

Лекция 1.
Множества. Элементы теории
множеств.
Принцип включения-
исключения.

1. Множества

- Совокупность объектов, определяемых некоторым свойством, присущим каждому из них, называется множеством.
- Каждый объект, входящий в множество, называется его элементом, а свойство их объединяющее – характеристическим свойством множества.
- Множества принято обозначать большими буквами латинского алфавита: A, B, C, \dots , либо буквами с нижними индексами A_1, A_2, \dots , элементы множества – соответствующими малыми латинскими буквами.

Определение. Множество B называется подмножеством множества A , если каждый элемент множества B является элементом множества A .

Обозначение: $B \subset A$

Каждое множество является подмножеством (несобственным) самого себя $A \subseteq A$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым множеством и обозначается символом (квантором) \emptyset .

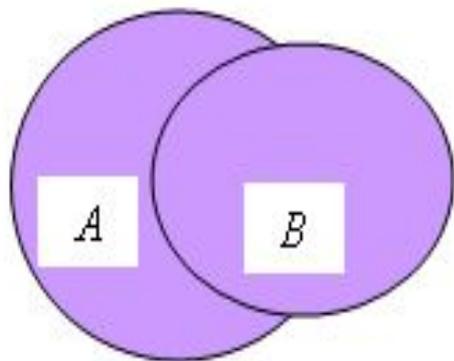
Парадокс брадобреея.

В одном полку служил парикмахер. Однажды командир с целью экономии времени приказал ему брить только тех, кто не бреется сам. Брадобрей, получив приказ, сначала обрадовался, т.к. работы для него стало меньше. Но потом он задумался: а кто будет брить его самого?

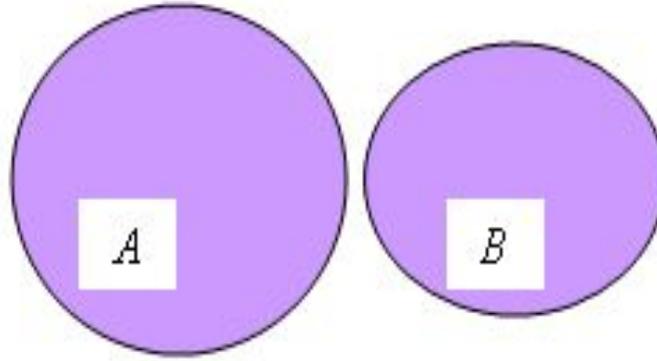
- Другая версия парадокса.
- Прилагательное русского языка назовем рефлексивным, если оно обладает тем свойством, которое определяет. Например, прилагательное «русский» – рефлексивное, а прилагательное «английский» – нерефлексивное. Прилагательное «трехсложный» – рефлексивное (состоит из трех слогов). А прилагательное «четырёхсложный» – нерефлексивное (состоит из пяти слогов).
- Интересно: а прилагаемое «трудновыговариваемое» рефлексивно или нет?
- Следовательно, все прилагательные можно разделить на два множества: рефлексивные и нерефлексивные прилагательные. Но рассмотрим само прилагательное «нерефлексивный». Оно рефлексивное или нет?

2. Операции над множествами

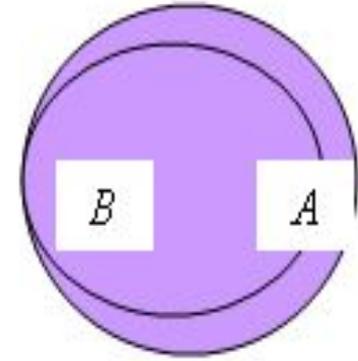
- Определение. Объединением двух множеств A и B называется множество, элементами которого являются элементы, входящие в хотя бы в одно из данных множеств.



$$C = A \cup B$$

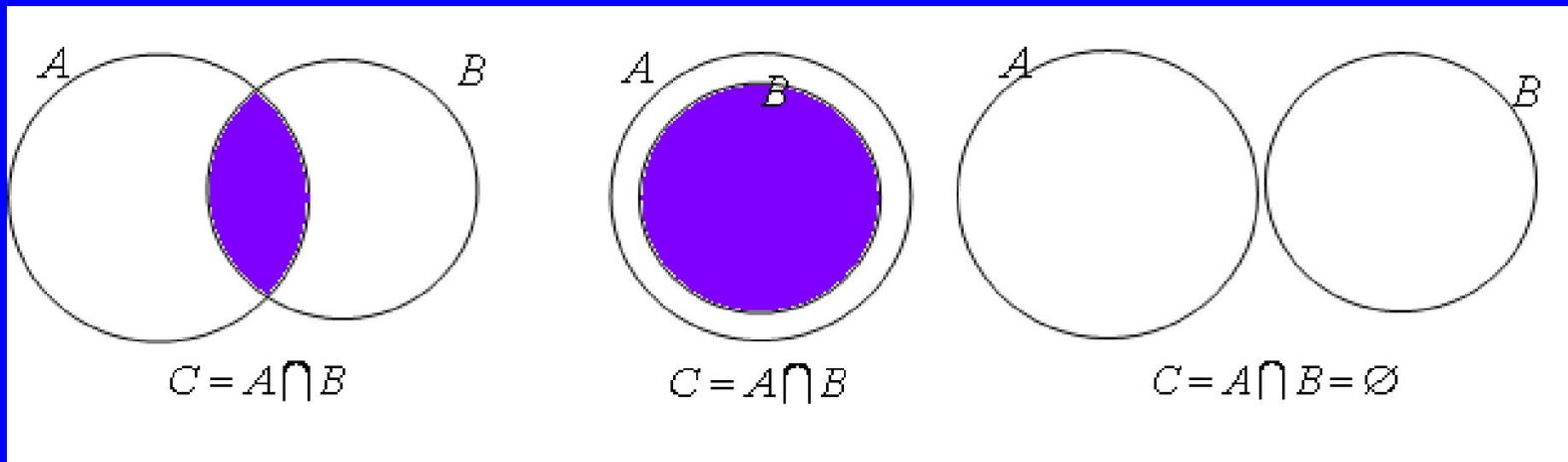


$$C = A \cup B$$



$$C = A \cup B$$

- Определение. Пересечением двух множеств A и B называется множество, элементами которого являются элементы, входящие в каждое из этих множеств

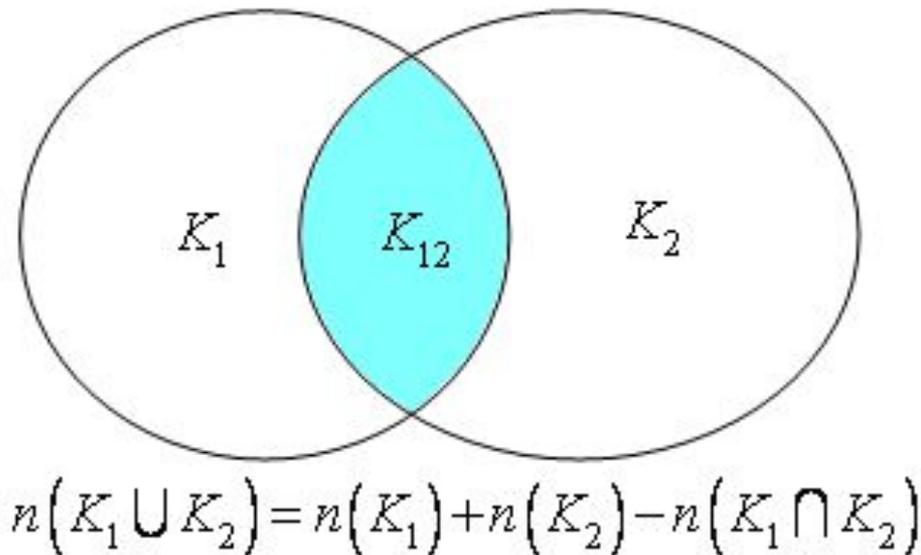


3. Принцип включения-исключения

- Принцип включения-исключения является важнейшим математическим инструментом в различных разделах математики: комбинаторике, теории вероятности, теории множеств.

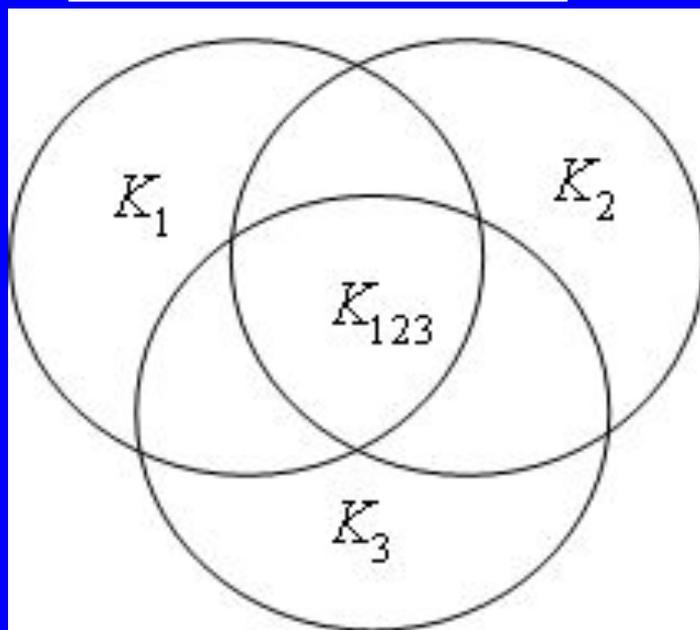
Формула сложения

Если два множества состоят из конечного числа элементов, то, как видно из рисунка, число элементов, входящих в их объединение, выражается формулой:



- Если же свойств три, то можно по аналогии определить множества

$$K_{12}, K_{23}, K_{31}, K_{123}$$



$$K_{12} = K_1 \cap K_2, K_{23} = K_2 \cap K_3, K_{31} = K_3 \cap K_1, K_{123} = K_1 \cap K_2 \cap K_3$$

$$n(K_1 \cup K_2 \cup K_3) = n(K_1) + n(K_2) + n(K_3) - n(K_{12}) - n(K_{23}) - n(K_{31}) + n(K_{123})$$

Задача 1.

- На экзамене по математике были предложены 3 задачи: одна по алгебре, одна по геометрии, одна по тригонометрии. Из 1000 абитуриентов, решавших их, задачу по алгебре решили 800 человек, по геометрии – 700, а по тригонометрии – 600 человек. При этом задачи по алгебре и геометрии решили 600 абитуриентов, по алгебре и тригонометрии – 500, по геометрии и тригонометрии – 400. А 300 абитуриентов решили все три задачи. Сколько абитуриентов не решили ни одной задачи?

Задача 2

- Из 100 опрошенных студентов филологического факультета 24 не изучают ни английский, ни немецкий, ни французский языки, 48 человек изучали английский, 8 – английский и немецкий, 26 – французский, 8 – французский и английский, 13 – французский и немецкий, 28 – немецкий. Сколько среди опрошенных студентов изучают английский, французский и немецкий языки одновременно?

Задача 3

- На дискотеке 80% времени был выключен свет, 90% времени играла музыка, и 50% времени шел дождь. Какую минимальную часть времени все это могло происходить одновременно?