Средние величины и показатели вариации

Учебное занятие 7

Сущность средних показателей

- *Средняя величина* - это обобщающий показатель, характеризующий типичный уровень варьирующего количественного признака на единицу совокупности в определенных условиях места и времени.

Виды степенной средней величины

Средние величины бывают:

<u>Степенные:</u>

- средняя арифметическая,
- средняя гармоническая,
- средняя хронологическая и т.д.

<u>Структурные:</u>

- мода,
- медиана и т.д.

Средняя арифметическая

Средняя арифметическая

Средняя арифметическая простая

Средняя арифметическая взвешенная

Средняя арифметическая простая используется в тех случаях, когда расчет ведется по несгруппированным данным.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}.$$

x- варианты

n – число вариант (количество)

Средняя арифметическая взвешенная. Варианты не просто складываются, а предварительно умножаются на частоту (взвешиваются)

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f},$$

где f – веса.

Пример:

Несгруппированные данные	
1	1000 $
2	2000 $
3	3000 $
4	1500 $
5	1000 $
6	1000 $
7	2000 $
8	1500 $
9	1000 $
10	2000 $

Сгруппированные данные	
1000 $	4 чел
1500 $	2 чел
2000 $	3 чел
3000 $	1 чел

Средняя арифметическая

<u>Средняя арифметическая простая</u> используется по несгруппированным данным.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{1000+2000+3000+1500+1000+1000+2000+1500+1000+2000}{4+2+3+1} = 1600\$$$

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{1000\times 4+1500\times 2+2000\times 3+3000\times 1}{4+2+3+1} = 1600\$$$

Средняя гармоническая

- *Средняя гармоническая взвешенная* используется, когда известен числитель исходного соотношения средней, но неизвестен ее знаменатель.

Средняя гармоническая взвешенная:

$$\bar{x} = \frac{\sum W}{\sum \frac{W}{x}},$$

где $W = xn$

W – объём признака

x - варианты

.

Средняя гармоническая

Пример

Организация	**май**		**июнь**	
	Ср. ЗП млн. руб.	Число работников, чел.	Ср. ЗП млн. руб.	ФЗП млн. руб.
А	5	60	5,5	330
Б	6	20	6	120

Средняя арифметическая взвешенная

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{5 \times 60 + 6 \times 20}{60 + 20} = 5{,}25 \text{ (ммлн.руб.)}$$

Средняя гармоническая взвешенная

$$\bar{x} = \frac{\sum W}{\sum \frac{W}{x}} = \frac{330 + 120}{\frac{330}{5{,}5} + \frac{120}{6}} = 5{,}625 \text{ (ммлн.руб.}$$

Структурные средние

- Наиболее часто используемыми в экономической практике структурными средними являются *мода* и *медиана*.
- **Мода** (M_o) – значение изучаемого признака, повторяющееся с наибольшей частотой.
- ***Медиана*** (M_e) – это значение признака, приходящееся на середину ранжированной (упорядоченной) совокупности.

Определение моды и медианы по несгруппированным данным

- *Пример*. 9 торговых фирм города реализуют товар А по следующим оптовым ценам (тыс. руб.):

  4.4, 4.3, 4.4, 4.5, 4.3, 4.3, 4.6, 4.2, 4.6.

  Определить моду и медиану.

Решение:

Так как чаще всего встречается цена 4.3 тыс.руб., она и будет модальной.

Для определения медианы, необходимо провести ранжирование:

4.2, 4.3, 4.3, 4.3, 4.4, 4.4, 4.5, 4.6, 4.6.

Центральной в этом ряду является цена 4.4 тыс.руб., следовательно, она и будет медианной.

Определение моды и медианы по сгруппированным данным

Пример. В таблице 6.3 приведено распределение торговых предприятий города по уровню розничных цен на товар А. Определить моду и медиану.

Таблица 6.3

Распределение торговых предприятий по уровню цен на товар А

Цена на товар А, руб.	Число торговых предприятий
52	12
53	48
54	56
55	60
56	14
Итого	190

Решение:

Наибольшую частоту (60) имеет цена 55 руб., Следовательно, она является модальной.

Для определения медианного значения признака найдем номер медианной единицы ряда по формуле:

$$N_{me} = \frac{n+1}{2}.$$

N_{me}=95.5. Предприятия с номером 95 и 96 находятся в третьей группе (см. по накопленным частотам). Следовательно, медианной является цена 54 руб.

Определение моды интервального ряда

Мода интервального вариационного ряда:

$$M_o = x_0 + h \cdot \frac{(n_{mo} - n_{mo-1})}{(n_{mo} - n_{mo-1}) + (n_{mo} - n_{mo+1})},$$

где x_0 – нижняя граница модального интервала (интервал, имеющий наибольшую частоту);

h – величина модального интервала;

n_{mo} – частота модального интервала;

n_{mo-1}, n_{mo+1} – частота интервала, предшествующего и следующего за модальным (соответственно).

Определение медианы интервального ряда

Медиана интервального вариационного ряда:

$$M_e = x_0 + h \cdot \frac{0{,}5 \times \sum n - S_{me-1}}{n_{me}},$$

где x_0 – нижняя граница медианного интервала (интервал, накопленная частота которого превышает половину обшей суммы частот);

h – величина медианного интервала;

$S_{me\text{-}1}$ – накопленная частота интервала, предшествующего медианному;

n_{me} – частота медианного интервала.

Показатели вариации

Основные показатели вариации:

1. размах вариации (R) – разность между наибольшим и наименьшим значением вариации;

$$R = x_{max} - x_{min},$$

где x_{max}, x_{min} — наибольшее и наименьшее значения признака.

2. среднее линейное отклонение (l) – это средняя арифметическая из абсолютных отклонений индивидуальных значений признака от общей средней;

$$\bar{l} = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n} \text{ (простое);} \qquad \bar{l} = \frac{\sum |x - \bar{\mathrm{x}}| \times f}{\sum f} \text{ (взвешенное)}$$

3. дисперсия или среднее квадратическое отклонение (δ) – средняя арифметическая квадратов отклонений вариант от общей средней;

$$\delta^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} \text{(простая);} \qquad \delta^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 \times f}{\sum f} \text{(взвешенная)}$$

- 4. среднее квадратическое отклонение – квадратный корень из дисперсии:

$$\delta = \sqrt{\delta^2} = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$

$$\delta = \sqrt{\delta^2} = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2 \times f}{\sum f}}$$

- 5. коэффициент вариации (V). – это относительный показатель вариации, выражается в процентах и представляет собой отношение среднего квадратического отклонения к средней величине признака:

$$\mathrm{V} = \frac{\delta}{\bar{\mathrm{x}}} \times 100\%$$

- Чем больше коэффициент вариации, тем меньше средняя величина характеризует изучаемое явление.

- *Пример*. За два месяца по цехам завода имеются следующие данные о заработной плате работников предприятия (табл.6.1). Определить, за какой месяц и на сколько процентов была выше средняя месячная зарплата работников.

Таблица 6.1

Заработная плата работников предприятия

№ цеха	Сентябрь		Октябрь	
	Численность работников	Среднемесячная зарплата, руб.	Среднемесячная зарплата, руб.	Фонд заработной платы, руб.
1	140	13560	13600	1836000
2	200	13600	13580	2851800
3	260	13330	13340	3335000

Решение

- Среднемесячную зарплату работников за сентябрь найдем как **<u>среднюю арифметическую взвешенную</u>**:

$$\bar{x}_{сент} = \frac{13560 \cdot 140 + 13600 \cdot 200 + 13330 \cdot 260}{140 + 200 + 260} = 13473.7 \ (руб).$$

- Среднемесячную зарплату работников за октябрь найдем как **<u>среднюю гармоническую взвешенную</u>**:

$$\bar{x}_{окт} = \frac{1836000 + 2851800 + 3335000}{\frac{1836000}{13600} + \frac{2851800}{13580} + \frac{3335000}{13340}} = 13483.7 \ (руб),$$

$$\frac{\bar{x}_{окт}}{\bar{x}_{сент}} = \frac{13483.7}{13473.7} = 1.0007 \quad (100.07\%).$$

- Т.о., среднемесячная зарплата работников в октябре повысилась на 0.07% по сравнению с сентябрем.

Расчет средней по интервальному вариационному ряду

- При расчете средней по интервальному вариационному ряду от интервалов переходят к их серединам.
- Пример. *Распределение менеджеров предприятия по возрасту*:

Возраст (лет)	до 25	25-30	30-40	40-50	50-60	60 и более
Число менеджеров (чел)	7	13	38	42	16	5

- Найдем середины возрастных интервалов:

Середина интервала (лет)	22,5	27,5	35,0	45,0	55,0	65,0
Число менеджеров (чел)	7	13	38	42	16	5

- Средний возраст менеджера равен:

$$\bar{x} = \frac{22.5 \cdot 7 + 27.5 \cdot 13 + 35 \cdot 38 + 45 \cdot 42 + 55 \cdot 16 + 65 \cdot 5}{7 + 13 + 38 + 42 + 16 + 5} = 41(\textit{год}).$$

Определение моды и медианы интервального ряда

- *Пример*. В таблице 6.4 приведено распределение населения РБ по уровню среднедушевого денежного дохода в январе – августе 1995 г. Определить моду и медиану.

Таблица 6.4

Распределение населения по уровню среднедушевого денежного дохода в январе – августе 1995 г.

Доход (тыс. руб.)	Удельный вес населения (%)
100 и менее	2.4
100-200	15.4
200-300	20.1
300-400	17.2
400-500	12.8
500-600	9.2
600-700	6.5
700-800	4.5
800-900	3.2
900-1000	2.3
свыше 1000	6.4

Определение моды и медианы интервального ряда

- *Пример*. В таблице 6.4 приведено распределение населения РБ по уровню среднедушевого денежного дохода в январе – августе 1995 г. Определить моду и медиану.

  Ответ: M_o=262 тыс.руб.

  M_e=370 тыс.руб.

Таблица 6.4

Распределение населения по уровню среднедушевого денежного дохода в январе – августе 1995 г.

Доход (тыс. руб.)	Удельный вес населения (%)
100 и менее	2.4
100-200	15.4
200-300	20.1
300-400	17.2
400-500	12.8
500-600	9.2
600-700	6.5
700-800	4.5
800-900	3.2
900-1000	2.3
свыше 1000	6.4