

**Занятие № 1 ОСНОВНЫЕ  
ПОНЯТИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ  
ОПЕРАЦИЙ.**

**Тема № 1 МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ПРОГРАММИРОВАНИЯ.**

## **Учебные цели:**

Изучение основных понятий исследования операций, постановку и классификацию задач математического программирования

## **Воспитательные цели:**

Формирование мотивации к изучению моделей математического программирования.

## **Содержание занятия**

1. Математическая модель операции
2. Эффективность и оптимальность.
3. Классификация задач исследования операций.

# Литература:

---

## □ Основная литература:

1. Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие для вузов /Н.Ш. Кремер, БА. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. - М.: ЮНИТИ, 2005. - 407 с.
2. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер. с англ. — М.: Издательский дом "Вильямс", 2005. — 912 с: ил.
3. Лебедев О.Т., Язвенко С.А. Основы системного анализа. Учеб. Пособие. – СПб.: Государственная экономическая академия, 2000. – 110 с.

## □ Дополнительная литература

1. Васин А.А., Морозов В.В. Введение в теорию игр с приложениями к экономике. МГУ им. М.В. Ломоносова, 2003. 277 с.
2. Карманов В.Г. Математическое программирование: учебное пособие. ФИЗМАТЛИТ, 2011 г. 264 с.
3. Палий И. А. Линейное программирование. Учебное пособие / И. А. Палий. — М.: Эксмо, 2008. — 256 с.

# 1. Математическая модель операции

---

Принятие решений всегда было и остается наиважнейшим аспектом человеческой деятельности. Существуют различные подходы к принятию решений:

- на основе предшествующего опыта;
- на основе здравого смысла;
- на основе метода аналогий;
- интуитивный и др.

Однако практика управления во всех областях и на всех уровнях нуждается в широком и эффективном использовании ***математических методов.***

# 1. Математическая модель операции

---

С точки зрения математического описания под принятием решений понимается выбор из некоторого множества  $U$  элемента  $u$ . При этом определяется **правило выбора**  $u \in U$  и **целесообразность выбора**.

Математическая теория принятия оптимальных (рациональных, целенаправленных) решений называется **теорией исследования операций**. Таким образом, задачей теории исследования операций является построение количественных методов анализа процессов при принятии решений во всех областях человеческой деятельности.

# 1. Математическая модель операции

---

Перед исследованием операций стоят следующие проблемы:

- составление математических моделей задач принятия решений;
- исследование вопросов существования оптимальных решений в различных классах задач;
- разработка необходимых и достаточных признаков оптимальности в различных классах задач;
- разработка методов численного определения оптимальных решений.

# 1. Математическая модель операции

---

- ▣ **Операцией** называется совокупность взаимосогласованных действий, направленных на достижение вполне определенной цели.
- ▣ **Оперирующей стороной** называются отдельные лица или коллективы, объединенные организационным руководством и активно стремящиеся (в рамках данной операции) к достижению поставленной цели.
- ▣ **Активными средствами** проведения операции называется совокупность материальных, энергетических, денежных, трудовых и других ресурсов, а также организационных возможностей, используемых оперирующей стороной для обеспечения успешного хода операции и достижения ее цели.

# 1. Математическая модель операции

---

- ▣ **Стратегиями** оперирующей стороны в данной операции называются допустимые способы расходования ею имеющихся активных средств.
- ▣ **Действующими факторами операции** называются объективные условия и обстоятельства, определяющие ее особенности и непосредственно влияющие на ее исход.
- ▣ **Критерием эффективности операции** (или выбранной стратегии) называется показатель требуемого, ожидаемого, достигнутого соответствия между результатом предпринимаемых действий и целью операции.

# 1. Математическая модель операции

---

Примеры действующих факторов:

- фиксированная продолжительность рабочей смены,
- наличие резервов внешней памяти ЭВМ,
- обязательность контроля информации в процессе обработки (определенные факторы),
- погодные условия на воздушных трассах,
- надежность арендуемых каналов передачи данных,
- характер действий разумного противника в том или ином конфликте (неопределенные факторы).

# 1. Математическая модель операции

---

Примеры критериев:

- полная стоимость перевозки грузов со складов к местам назначения (в транспортной задаче),
- полное время занятости поточной линии назначенными работами (в задаче составления календарных планов),
- вероятность своевременного обслуживания заявки на ремонтном участке (в задаче массового обслуживания),
- вероятность обнаружения неисправности электронной схемы (в задаче диагностики).

# 1. Математическая модель операции

---

- **Состоянием операции в некоторый момент времени  $t$**  называется совокупность ее характеристик (особенностей), проявляющихся в этот момент и отражающих объективно сложившееся, положение дел.
- **Математической моделью операции** называются формальные соотношения, устанавливающие связь принятого критерия эффективности с действующими факторами операции.
- **Решением**, связанным с выбранной математической моделью называется конкретный набор значений управляемых (контролируемых) параметров (фазовых переменных).

# 1. Математическая модель операции

---

Решение можно получить различным путем, с различной степенью точности, в различных предположениях свойств неуправляемых (неконтролируемых) параметров, но независимо от этого оно должно рассматриваться лишь как вспомогательный материал, нуждающийся в осмыслении и сопоставлениях. Ни одна формальная модель не может дать исчерпывающих сведений о развитии реальных событий (практически всегда присутствуют неконтролируемые факторы), но получаемые с ее помощью решения позволяют оперирующей стороне ориентироваться в окружающей обстановке, вносить полезные уточнения в модель, анализировать различные стратегии, выявлять второстепенные факторы планируемой операции.

# 1. Математическая модель операции

---

▣ **Основная задача исследования операций** — найти в рамках принятой модели такие решения, которым отвечают экстремальные значения критерия  $K$ .

Таким образом, внимание исследователя операций концентрируется на критерии  $K$  и проблеме его увеличения или уменьшения (по смыслу задачи). Критерий становится эквивалентом цели операции в данной модели, а совокупность условий, обеспечивающих достижение экстремальных (или почти экстремальных) значений  $K$ , определяет оптимальные (или рациональные) стратегии оперирующей стороны.

# 1. Математическая модель операции

---

Существует много различных классификаций математических моделей.

По одной из основных классификаций модели делят на **динамические**, в которых явно присутствует переменная времени, и **статические**, в которых этой переменной нет. В реальности все процессы протекают во времени, поэтому динамические модели, вообще говоря, более точно описывают действительность. Для проведения исследования часто ограничиваются простыми статическими моделями. При этом стратегию и воздействие неконтролируемых факторов представляют в виде единичного акта, фазовые переменные исключают, и критерий эффективности представляют как функцию только стратегий и неконтролируемых факторов, т.е.

$$W=F(x,y). \quad (1.1)$$

# 1. Математическая модель операции

---

Переход от динамической формы модели к статической называется нормализацией. Фактически в ходе исследования можно сразу строить статическую модель, минуя динамическую. Несмотря на внешнюю простоту выражения (1.1), связь между значениями критерия, стратегии и неконтролируемого фактора может быть весьма сложной. Иногда ее не удастся представить в явном виде, тогда она задается с помощью промежуточных соотношений или в виде вычислительного алгоритма.

С учетом сказанного, получаем математический объект

$$\{W, x, y\},$$

где  $x \in X$  – множество (пространство) допустимых стратегий,  $y \in Y$  – множество значений неконтролируемых факторов.

Он называется **статической (нормальной) формой** математической модели операции.

## 2. ЭФФЕКТИВНОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОСТЬ

---

Основная задача исследования операций состоит в сравнении между собой различных стратегий и выборе наилучшей из них. Возникает вопрос: на основании чего сравнивать стратегии. На первый взгляд ответ прост – с помощью критерия эффективности, который собственно для этого и задается. На самом деле для сравнения стратегий критерия эффективности достаточно только в том случае, когда у нас нет неконтролируемых факторов или имеются лишь фиксированные неконтролируемые факторы. При наличии случайных или неопределенных неконтролируемых факторов сравнивать между собой стратегии непосредственно с помощью критерия эффективности невозможно, хотя и в этом случае критерий лежит в основе сравнения.

## 2. ЭФФЕКТИВНОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОСТЬ

---

Для того чтобы иметь возможность сравнивать стратегии, удобнее всего иметь численную оценку каждой стратегии. Оценка, ставящая в соответствие каждой стратегии  $X$  действительное число, т.е. являющаяся функцией переменной  $x$ , называется **оценкой эффективности стратегии**. Если имеется только фиксированный неконтролируемый фактор, т.е.  $y$  принимает известное исследователю операции значение  $y^0$ , то критерий эффективности  $W=F(x, y^0)$  является функцией только  $x$ .

Введем обозначение  $f_0(x)=F(x, y^0)$ . Величина  $f_0(x)$  может служить оценкой эффективности стратегии. При этом стратегия  $x_1$  лучше стратегии  $x_2$ , если  $f_0(x_1) > f_0(x_2)$ . Естественным образом определяется в этом случае и наилучшая или оптимальная стратегия. Это такая стратегия  $x^0$ , для которой выполняется соотношение

$$f_0(x^0) \geq f_0(x) \mid \forall x \in X \quad (1.2)$$

## 2. ЭФФЕКТИВНОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОСТЬ

---

Пусть теперь имеются случайные или неопределенные факторы. В этом случае для фиксированной стратегии  $x^*$  критерий эффективности  $W=F(x^*, y)$  является функцией от  $y$ , а не фиксированным числом, и значит не может служить оценкой эффективности. Каждой стратегии уже соответствует не одно, а несколько значений критерия эффективности и результат сравнения стратегий с помощью критерия оказывается неопределенным.

## 2. ЭФФЕКТИВНОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОСТЬ

---

▣ Если имеется случайный неконтролируемый фактор, представляющий собой случайную величину с известным исследователю операции законом распределения, то в качестве оценки эффективности чаще всего используется математическое ожидание критерия эффективности. Пусть неконтролируемый фактор  $y$  принимает  $n$  значений  $y_1, \dots, y_n$  с вероятностями  $p_1, \dots, p_n$ , тогда математическое ожидание определяется по формуле

$$\blacktriangleright M_y F(x, y) = \sum_{i=1}^n p_i F(x, y_i) \quad (1.3)$$

▣ Значит, в качестве оценки эффективности стратегии берется функция

$$\blacktriangleright f_c(x) = \sum_{i=1}^n p_i F(x, y_i) \quad (1.4)$$

## 2. ЭФФЕКТИВНОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОСТЬ

---

- ▶ При наличии случайных неконтролируемых факторов могут использоваться и стратегии-функции, если у оперирующей стороны ожидается дополнительная информация. Тогда в качестве оценки эффективности также обычно используется математическое ожидание

$$f_c(\tilde{x}) = M_y F(\tilde{x}, y) \quad (1.5)$$

- ▶ только надо иметь в виду, что при определении математического ожидания, когда производится осреднение по  $y$ , необходимо учитывать зависимость  $\tilde{x} = x(y)$ .
- ▶ Оценке эффективности в среднем соответствует понятие *оптимальности в среднем*:  $\tilde{x}^0$  оптимальна в среднем на пространстве стратегий  $\tilde{X}$ , если

$$f_c(\tilde{x}^0) \geq f_c(\tilde{x}) \forall \tilde{x} \in \tilde{X} \quad (1.6)$$

- ▶ В частности, для стратегий-констант  $x^0$  оптимальна в среднем на пространстве стратегий  $X$ , если  $f_c(x^0) \geq f_c(x) \forall x \in X$  (1.7)

## 2. ЭФФЕКТИВНОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОСТЬ

---

Перейдем теперь к случаю неопределенных неконтролируемых факторов. Относительно неопределенного неконтролируемого фактора  $y$  исследователю операции известна только область его возможных значений  $Y$ , поэтому при применении стратегии  $x$  он может ожидать, что критерий примет произвольное значение в замкнутом интервале от  $A = \min_{y \in Y} F(x, y)$  до  $B = \max_{y \in Y} F(x, y)$  (для простоты будем считать, что максимумы и минимумы функций существуют, в противном случае надо использовать верхние и нижние точные грани, т.е. супремумы и инфимумы, и там, где необходимо, вводить понятия приближенных  $\varepsilon$  - оптимальных стратегий).

## 2. ЭФФЕКТИВНОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОСТЬ

---

Значит, оценка эффективности стратегии  $x$  по смыслу должна принадлежать отрезку  $[A, B]$ . Но как разумно выбрать на нем единственное число? Можем ли мы быть уверенными, что при применении стратегии  $x$  в данной ситуации получится значение критерия эффективности больше  $A$ ? Очевидно, нет. Только значение  $A$  мы можем твердо гарантировать. Значит, разумным будет взять это значение в роли оценки эффективности стратегии  $x$ , т.е. положить

$$f_{\Gamma}(x) = \min_{y \in Y} F(x, y) \quad (1.8)$$

Такая оценка называется *гарантированной оценкой эффективности*. Этой оценке соответствует понятие *оптимальной гарантирующей стратегии*, т.е. такой  $x^0$ , для которой

$$f_{\Gamma}(x^0) \geq f_{\Gamma}(x) \quad \forall x \in X \quad (1.9)$$

или

$$\min_{y \in Y} F(x^0, y) \geq \min_{y \in Y} F(x, y) \quad \forall x \in X \quad (1.10)$$

## 2. ЭФФЕКТИВНОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОСТЬ

---

Аналогично вводятся понятия гарантированной оценки эффективности и оптимальности в гарантированном смысле для стратегий-функций:

$$f_{\Gamma}(\tilde{x}) = \min_{y \in Y} F(x(y), y)$$

$$f_{\Gamma}(\tilde{x}^0) \geq f_{\Gamma}(\tilde{x}) \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{X}$$

Величина

$$F_{\Gamma}(X) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y)$$

называется максимальным гарантированным результатом на множестве  $X$  (аналогично на  $\tilde{X}$ ). В математике такое выражение принято называть максиминами или при перестановке процедур максимизации и минимизации — минимаксами.

### 3. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

---

- Наиболее простую группу задач исследования операций составляют такие задачи, в которых неконтролируемых факторов нет или имеются только фиксированные неконтролируемые факторы. Раздел исследования операций, посвященный изучению подобных задач, называется *математическим программированием*, а сами задачи — *задачами математического программирования*.
- Внутренняя классификация в разделе математического программирования связана уже с видом критерия эффективности и пространства стратегий. Если критерий эффективности представляет собой линейную функцию от переменных, описывающих стратегии, а пространство стратегий задается системой линейных ограничений, т. е. представляет собой многогранное множество, то получающаяся задача называется *задачей линейного программирования*. Если, исходя из содержательного смысла задачи, ее решения должны быть целыми числами, то получаем задачу *целочисленного программирования*.

### 3. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

---

- Обычно в целочисленных задачах критерий и остальные ограничения (кроме условия целочисленности) предполагают линейными, поэтому целочисленные задачи можно отнести условно к *линейному программированию*.
- Если критерий эффективности или ограничения, задающие пространство стратегий, являются нелинейными функциями, то имеем задачу *нелинейного программирования*. В частности, если критерий эффективности и пространство стратегий обладают свойствами выпуклости, то получающаяся задача называется задачей *выпуклого программирования*.

### 3. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

---

- Если в задаче математического программирования имеется переменная времени и критерий эффективности выражается не в явном виде как функция от стратегий, а косвенно через уравнения, описывающие развитие процесса протекания операции во времени, то такая задача относится к *динамическому программированию*.
- *Линейное программирование* (включая целочисленное программирование), *нелинейное программирование* (включая выпуклое программирование) и *динамическое программирование* составляют основные подразделы математического программирования.

### 3. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

---

При наличии неконтролируемых факторов более сложных видов (случайных и неопределенных) возникают другие классы задач.

Если имеются неопределенные неконтролируемые факторы, то при использовании гарантированной оценки эффективности получаются **максиминные (или минимаксные) задачи**. В целом такие задачи представляют собой обобщение задач **математического (нелинейного) программирования**.

Однако среди задач с неопределенными неконтролируемыми факторами наиболее интересными являются такие задачи, в которых неопределенность связана с действиями других разумных участников операции, преследующих свои цели.

Раздел исследования операций, занимающийся изучением подобных задач, называется **теорией игр**. Игровые задачи также имеют свою классификацию, в соответствии с которой выделяется несколько подразделов теории игр.

### 3. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

---

Среди задач исследования операций со случайными неконтролируемыми факторами наиболее важными являются

- задачи массового обслуживания,
- задачи теории надежности,
- задачи управления запасами.

Эти задачи характеризуются определенным видом критериев эффективности, пространств стратегий и фигурирующих в них случайных величин, которые отражают их содержательный смысл. Следует отметить, что на практике практически всегда при принятии управленческих решений о функционировании и развитии объекта необходимо учитывать такую важную характеристику внешней среды как **неопределенность**. Под неопределенностью следует понимать отсутствие, неполноту, недостаточность информации об объекте, процессе, явлении или неуверенность в достоверности информации.

### 3. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

---

Неопределенность обуславливает появление ситуаций, не имеющих однозначного исхода. Под **ситуацией риска** следует понимать сочетание, совокупность различных обстоятельств и условий, создающих обстановку того или иного вида деятельности, для которой имеется возможность оценить вероятность осуществления того или иного исхода.

Таким образом, если существует возможность количественно определить вероятность того или иного варианта, то это и будет **ситуация риска**. С точки зрения полноты исходных данных определенность и неопределенность представляют два крайних случая, а риск определяет промежуточную ситуацию, в которой приходится принимать решение.

Степень информированности о данных определяет, каким образом задача формализуется и решается.

### 3. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

---

Основными видами оценки принимаемых решений в условиях риска являются:

- ожидаемое значение результата (математическое ожидание);
- ожидаемое значение результата в сочетании с минимизацией его дисперсии;
- доверительный интервал для получаемого результата;
- наиболее вероятное событие (исход) в будущем.

Математические модели исследуемых явлений или процессов могут включать совокупность (комплекс) частных критериев эффективности функционирования системы. Случай отсутствия единого критерия можно трактовать как принятие решений в *условиях неопределенности* цели. Выбор оптимального решения по комплексу нескольких критериев является *задачей многокритериальной оптимизации*.