1. Ю.Н.Карамзин, А.П.Сухоруков, В.А.Трофимов. Математическое моделирование в нелинейной оптике. М., Изд-во МГУ, 1989.

2. Н.Бахвалов, Н.Жидков, Г.Кобельков. Численные методы. М., Физматлит, 2001.

3. А.А.Самарский, А.В.Гулин. Численные методы математической физики. 2000.

4. Г. Агравал. Нелинейная волоконная оптика. 1996

5. Г.И. Марчук. Методы вычислений, 1977

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТОВОГО ПУЧКА В СРЕДЕ С КУБИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

$$\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{i}{2k}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)=-\frac{ik}{2\varepsilon_0}\varepsilon_{нл}\left(|A|^2\right)A,$$

$$\varepsilon_{нл}=2n_0 n_{нл},\; n_{нл}=n_2|A|^2$$

УЧЕТ ТЕПЛОВОГО МЕХАНИЗМА ИЗМЕНЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

$$n_{нл}=\frac{\partial n}{\partial T}T$$

$$\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{i}{2k}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right)=-\frac{ik}{2}\frac{\partial n}{\partial T}TA-\delta A,$$

$$\rho c_p\left(V\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)=\kappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+\frac{cn_0\delta}{8\pi}|A|^2,$$

$$\eta=t-z/u \qquad A=\{A_m\},\; m=1,\dots,N$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0$$

- нет диффузии тепла вдоль оси распространения

Однофотонное и двухфотонное поглощение (стационарный случай)

$$\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{i}{2k}\Delta_{\perp}A=-i\gamma N_0 T_2\left|d_{21}\right|^2\hbar^{-1}\frac{i-\Theta+p\left|A\right|^2(1-2T_1/T_2)}{1+(\Theta-p\left|A\right|^2)^2+m_1\left|A\right|^2}A,$$

$$\gamma=2\pi N_a\omega/cn_0,\ \Theta=(\omega-\omega_{21})T_2,\ p=T_2(\kappa_1-\kappa_2)/\hbar,$$

$$m_1=4\left|d_{21}\right|^2T_1T_2\hbar^2,\ \tau_{pulse}>>T_1,T_2$$

T_1,T_2 – *продольное и поперечное времена релаксации*

$$\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{i}{2k}\Delta_{\perp}A=-\frac{i\gamma N_0 m_2\hbar}{2T_1}\frac{i-\Theta(1-T_1/T_2)p\left|A\right|^2}{1+(\Theta-p\left|A\right|^2)^2+\left|A\right|^4}\left|A\right|^2A,$$

$$m_2=4r_{12}T_1T_2,\ r_{12}=\hbar^{-2},\ \Theta=(2\omega-\omega_{21})T_2$$

Нестационарный случай двухфотонного резонанса

$$\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{n_0}{c}\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{i}{2k}\Delta_\perp A=-\frac{2\pi i\omega N_a\hbar}{n_0 c}\left(\frac{\kappa_1-\kappa_2}{2\hbar}\left(N_0-N\right)A+2r_{12}\rho_{12}A^*\right),$$

$$\frac{\partial\rho_{12}}{\partial t}+\frac{\rho_{12}}{T_2}+i\left(\upsilon-\frac{\kappa_1-\kappa_2}{2\hbar}\left|A\right|^2\right)\rho_{12}=-ir_{12}\left|A\right|^2 N,$$

$$\tau_{pulse}\approx T_1, T_2$$

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ МОДУЛИРОВАННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

$$\frac{\partial A_m}{\partial z} + \mathscr{L}_m(x, y) A_m + \mathscr{L}_m(\eta) A_m = F_m(A_1, A_2, \ldots,$$

$$A_N, A_1^*, \ldots, A_N^*, x, y, z, \eta), \quad m = 1, 2, \ldots, N.$$

Здесь

$$\mathscr{L}_m(x, y) \equiv \beta_m \frac{\partial}{\partial x} + i D_m \Delta_\perp,$$

$$\mathscr{L}_m(\eta) \equiv \nu_m \frac{\partial}{\partial \eta} + i \widetilde{D}_m \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}.$$

Начальные условия имеют вид

$$A_m(0, x, y, \eta) = A_m^{(0)}(x, y, t).$$

ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

Существуют при условиях

1) $$\mathrm{Re}\left(\sum_{m=1}^{N} F_m A_m^*\right) = 0;$$

2) существуют такие действительные константы φ_m, что

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{m=1}^{N} \varphi_m F_m \nabla A_m^*\right) = \nabla U,$$

$\nabla = \left\{ \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial \eta, \partial/\partial z \right\}$, **U – действительная функция 2N переменных, такая что**

$$\varphi_m F_m = i\frac{\partial U}{\partial A_m^*}, \varphi_m F_m^* = -i\frac{\partial U}{\partial A_m}$$

$$I_1 = \iiint\limits_G \sum_{m=1}^{N} |A_m|^2 dx dy d\eta,$$

$$I_2 = \iiint\limits_G \sum_{m=1}^{N} (\varphi_m A_m \nabla A_m^*) dx dy d\eta,$$

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial \eta} \right\},$$

$$I_3 = \iiint\limits_G \Bigg\{ \sum_{m=1}^{N} \varphi_m \Bigg[D_m \left(\left|\frac{\partial A_m}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial A_m}{\partial y}\right|^2 \right) + \beta_m \,\mathrm{Im}\left(A_m \frac{\partial A_m^*}{\partial x}\right) + \widetilde{P}_m \left|\frac{\partial A_m}{\partial \eta}\right|^2 + \nu_m \,\mathrm{Im}\left(A_m \frac{\partial A_m^*}{\partial \eta}\right) \Bigg] + U(A_1, A_2, \ldots, A_N, A_1^*, \ldots, A_N^*) \Bigg\} dx dy d\eta,$$

т. е. $dI_s/dz = 0$, $I_s(z) = I_s(0)$, $s = 1, 2, 3$.

$$\mathscr{L}^*_m(x,y) = -\mathscr{L}_m(x,y), \quad \mathscr{L}^*_m(\eta) = -\mathscr{L}_m(\eta)$$

1-ый интеграл

Если выполняется условие 1), то умножаем уравнения скалярно на A_m и складываем

$$\frac{d}{dz}\sum_{m=1}^{N} \|A_m\|^2 = 0,$$

$$\frac{dI_1}{dz} = 0, \quad \|A_m\|^2 = (A_m, A_m).$$

2-ой и 3-ий интегралы

Пусть выполняется 2), тогда сначала используем формулы интегрирования по частям

$$\operatorname{Im}(\mathscr{L}(x,y)A, v) = \begin{cases} 0, & v = \dfrac{\partial A}{\partial x}, \\ 0, & v = \dfrac{\partial A}{\partial y}, \\ 0, & v = \dfrac{\partial A}{\partial \eta}, \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial z}\left[\beta \operatorname{Im}\left(A, \dfrac{\partial A}{\partial x}\right) + D\|\nabla_\perp A\|^2\right], & v = \dfrac{\partial A}{\partial z}; \end{cases} \tag{1.52}$$

$$\operatorname{Im}(\mathscr{L}(\eta)A, v) = \begin{cases} 0, & v = \partial A/\partial x, \\ 0, & v = \partial A/\partial y, \\ 0, & v = \partial A/\partial \eta, \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial z}\left[\nu \operatorname{Im}\left(A, \dfrac{\partial A}{\partial \eta}\right) + \tilde{D}\left\|\dfrac{\partial A}{\partial \eta}\right\|^2\right], & v = \dfrac{\partial A}{\partial z}. \end{cases} \tag{1.53}$$

Умножаем уравнения скалярно на $\varphi_m \nabla A_m$ **и складываем**

Для $\nabla = \left\{ \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial \eta \right\}$ **получаем 2-ой интеграл,**

для $\nabla = \partial/\partial z$ **- 3-ий интеграл.**

Для среды с кубичной нелинейностью $U = \varphi \left| A \right|^4$

Трехчастотное взаимодействие

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{i}{2k_1}\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} \right) = -i\alpha_1 A_3 A_2^* e^{-i\Delta kz},$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{i}{2k_2}\left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} \right) = -i\alpha_2 A_3 A_1^* e^{-i\Delta kz},$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} + \frac{i}{2k_3}\left(\frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2} \right) = -i\alpha_3 A_1 A_2 e^{-i\Delta kz}, \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3$$

$$\varphi_m = 1/\alpha_m, U = -2\,\mathrm{Re}\left\{ A_1 A_2 A_3^* \right\}$$

Соотношения Мэнли-Роу

$$I_{1,3} = \frac{\|A_1(z)\|^2}{\alpha_1} + \frac{\|A_3(z)\|^2}{\alpha_3} = \mathrm{const},$$

$$I_{2,3} = \frac{\|A_2(z)\|^2}{\alpha_2} + \frac{\|A_3(z)\|^2}{\alpha_3} = \mathrm{const}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3,$$

Нелинейность керровского типа при аксиально-симметричном распространении

Координаты (r,z)

Стационарное взаимодействие произвольного числа электромагнитных волн в нелинейной среде, когда отсутствует двулучепреломление, можно пренебречь эффектами дисперсионного расплывания импульсов и групповые скорости всех волн одинаковы

$$\frac{\partial A}{\partial z} + iD\Delta_r A = F(A,\ A^*),$$

$$A(0,r) = A^{(0)}(r),$$

$$\frac{\partial A}{\partial r}(z,\ 0) = A(z,\ R) = 0, \quad \Delta_r \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right).$$

Здесь $(z,\ r) \in G$, $G = \{(z,\ r): 0 < r \leqslant R,\ 0 \leqslant z \leqslant L_z\}$,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Схема строится на равномерной сетке со сдвигом по поперечной координате

$$\omega_z = \{z = z_\text{к},\ z_\text{к} = \text{к}h_z, \quad \text{к} = 0,\ 1,\ \ldots,\ N_z - 1,\ h_z = L_z/N_z\},$$

$$\omega_r = \{r = r_l,\ r_l = (l + 0{,}5)h_r,\ l = 0,\ 1,\ \ldots,\ N_r - 1,\ h_r = R/(N_r + 0{,}5)\},$$

$$\omega = \omega_z \times \omega_r.$$

Аппроксимация оператора Лапласа

$$\Lambda_r v(r) \equiv \frac{1}{r}\left(\bar{r} v_{\bar{r}}\right)_r = \frac{1}{r h_r}\left[(r+0{,}5h_r)\frac{v(r+h_r)-v(r)}{h_r} - (r-0{,}5h_r)\frac{v(r)-v(r-h_r)}{h_r}\right],$$

$$\Lambda_r v = \Delta_r v + O\left(h_r^2/r\right)$$

Схема

$$\frac{u(z+h_z,\ r)-u(z,\ r)}{h_z} + iD\Lambda_r U(z,\ r) = F(U(z,\ r),\ U^*(z,\ r)),$$

$$u(0,\ r) = A^{(0)}(r),$$

$$u(z,\ R) = 0.$$

Простые итерации

$$\frac{\overset{s+1}{u}(z+h_z,\ r)-u(z,\ r)}{h_z} + iD\Lambda_r \overset{s+1}{U}(z,\ r) = F(\overset{s}{U}(z,r),\ \overset{s}{U}{}^*(z,r)),$$

$$\overset{s}{u}(z+h_z,\ R) = 0,\ \overset{s}{U}(z,r) = 0{,}5(\overset{s}{u}(z+h_z,\ r)+u(z,\ r)),$$

$$\overset{(0)}{u}(z+h_z,\ r) = u(z,\ r),\ s=0,\ 1,\ \ldots,\ (z,\ r)\in\omega.$$

При условии $h_z \le c h_r^{q+1}$ **итерации сходятся со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем** $\bar{q} \approx h_z / h_r^{q+1}$ **. q связано с условием на правую часть:** $|F_m| \le C_0 \left(1 + \prod_{j=1}^{N} |A_j|^{q_j - 1}\right)$

Схема консервативна, т.е. сохраняет разностные аналоги 1-го – 3-го интегралов

$$I_1^{(h)} = \sum_{l=0}^{N_r-1} \left|u(z_k, r_l)\right|^2 r_l h_r$$

$$I_2^{(h)} = \sum_{l=0}^{N_r-1} u(z_k, r_l) u_r r_l h_r$$

$$I_3^{(h)} = \sum_{l=0}^{N_r-1} \left[D|u_r|^2 + U\left(u(z_k, r_l), u^*(z_k, r_l)\right)\right] r_l h_r$$

Скорость сходимости схемы $O\left(h_r^2 \sqrt{\ln h_r^{-1}} + h_z^2\right)$ **в сеточной норме, связанной со скалярным произведением** $(u, v) = \sum_{l=0}^{N_r-1} u(r_l) v^*(r_l) r_l h_r$ **при** $h_z \le c h_r^{q+2}$