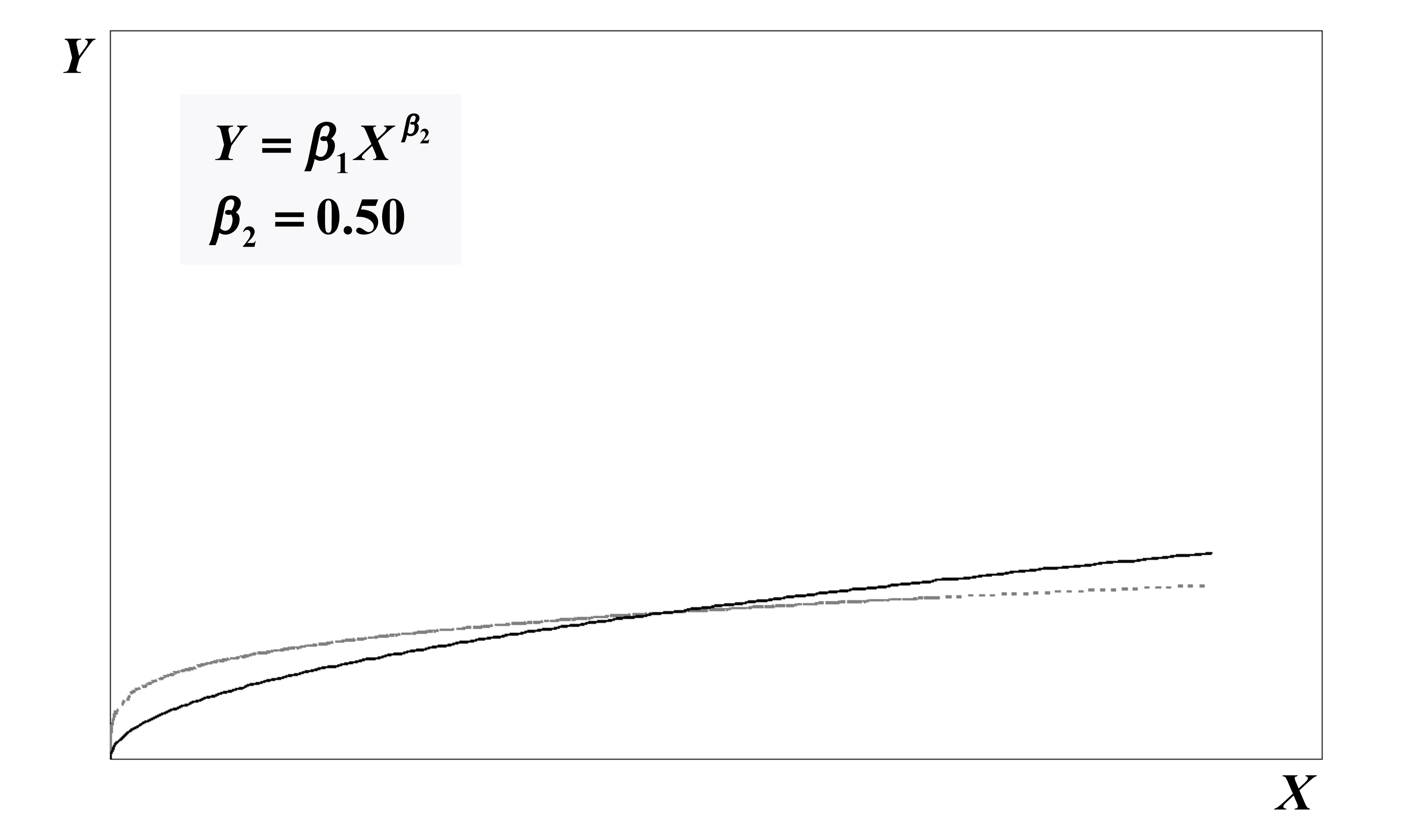
$$\frac{Y}{X} = \frac{\beta_1 X^{\beta_2}}{X} = \beta_1 X^{\beta_2 - 1}$$

$$\text{elasticity} = \frac{\mathrm{d}Y / \mathrm{d}X}{Y / X} = \frac{\beta_1 \beta_2 X^{\beta_2 - 1}}{\beta_1 X^{\beta_2 - 1}} = \beta_2$$

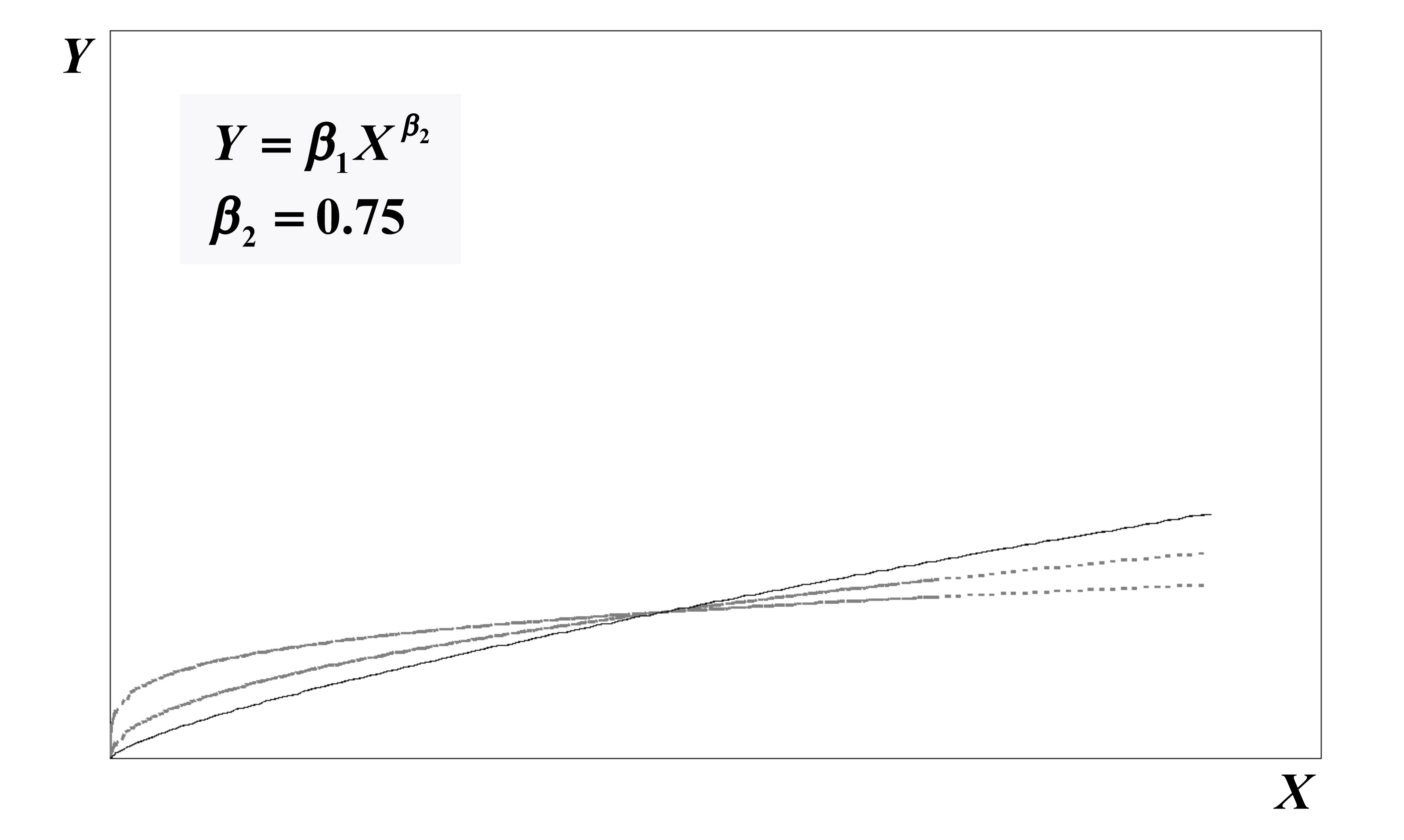
Следовательно мы получаем выражение для эластичности. Это упрощает до b2 и поэтому постоянно.



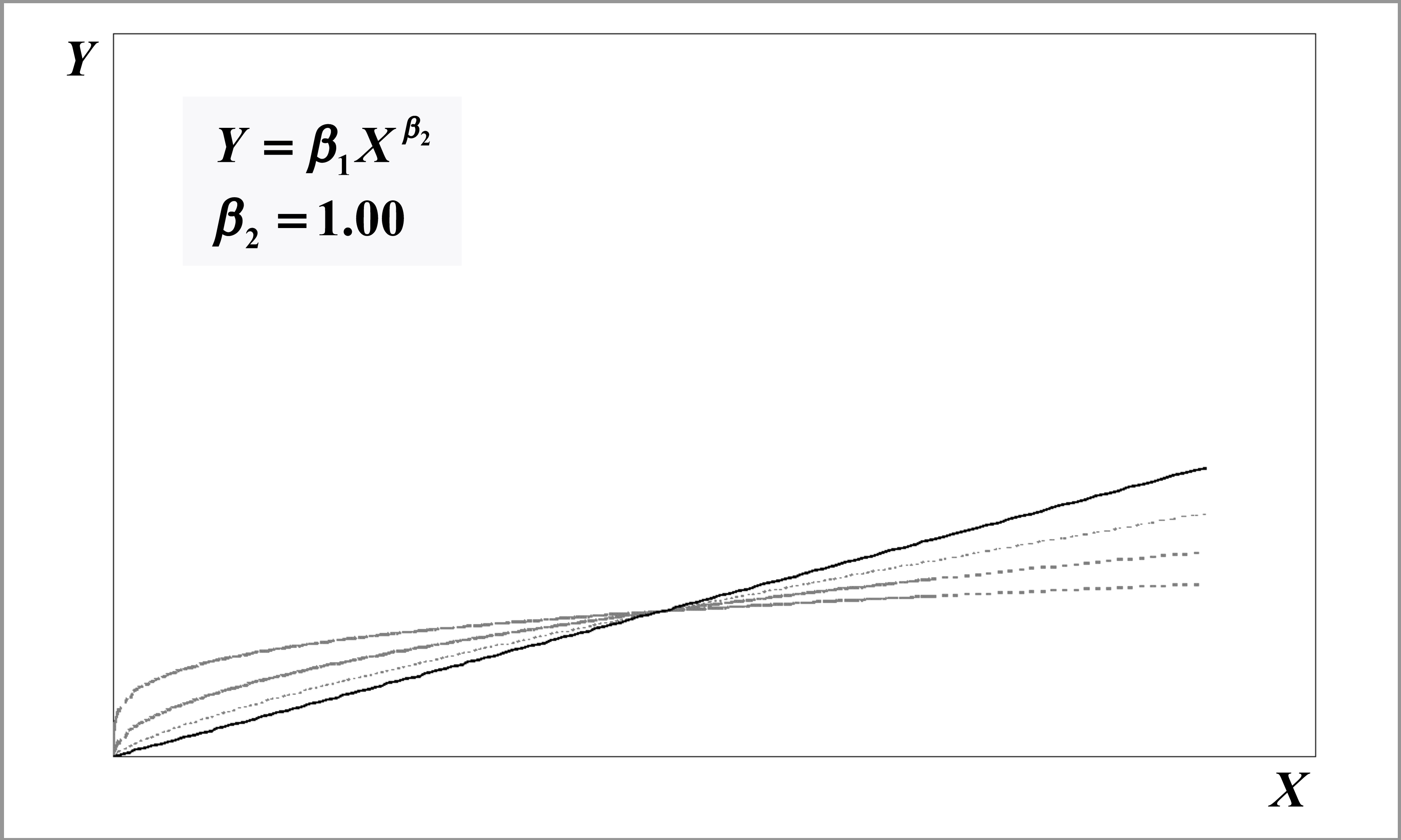
Посредством иллюстрации функция будет подготовлена для диапазона ценностей b2. Мы начнем с очень низкой стоимости, 0.25.



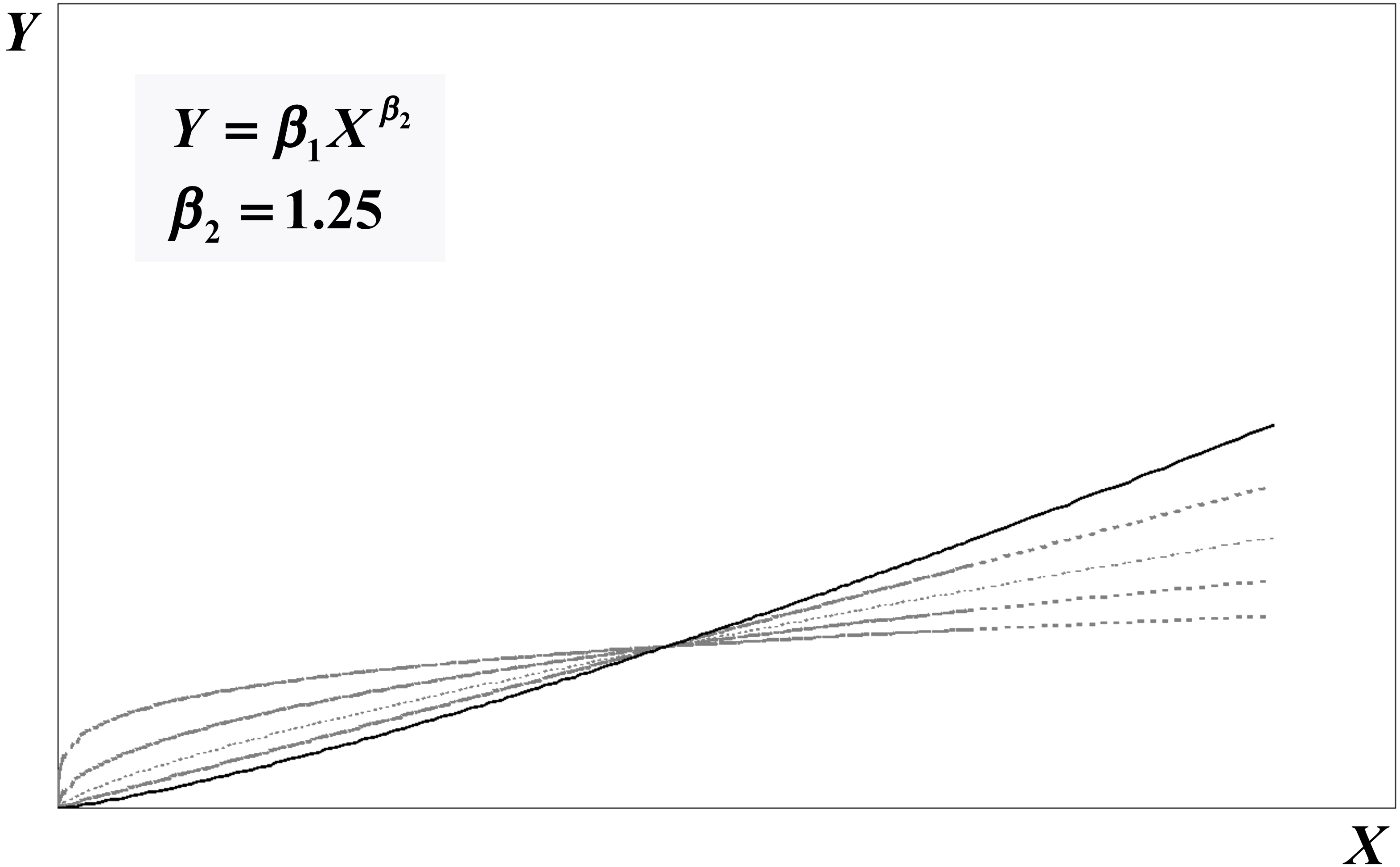
Мы будем увеличивать b2 в шагах 0.25 и видеть, как форма функции изменяется.



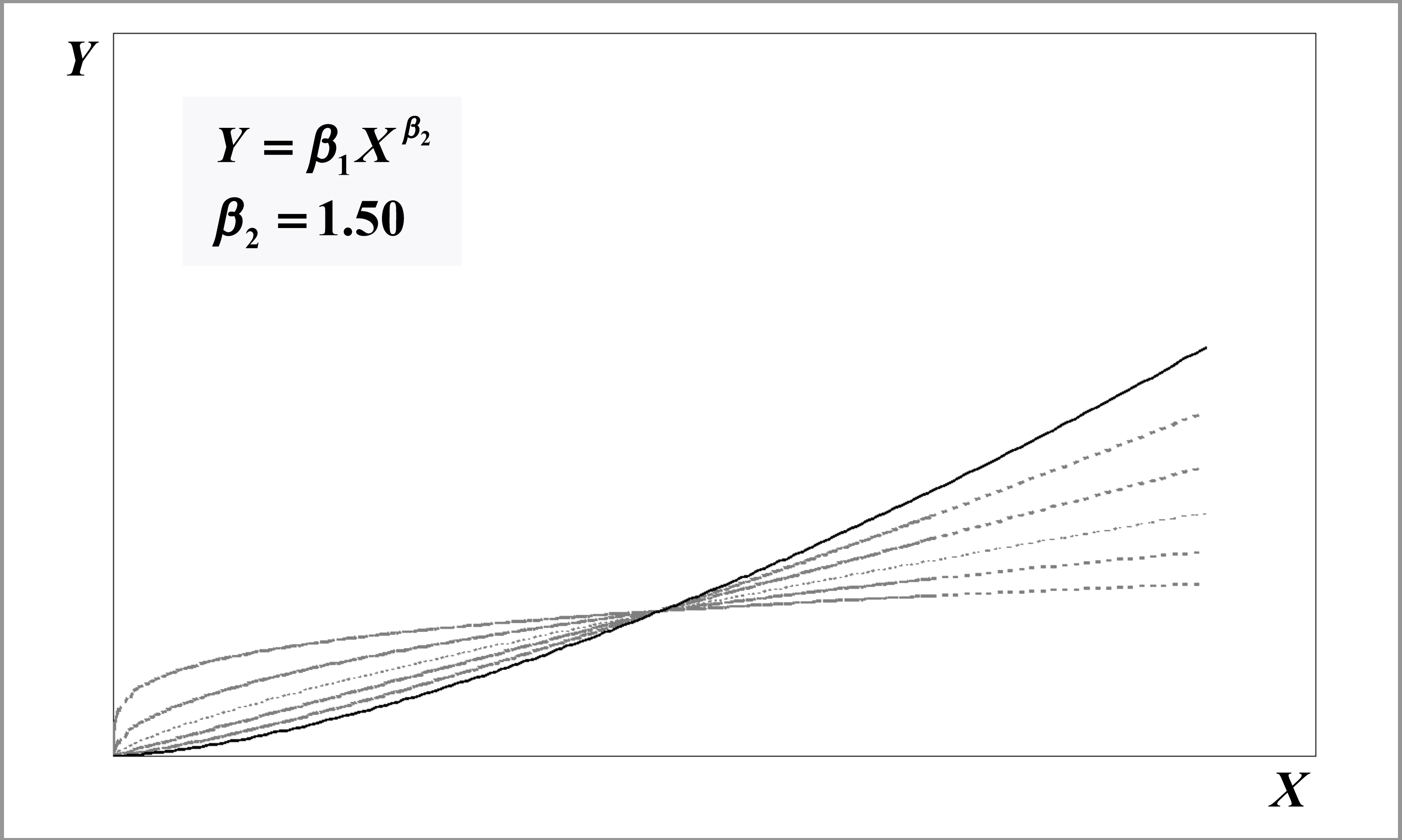
β_2 = 0.75.



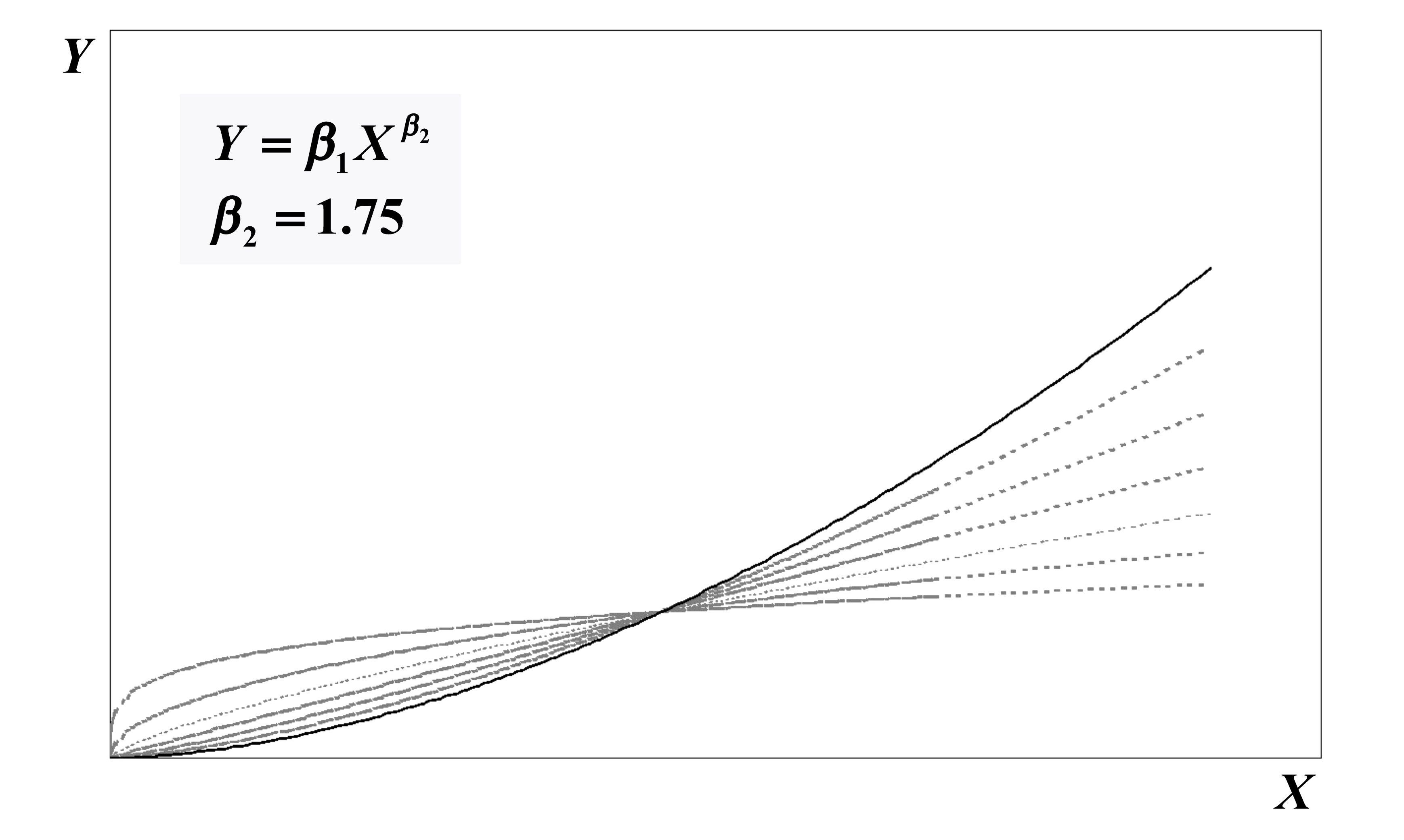
Когда b2 равен 1, кривая становится прямой линией через происхождение.



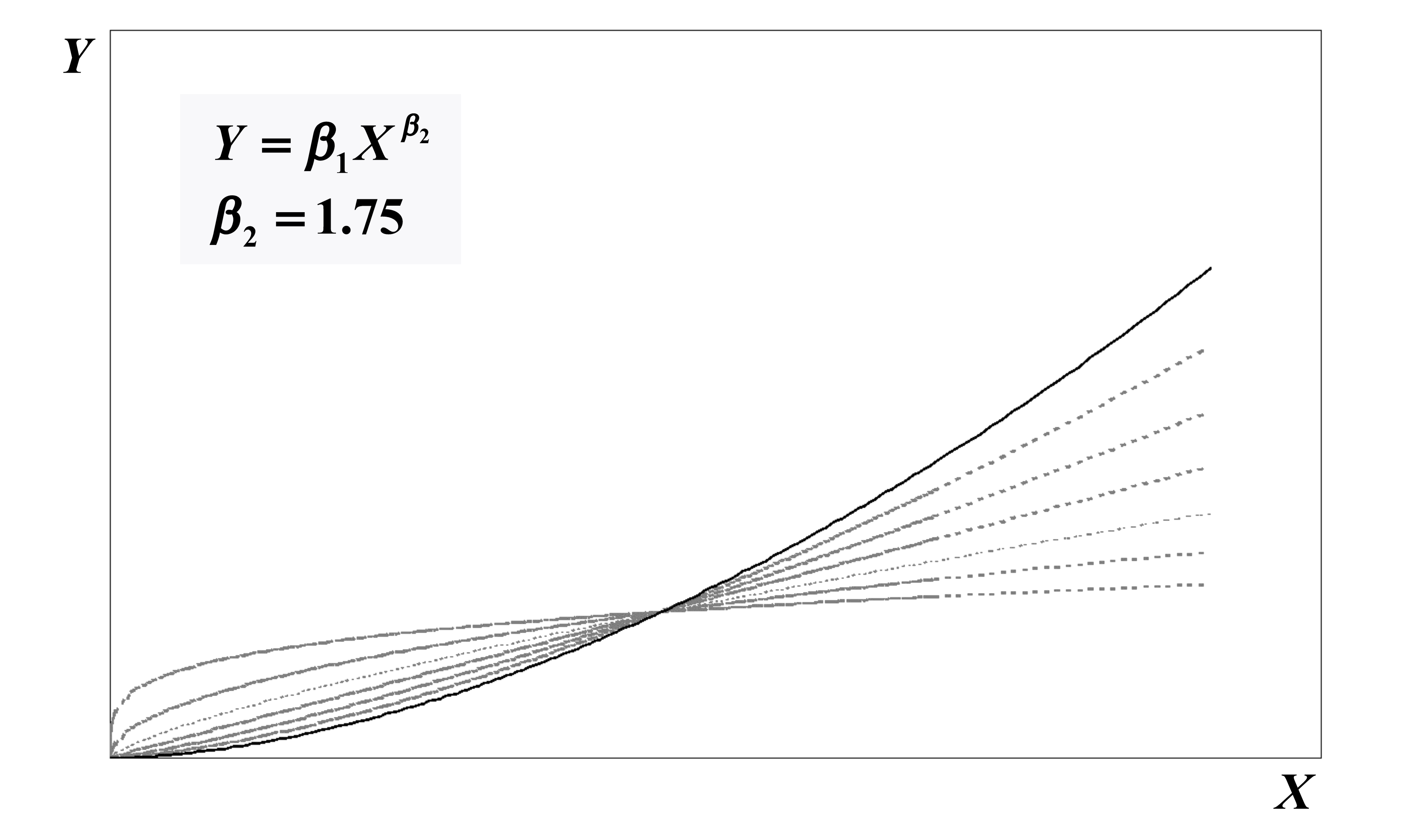
β_2 = 1.25.



β_2 = 1.50.



b2 = 1.75. Обратите внимание, что искривление может быть довольно нежным по широким спектрам X.



Это означает, что, даже если истинная модель имеет постоянную форму эластичности, линейная модель может быть хорошим приближением по ограниченному диапазону.

$$Y = \beta_1 X^{\beta_2}$$

$$\begin{aligned}\log Y &= \log \beta_1 X^{\beta_2} \\ &= \log \beta_1 + \log X^{\beta_2} \\ &= \log \beta_1 + \beta_2 \log X\end{aligned}$$

Легко соответствовать постоянной функции эластичности, используя образец наблюдений. Вы можете линеаризовать модель, беря логарифмы обеих сторон.

ЭЛАСТИЧНОСТИ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

$$Y = \beta_1 X^{\beta_2}$$

$$\begin{aligned} \log Y &= \log \beta_1 X^{\beta_2} \\ &= \log \beta_1 + \log X^{\beta_2} \\ &= \log \beta_1 + \beta_2 \log X \end{aligned}$$

$$Y' = \beta_1' + \beta_2 X' \quad \text{where} \quad \begin{aligned} Y' &= \log Y, \\ X' &= \log X \\ \beta_1' &= \log \beta_1 \end{aligned}$$

Вы таким образом получаете линейное соотношение между Y' и X', как определено. Все серьезные приложения регресса позволяют Вам производить логарифмические переменные от существующих.

$$Y = \beta_1 X^{\beta_2}$$

$$\begin{aligned}\log Y &= \log \beta_1 X^{\beta_2} \\ &= \log \beta_1 + \log X^{\beta_2} \\ &= \log \beta_1 + \beta_2 \log X\end{aligned}$$

$$Y' = \beta_1' + \beta_2 X' \quad \text{where} \quad \begin{aligned} Y' &= \log Y, \\ X' &= \log X \\ \beta_1' &= \log \beta_1 \end{aligned}$$

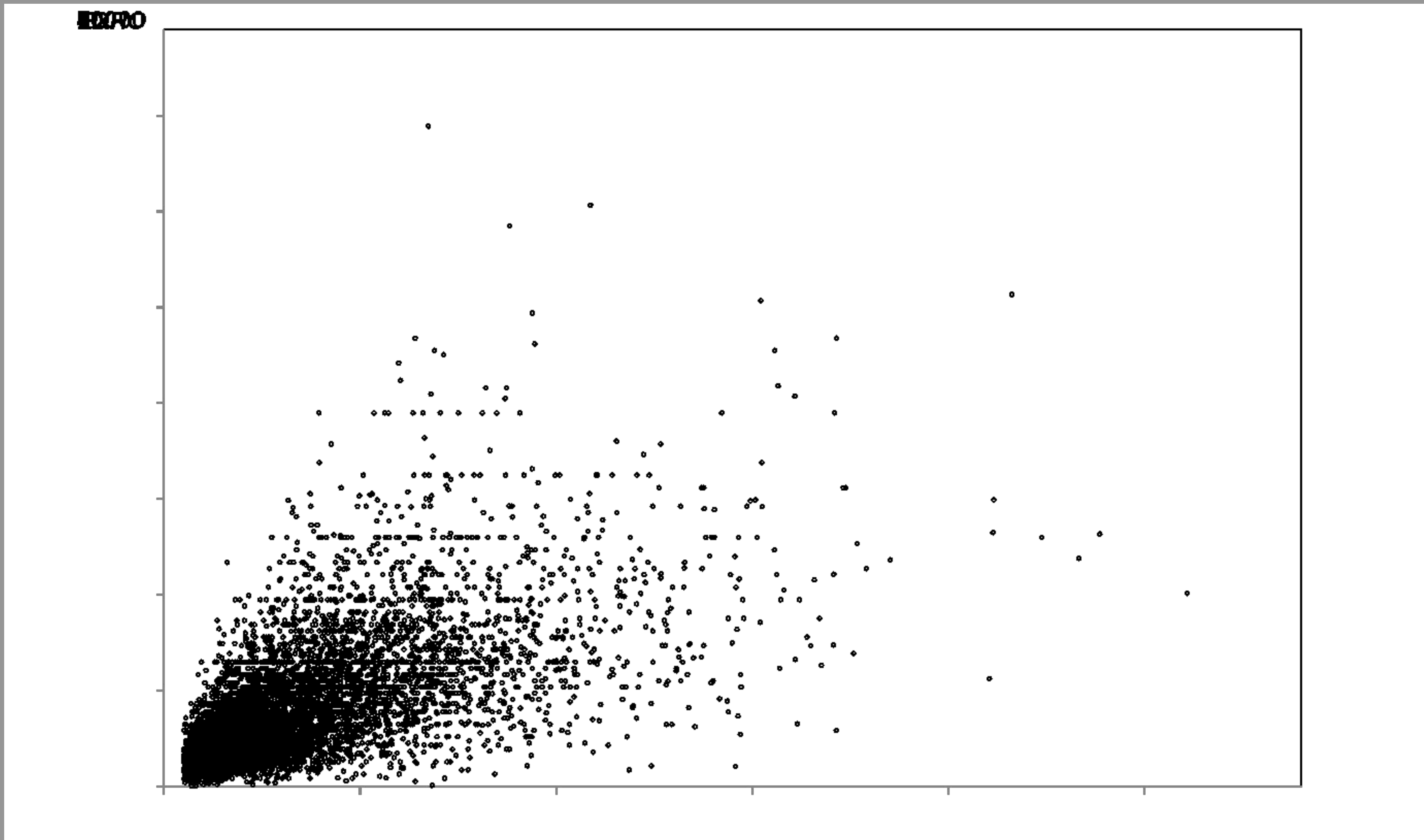
Коэффициент X' будет прямой оценкой эластичности, b2.

$$Y = \beta_1 X^{\beta_2}$$

$$\begin{aligned} \log Y &= \log \beta_1 X^{\beta_2} \\ &= \log \beta_1 + \log X^{\beta_2} \\ &= \log \beta_1 + \beta_2 \log X \end{aligned}$$

$$Y' = \beta_1' + \beta_2 X' \quad \text{where} \quad \begin{aligned} Y' &= \log Y, \\ X' &= \log X \\ \beta_1' &= \log \beta_1 \end{aligned}$$

Постоянный термин будет оценкой регистрации b1. Чтобы получить оценку b1, Вы вычисляете $\hat{\beta}_1'$ exp $\hat{\beta}_1'$ (), где имеет оценка β_1'. (Это предполагает, что Вы использовали естественные логарифмы, то есть, логарифмы, чтобы основывать е, преобразовать модель.)



Вот диаграмма разброса, показывающая ежегодные домашние расходы на FDHO, еда, которую съели дома, и EXP, полные ежегодные домашние расходы, оба измеренные в долларах, на 1995 для образца 869 домашних хозяйств в Соединенных Штатах (Потребительские данные об Обзоре Расходов).

```
. reg FDHO EXP

------------------------------------------------------------------------------
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =    6334
-------------+------------------------------           F(  1,  6332) = 3431.01
       Model |   972602566     1   972602566           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  1.7950e+09  6332  283474.003           R-squared     =  0.3514
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.3513
       Total |  2.7676e+09  6333   437006.15           Root MSE      =  532.42
------------------------------------------------------------------------------
        FDHO |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         EXP |   .0627099   .0010706    58.57   0.000     .0606112    .0648086
       _cons |   369.4418   10.65718    34.67   0.000     348.5501    390.3334
------------------------------------------------------------------------------
```

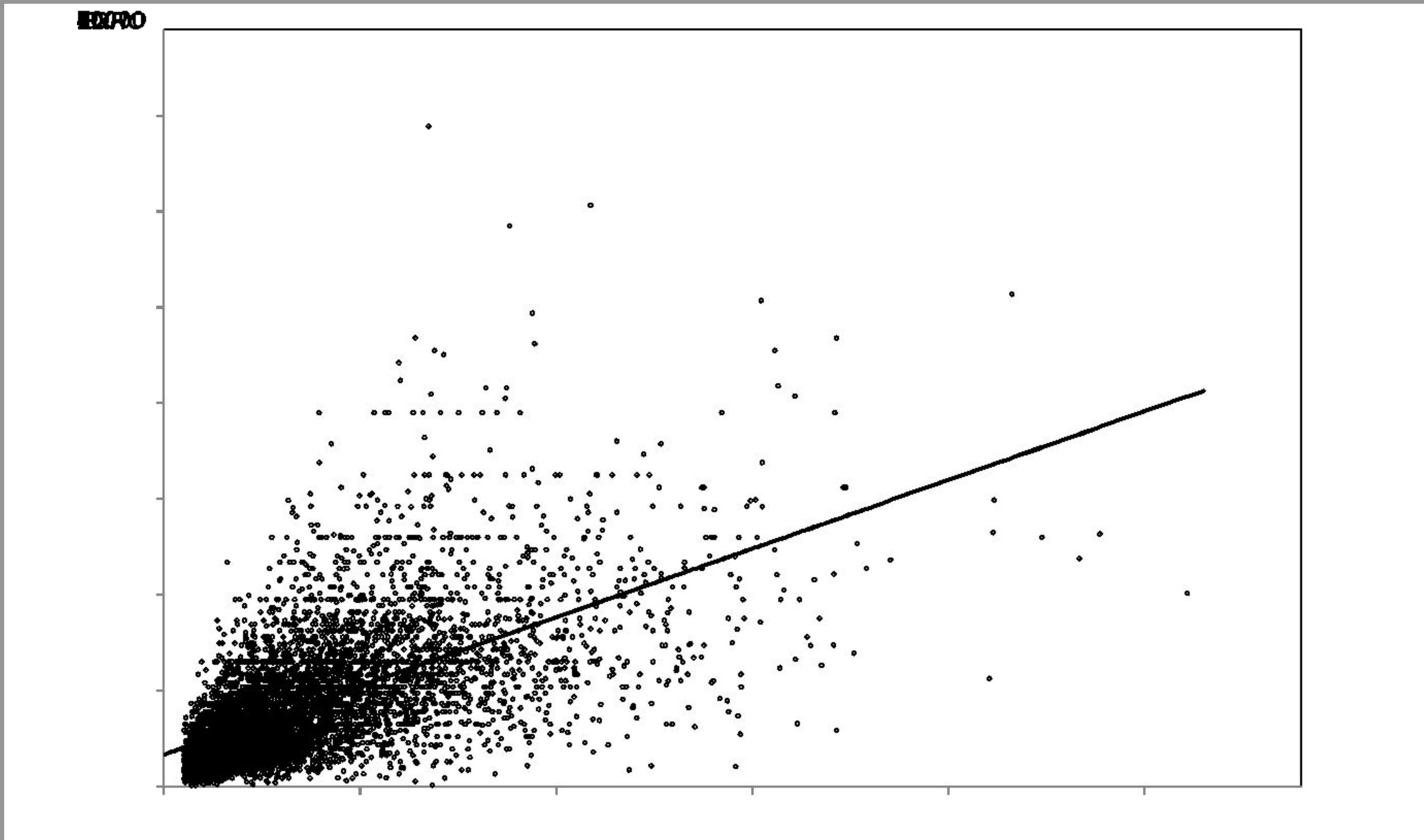
Вот регресс FDHO на ЭКСПОРТЕ, обычно связать типы потребительских расходов к общим расходам, а не доход, используя домашние данные. Данные о доходе семьи имеют тенденцию быть относительно неустойчивыми.

```
. reg FDHO EXP

------------------------------------------------------------------------------
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =    6334
-------------+------------------------------           F(  1,  6332) = 3431.01
       Model |   972602566     1   972602566           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  1.7950e+09  6332  283474.003           R-squared     =  0.3514
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.3513
       Total |  2.7676e+09  6333   437006.15           Root MSE      =  532.42
------------------------------------------------------------------------------
        FDHO |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         EXP |   .0627099   .0010706    58.57   0.000     .0606112    .0648086
       _cons |   369.4418   10.65718    34.67   0.000     348.5501    390.3334
------------------------------------------------------------------------------
```

Регресс подразумевает, что на краю 6.3 центов из каждого доллара расходов потрачены на еду дома. Это кажется вероятным? Вероятно, хотя возможно немного низко

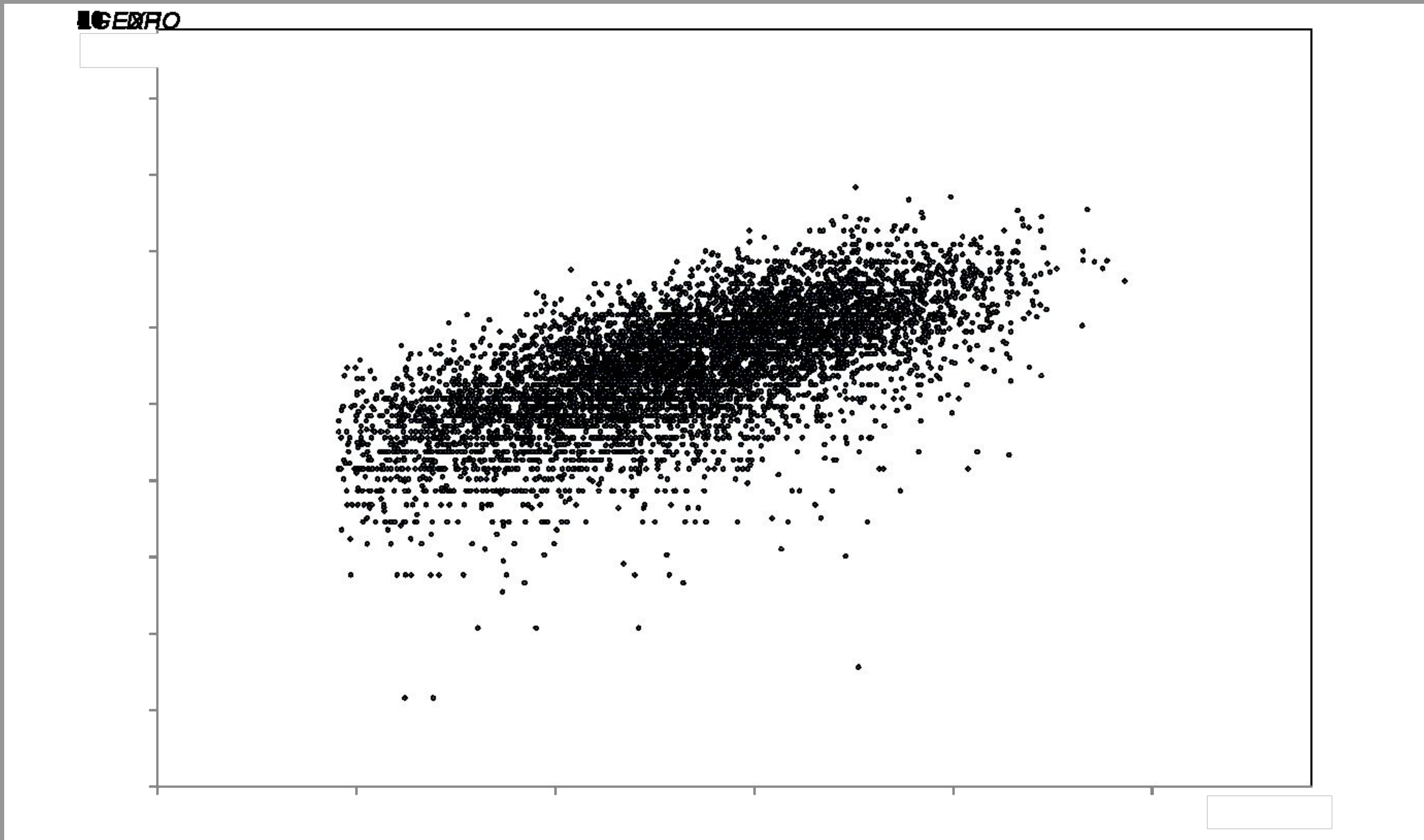
```
. reg FDHO EXP

------------------------------------------------------------------------------
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =    6334
-------------+------------------------------           F(  1,  6332) = 3431.01
       Model |   972602566     1   972602566           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  1.7950e+09  6332  283474.003           R-squared     =  0.3514
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.3513
       Total |  2.7676e+09  6333   437006.15           Root MSE      =  532.42
------------------------------------------------------------------------------
        FDHO |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         EXP |   .0627099   .0010706    58.57   0.000     .0606112    .0648086
       _cons |   369.4418   10.65718    34.67   0.000     348.5501    390.3334
------------------------------------------------------------------------------
```

Это также предполагает, что 369$ были бы потрачены на еду дома, если бы общие расходы были нолем. Очевидно, это невозможно. Могло бы быть возможно интерпретировать его так или иначе как расходы основания, но мы должны будем принять во внимание размер семьи и состав



Вот линия регресса, подготовленная на диаграмме разброса

ЭЛАСТИЧНОСТИ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ



Мы будем теперь соответствовать постоянной функции эластичности, используя те же самые данные. Диаграмма разброса показывает логарифм FDHO, подготовленной против логарифма ЭКСПОРТА

```
. g LGFDHO = ln(FDHO)
. g LGEXP = ln(EXP)
```

```
. reg LGFDHO LGEXP
```

```
----------------------------------------------------------------------------
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =    6334
-------------+------------------------------           F(  1,  6332) = 4719.99
       Model |  1642.9356     1   1642.9356            Prob > F      =  0.0000
    Residual | 2204.04385  6332  .348080204            R-squared     =  0.4271
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.4270
       Total | 3846.97946  6333  .60744978             Root MSE      =  .58998
----------------------------------------------------------------------------
      LGFDHO |      Coef.   Std. Err.       t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+--------------------------------------------------------------
       LGEXP |   .6657858   .0096909    68.70   0.000     .6467883    .6847832
       _cons |   .7009498   .0843607     8.31   0.000     .5355741    .8663254
----------------------------------------------------------------------------
```

Вот результат регресса LGFDHO на LGEXP. Первые две команды производят логарифмические переменные.

```
. g LGFDHO = ln(FDHO)
. g LGEXP = ln(EXP)
```

```
. reg LGFDHO LGEXP
```

```
------------------------------------------------------------------------------
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =    6334
-------------+------------------------------           F(  1,  6332) = 4719.99
       Model |  1642.9356      1   1642.9356           Prob > F      =  0.0000
    Residual | 2204.04385   6332  .348080204           R-squared     =  0.4271
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.4270
       Total | 3846.97946   6333   .60744978           Root MSE      =  .58998
------------------------------------------------------------------------------
      LGFDHO |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       LGEXP |   .6657858   .0096909    68.70   0.000     .6467883    .6847832
       _cons |   .7009498   .0843607     8.31   0.000     .5355741    .8663254
------------------------------------------------------------------------------
```

Оценка эластичности 0.67. Это кажется вероятным?

```
. g LGFDHO = ln(FDHO)
. g LGEXP = ln(EXP)
```

```
. reg LGFDHO LGEXP
```

```
------------------------------------------------------------------------------
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =    6334
-------------+------------------------------           F(  1,  6332) = 4719.99
       Model |  1642.9356     1   1642.9356            Prob > F      =  0.0000
    Residual | 2204.04385  6332  .348080204            R-squared     =  0.4271
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.4270
       Total | 3846.97946  6333   .60744978            Root MSE      =  .58998
------------------------------------------------------------------------------
      LGFDHO |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       LGEXP |   .6657858   .0096909    68.70   0.000     .6467883    .6847832
       _cons |   .7009498   .0843607     8.31   0.000     .5355741    .8663254
------------------------------------------------------------------------------
```

Да, определенно. Еда - нормальная польза, таким образом, ее эластичность должна быть положительной, но это - предмет первой необходимости. Расходы на него должны обычно расти менее быстро, чем расходы, таким образом, его эластичность должна быть меньше чем 1

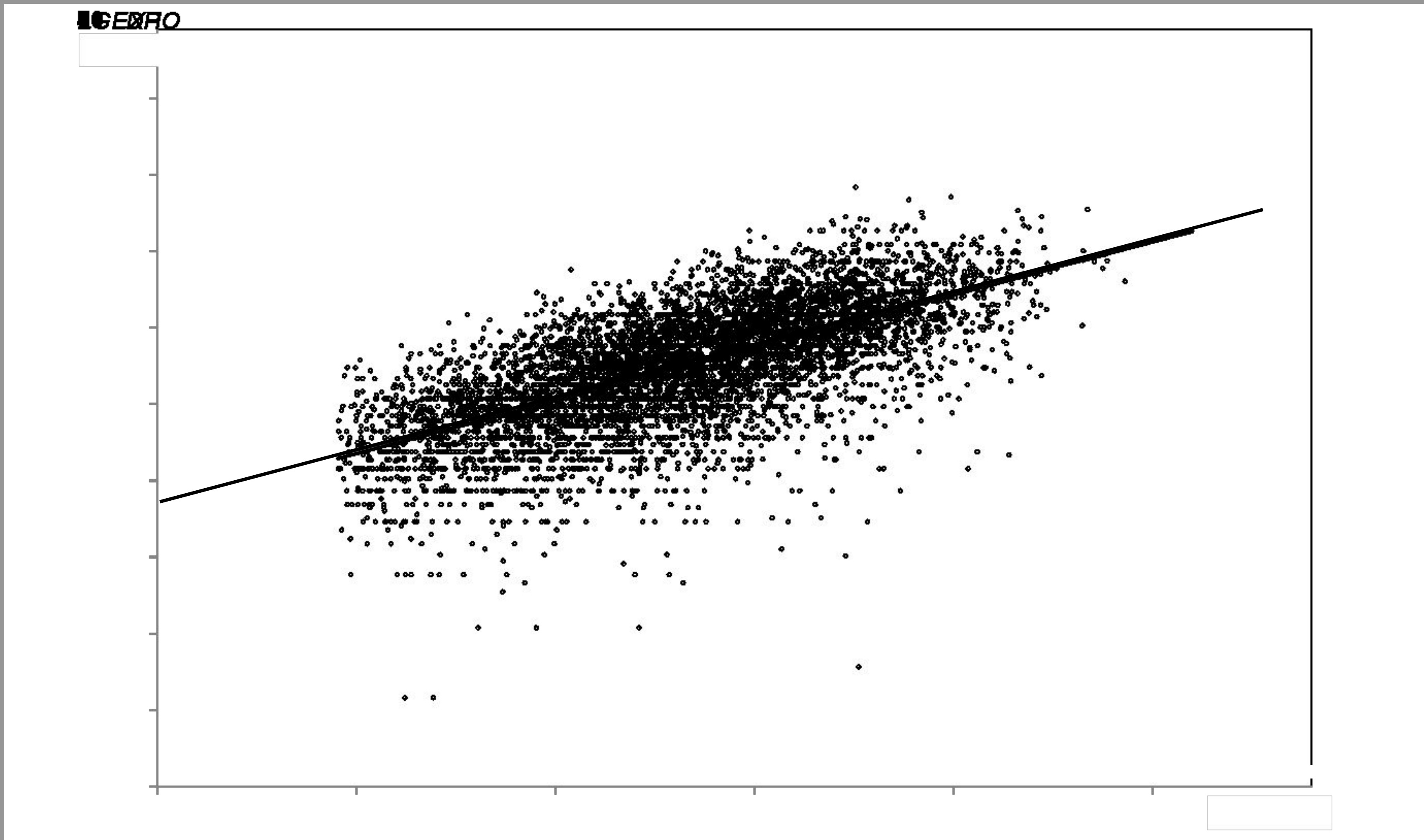
```
. g LGFDHO = ln(FDHO)
. g LGEXP = ln(EXP)
```

```
. reg LGFDHO LGEXP
```

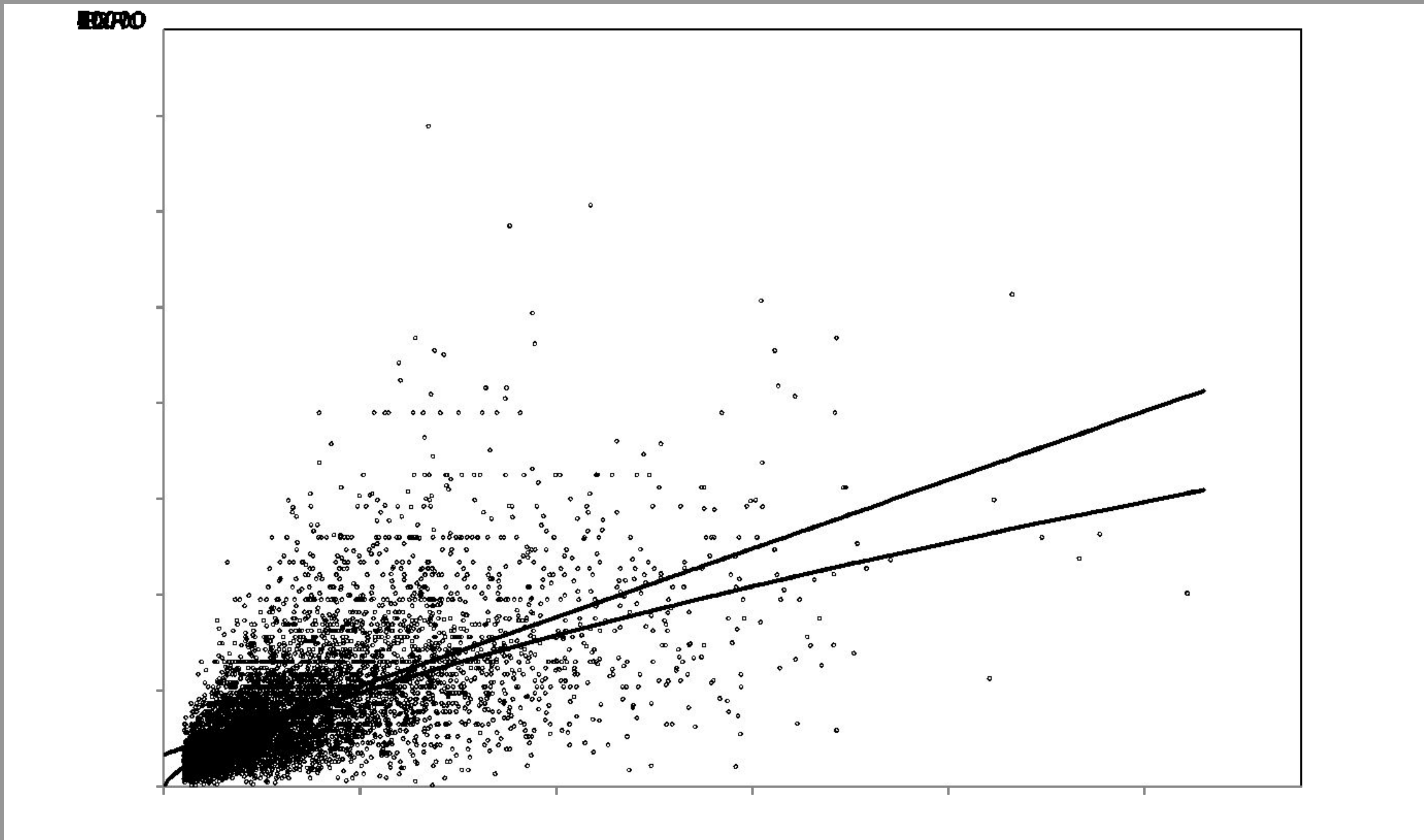
```
------------------------------------------------------------------------------
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =    6334
-------------+------------------------------           F(  1,  6332) = 4719.99
       Model |  1642.9356     1  1642.9356             Prob > F      =  0.0000
    Residual | 2204.04385  6332  .348080204            R-squared     =  0.4271
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.4270
       Total | 3846.97946  6333  .60744978             Root MSE      =  .58998
------------------------------------------------------------------------------
      LGFDHO |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       LGEXP |   .6657858   .0096909    68.70   0.000     .6467883    .6847832
       _cons |   .7009498   .0843607     8.31   0.000     .5355741    .8663254
------------------------------------------------------------------------------
```

$$\widehat{LGFDHO} = 0.701 + 0.666 LGEXP \quad \Rightarrow \quad \widehat{FDHO} = 2.02 EXP^{0.666}$$

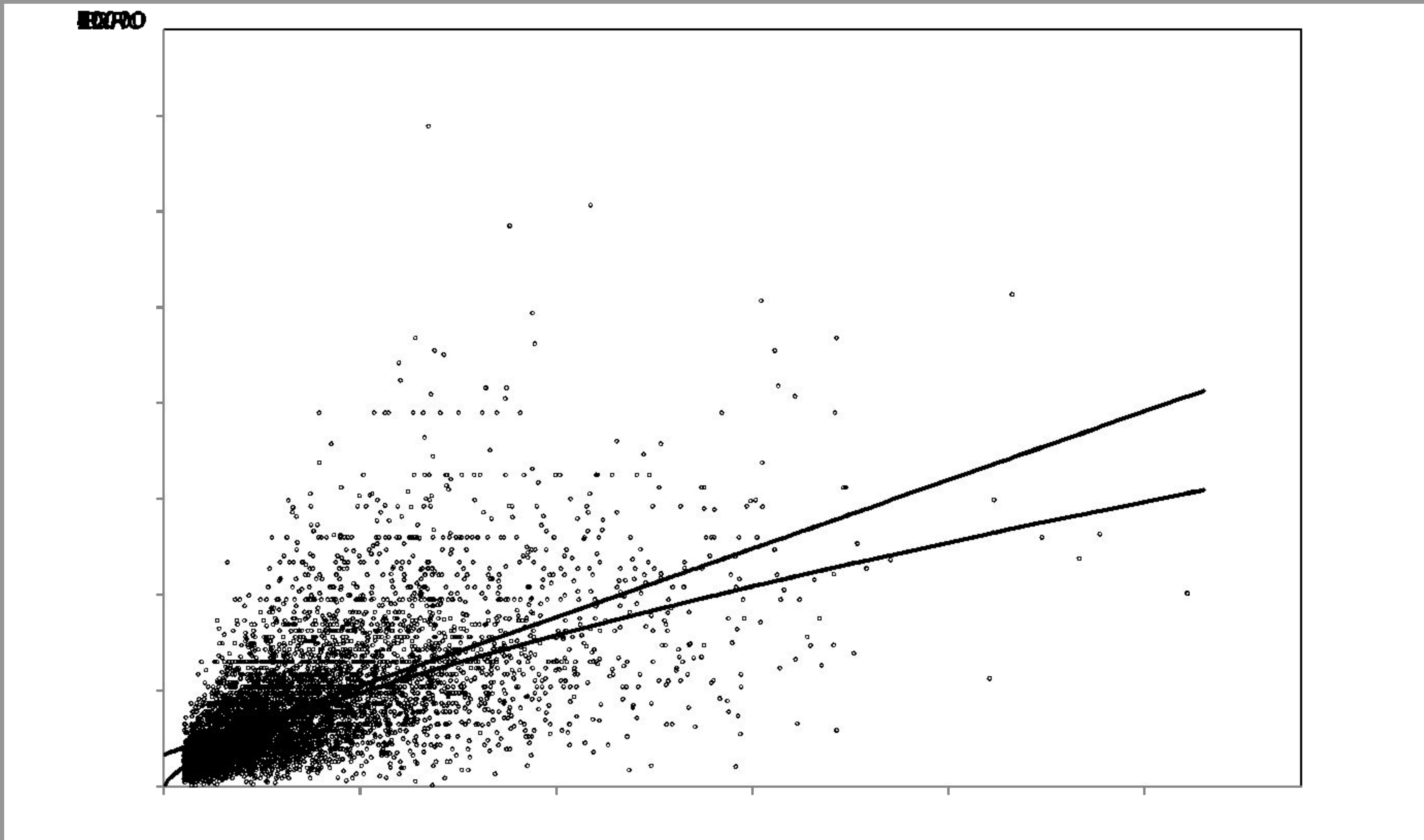
У точки пересечения нет самостоятельного значения. Чтобы получить оценку b1, мы вычисляем e0.701, который является 2.02.



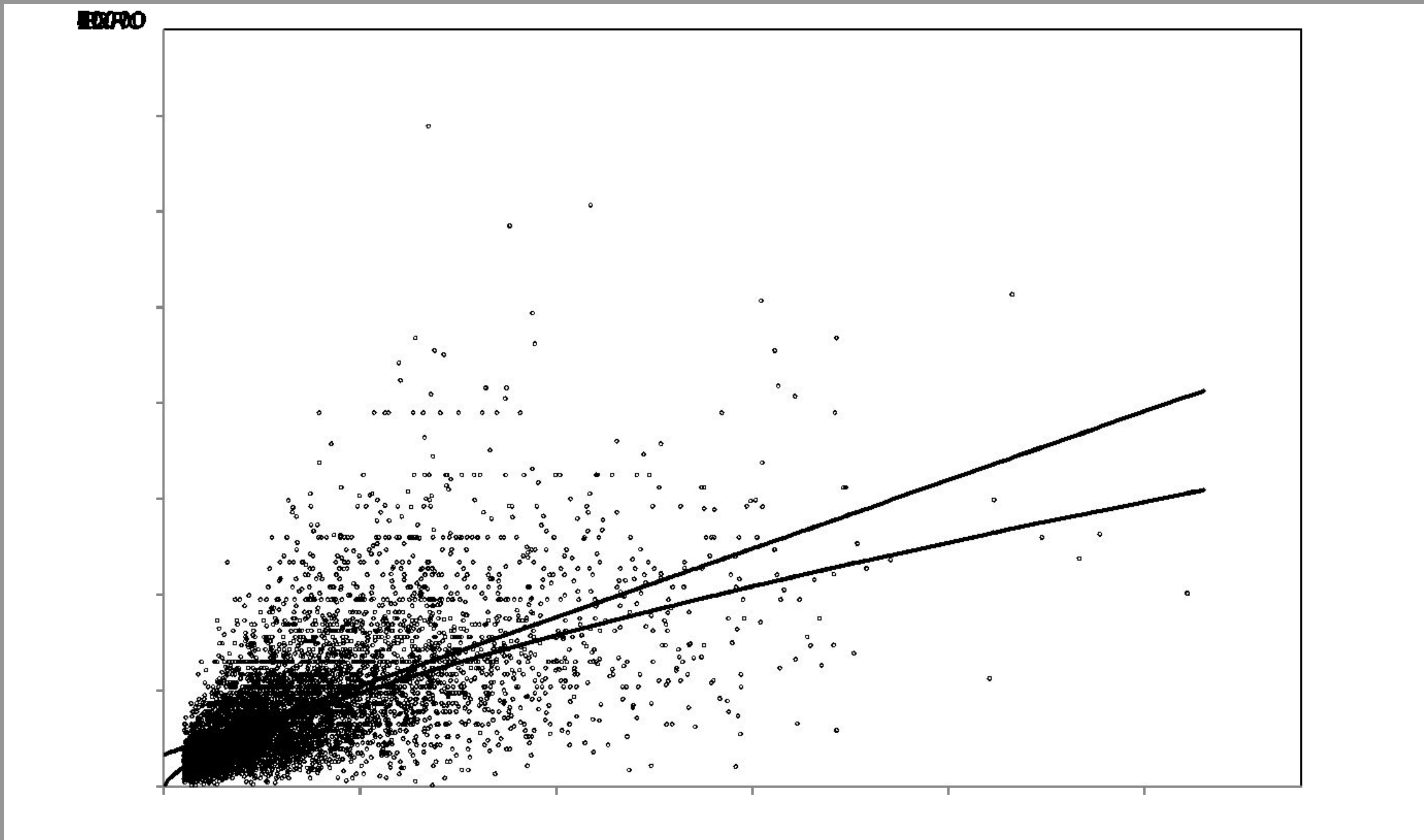
Вот диаграмма разброса с подготовленной линией регресса



Вот линия регресса от логарифмического регресса, подготовленного в оригинальной диаграмме разброса, вместе с линейной линией регресса для сравнения



Вы видите, что логарифмическая линия регресса дает несколько лучшую подгонку, особенно на низких уровнях расходов



Однако различие в подгонке не существенное. Главная причина для предпочтения постоянной модели эластичности состоит в том, что это имеет больше смысла теоретически. У этого также есть техническое преимущество, в которое мы приедем позже, когда мы обсудим heteroskedasticity.