

# Средние величины и показатели вариации

---

Учебное занятие 7



# Сущность средних показателей

---

- Средняя величина - это обобщающий показатель, характеризующий типичный уровень варьирующего количественного признака на единицу совокупности в определенных условиях места и времени.



# Виды степенной средней величины

Средние величины бывают:

---

## Степенные:

- средняя арифметическая,
- средняя гармоническая,
- средняя хронологическая и т.д.

## Структурные:

- мода,
- медиана и т.д.

# Средняя арифметическая

Средняя арифметическая

Средняя арифметическая  
простая

Средняя арифметическая  
взвешенная

Средняя арифметическая простая используется в тех случаях, когда расчет ведется по несгруппированным данным.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$x$  - варианты

$n$  – число вариантов (количество)

Средняя арифметическая взвешенная. Варианты не просто складываются, а предварительно умножаются на частоту (взвешиваются)

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f},$$

где  $f$  – веса.



## Пример:

---

### Несгруппированные данные

1	1000 \$
2	2000 \$
3	3000 \$
4	1500 \$
5	1000 \$
6	1000 \$
7	2000 \$
8	1500 \$
9	1000 \$
10	2000 \$

### Сгруппированные данные

1000 \$	4 чел
1500 \$	2 чел
2000 \$	3 чел
3000 \$	1 чел

# Средняя арифметическая

Средняя арифметическая простая используется по несгруппированным данным.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{1000 + 2000 + 3000 + 1500 + 1000 + 1000 + 2000 + 1500 + 1000 + 2000}{4 + 2 + 3 + 1} = 1600\$$$

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{1000 \times 4 + 1500 \times 2 + 2000 \times 3 + 3000 \times 1}{4 + 2 + 3 + 1} = 1600\$$$



# Средняя гармоническая

Средняя гармоническая взвешенная используется, когда известен числитель исходного соотношения средней, но неизвестен ее знаменатель.

Средняя гармоническая взвешенная:

$$\bar{x} = \frac{\sum W}{\sum \frac{W}{x}},$$

где  $W = x \cdot n$

$W$  – объём признака

$x$  - варианты

# Средняя гармоническая

Пример

Организац ия	май		июнь	
	Ср. ЗП млн. руб.	Число работнико в, чел.	Ср. ЗП млн. руб.	ФЗП млн. руб.
А	5	60	5,5	330
Б	6	20	6	120

Средняя арифметическая взвешенная

$$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{5 \times 60 + 6 \times 20}{60 + 20} = 5,25 \text{ (млн.руб.)}$$

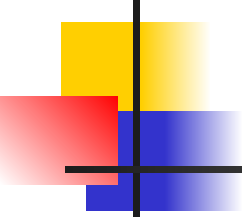
Средняя гармоническая взвешенная

$$\bar{x} = \frac{\sum W}{\sum \frac{W}{x}} = \frac{330 + 120}{\frac{330}{5,5} + \frac{120}{6}} = 5,625 \text{ (млн.руб.)}$$



# Структурные средние

- Наиболее часто используемыми в экономической практике структурными средними являются *мода* и *медиана*.
- Мода ( $M_0$ ) – значение изучаемого признака, повторяющееся с наибольшей частотой.
- Медиана ( $M_e$ ) – это значение признака, приходящееся на середину ранжированной (упорядоченной) совокупности.



# Определение моды и медианы по несгруппированным данным

---

- *Пример.* 9 торговых фирм города реализуют товар А по следующим оптовым ценам (тыс. руб.):  
4.4, 4.3, 4.4, 4.5, 4.3, 4.3, 4.6, 4.2, 4.6.

Определить моду и медиану.

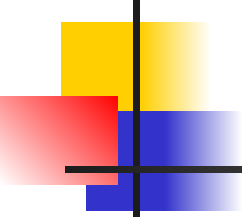
*Решение:*

Так как чаще всего встречается цена 4.3 тыс.руб., она и будет модальной.

Для определения медианы, необходимо провести ранжирование:

4.2, 4.3, 4.3, 4.3, 4.4, 4.4, 4.5, 4.6, 4.6.

Центральной в этом ряду является цена 4.4 тыс.руб., следовательно, она и будет медианной.



# Определение моды и медианы по сгруппированным данным

*Пример.* В таблице 6.3 приведено распределение торговых предприятий города по уровню розничных цен на товар А. Определить моду и медиану.

Таблица 6.3

**Распределение торговых предприятий по уровню цен на товар А**

Цена на товар А, руб.	Число торговых предприятий
52	12
53	48
54	56
55	60
56	14
Итого	190



## *Решение:*

---

Наибольшую частоту (60) имеет цена 55 руб.,  
Следовательно, она является модальной.

Для определения медианного значения признака найдем номер медианной единицы ряда по формуле:

$$N_{me} = \frac{n + 1}{2}.$$

$N_{me} = 95.5$ . Предприятия с номером 95 и 96 находятся в третьей группе (см. по накопленным частотам). Следовательно, медианной является цена 54 руб.

# Определение моды интервального ряда

Мода интервального вариационного ряда:

$$M_o = x_0 + h \cdot \frac{(n_{m_0} - n_{m_0-1})}{(n_{m_0} - n_{m_0-1}) + (n_{m_0} - n_{m_0+1})},$$

где  $x_0$  – нижняя граница модального интервала (интервал, имеющий наибольшую частоту);

$h$  – величина модального интервала;

$n_{m_0}$  – частота модального интервала;

$n_{m_0-1}$ ,  $n_{m_0+1}$  – частота интервала, предшествующего и следующего за модальным (соответственно).

# Определение медианы интервального ряда

Медиана интервального вариационного ряда:

$$M_e = x_0 + h \cdot \frac{0,5 \times \sum n - S_{me-1}}{n_{me}},$$

где  $x_0$  – нижняя граница медианного интервала (интервал, накопленная частота которого превышает половину общей суммы частот);

$h$  – величина медианного интервала;

$S_{me-1}$  – накопленная частота интервала, предшествующего медианному;

$n_{me}$  – частота медианного интервала.



# Показатели вариации

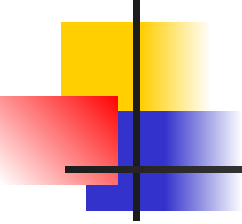
---

Основные показатели вариации:

1. размах вариации ( $R$ ) – разность между наибольшим и наименьшим значением вариации;

$$R = x_{max} - x_{min},$$

где  $x_{max}$ ,  $x_{min}$  – наибольшее и наименьшее значения признака.



---

2. среднее линейное отклонение ( $\bar{l}$ ) – это средняя арифметическая из абсолютных отклонений индивидуальных значений признака от общей средней;

$$\bar{l} = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n} \text{ (простое);} \quad \bar{l} = \frac{\sum |x - \bar{x}| \times f}{\sum f} \text{ (взвешенное)}$$

3. дисперсия или среднее квадратическое отклонение ( $\delta$ ) – средняя арифметическая квадратов отклонений вариант от общей средней;

$$\delta^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} \text{ (простая);} \quad \delta^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 \times f}{\sum f} \text{ (взвешенная)}$$



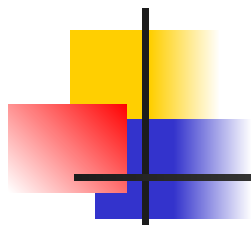
- 
- 
- 4. среднее квадратическое отклонение – квадратный корень из дисперсии:

$$\delta = \sqrt{\delta^2} = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}} \qquad \delta = \sqrt{\delta^2} = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2 \times f}{\sum f}}$$

- 5. коэффициент вариации (V). – это относительный показатель вариации, выражается в процентах и представляет собой отношение среднего квадратического отклонения к средней величине признака:

$$V = \frac{\delta}{\bar{x}} \times 100\%$$

- Чем больше коэффициент вариации, тем меньше средняя величина характеризует изучаемое явление.



- *Пример.* За два месяца по цехам завода имеются следующие данные о заработной плате работников предприятия (табл.6.1). Определить, за какой месяц и на сколько процентов была выше средняя месячная зарплата работников.

Таблица 6.1

**Заработная плата работников предприятия**

№ цеха	Сентябрь		Октябрь	
	Численность работников	Средне-месячная зарплата, руб.	Средне-месячная зарплата, руб.	Фонд заработной платы, руб.
1	140	13560	13600	1836000
2	200	13600	13580	2851800
3	260	13330	13340	3335000



## Решение

Среднемесячную зарплату работников за сентябрь найдем как **среднюю арифметическую взвешенную**:

$$\bar{x}_{\text{сент}} = \frac{13560 \cdot 140 + 13600 \cdot 200 + 13330 \cdot 260}{140 + 200 + 260} = 13473.7 \text{ (руб)}.$$

- Среднемесячную зарплату работников за октябрь найдем как **среднюю гармоническую взвешенную**:

$$\bar{x}_{\text{окт}} = \frac{1836000 + 2851800 + 3335000}{\frac{1836000}{13600} + \frac{2851800}{13580} + \frac{3335000}{13340}} = 13483.7 \text{ (руб)},$$

$$\frac{\bar{x}_{\text{окт}}}{\bar{x}_{\text{сент}}} = \frac{13483.7}{13473.7} = 1.0007 \text{ (100.07\%)}.$$

- Т.о., среднемесячная зарплата работников в октябре повысилась на 0.07% по сравнению с сентябрем.

# Расчет средней по интервальному вариационному ряду

- При расчете средней по интервальному вариационному ряду от интервалов переходят к их серединам.
- Пример. *Распределение менеджеров предприятия по возрасту:*

Возраст (лет)	до 25	25-30	30-40	40-50	50-60	60 и более
Число менеджеров (чел)	7	13	38	42	16	5

- Найдем середины возрастных интервалов:

Середина интервала (лет)	22,5	27,5	35,0	45,0	55,0	65,0
Число менеджеров (чел)	7	13	38	42	16	5

- Средний возраст менеджера равен:

$$\bar{x} = \frac{22.5 \cdot 7 + 27.5 \cdot 13 + 35 \cdot 38 + 45 \cdot 42 + 55 \cdot 16 + 65 \cdot 5}{7 + 13 + 38 + 42 + 16 + 5} = 41(\text{год}).$$

# Определение моды и медианы интервального ряда

Таблица 6.4

*Распределение населения по уровню  
среднедушевого денежного дохода в  
январе – августе 1995 г.*

- *Пример.* В таблице 6.4 приведено распределение населения РБ по уровню среднедушевого денежного дохода в январе – августе 1995 г. Определить моду и медиану.

Доход (тыс. руб.)	Удельный вес населения (%)
100 и менее	2.4
100-200	15.4
200-300	20.1
300-400	17.2
400-500	12.8
500-600	9.2
600-700	6.5
700-800	4.5
800-900	3.2
900-1000	2.3
свыше 1000	6.4

# Определение моды и медианы интервального ряда

Таблица 6.4

*Распределение населения по уровню среднедушевого денежного дохода в январе – августе 1995 г.*

- *Пример.* В таблице 6.4 приведено распределение населения РБ по уровню среднедушевого денежного дохода в январе – августе 1995 г. Определить моду и медиану.

Ответ:  $M_o = 262$  тыс.руб.

$M_e = 370$  тыс.руб.

Доход (тыс. руб.)	Удельный вес населения (%)
100 и менее	2.4
100-200	15.4
200-300	20.1
300-400	17.2
400-500	12.8
500-600	9.2
600-700	6.5
700-800	4.5
800-900	3.2
900-1000	2.3
свыше 1000	6.4