

Два замечательных предела

В теории пределов большую роль играют два предела, которые, в силу их важности, получили названия *замечательных пределов*.

Первый замечательный предел

Первый замечательный предел

Г Функция $y = \frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$ имеет предел, равный 1: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Следствия:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1$$

Примеры

Пример:

Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$.

Если $x \rightarrow 0$, то и $2x \rightarrow 0$ и тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin 2x}{2 \cdot x} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \cdot 1 = 2.$$

Пример:

Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} = 1.$$

Примеры

Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{x}$.

Решение

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{9x \cdot \frac{1}{9}} = 9 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{9x} = 9 \cdot 1 = 9.$$

Ответ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{x} = 9.$

Примеры

Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 8x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5x}{\frac{\operatorname{tg} 8x}{8x} \cdot 8x} = \frac{5}{8} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\operatorname{tg} 8x}{8x}} = \frac{5}{8} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 8x}{8x}}$$

Для отыскания $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 8x}{8x}$ применима формула

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} = 1$$

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 8x}{8x}} = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{1} = \frac{5}{8}$$

Ответ: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 8x} = \frac{5}{8}$.

Примеры

Вычислим предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

Преобразуем функцию под знаком предела следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{2}{3} \right).$$

Теперь вынесем постоянный множитель за знак предела и применим теорему о пределе произведения:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x} \cdot 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Примеры

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} \right)^2 \\ &= 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \right)^2 = 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} \right)^2 = \\ &= 2 \left(2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 = 2(2 \cdot 1)^2 = \mathbf{8}\end{aligned}$$

Примеры

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \sin 7x}{7 \cdot 4x} = \frac{7}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = \frac{7}{4}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \cdot 1 = 1$$

Второй замечательный предел

Второй замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

- Число e , заданное этим пределом, играет очень большую роль как в математическом анализе, так и в других разделах математики.
- Число e часто называют *основанием натуральных логарифмов*.

Следствия из 2-го замечательного предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Пример:

Вычислить предел: $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^{7x}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^{7x} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[(1 + 1/x)^x \right]^7 = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^x \right]^7 = e^7.$$

Следствия из 2-го замечательного предела

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x = e^k$$

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-\frac{x}{4}} \right)^x = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-\frac{x}{4}} \right)^{-\frac{x}{4}} \right)^{-4} = e^{-4}$$

Пример

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right)^{\frac{1}{3x} \cdot 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right)^{\frac{1}{3x} \cdot 4x}$$

е (2-ой замечательный предел)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right)^{\frac{1}{3x} \cdot 4x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{3x}} = e^{\frac{4}{3}}$$

е (2-ой замечательный предел)

Ответ: $e^{\frac{4}{3}}$.

ЗАДАНИЯ

- Вычислить следующие пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{3x}\right)^{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x}\right)^{3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{5}{x}}$$

ЗАДАНИЯ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^x; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{4x}\right)^x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2x}{3}\right)^{\frac{2}{3x}} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x$$