Показательная функция, ее свойства и график

$$y = x^{a}$$

$$y = a^{x}, x \in Q, a > 0, a \neq 1$$

– показательная функция

$$D(x^{a}) = [0; +\infty)$$

$$y = 2^x$$

$$2^{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3} = a \Leftrightarrow a^2 = 3$$

$$\sqrt{3} \approx 1{,}73205080$$

$$2^1 = 1 \quad 2^{1{,}7} \approx 3{,}25 \quad 2^{1{,}73} \approx 3{,}317 \quad 2^{1{,}732} \approx 3{,}3218 \quad 2^{\sqrt{3}} \approx 3{,}321997$$

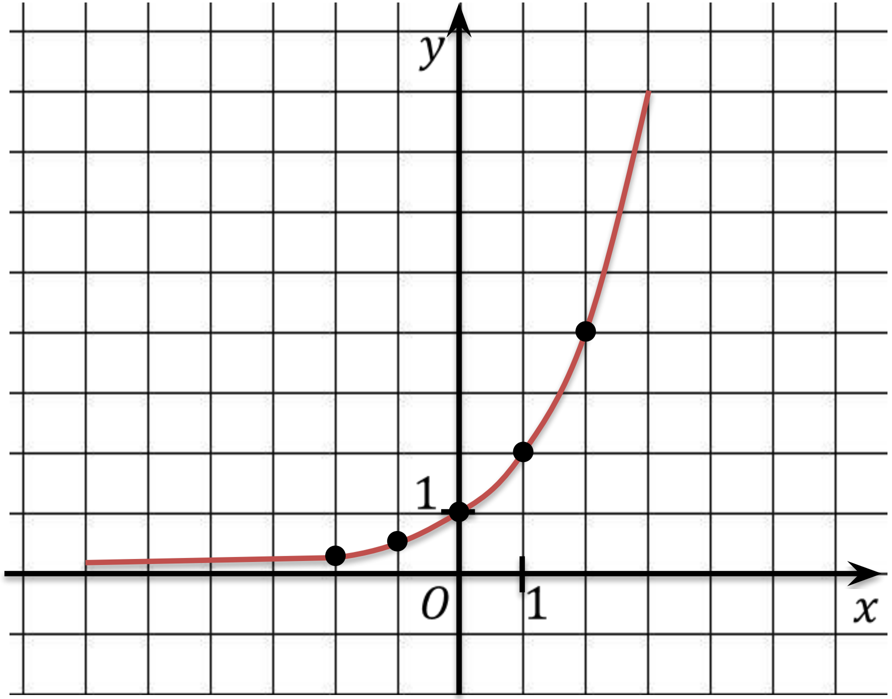
Пусть $a > 1$ и $\alpha = a, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$ – положительное иррациональное число (бесконечная десятичная непериодическая дробь). Составим последовательность десятичных приближений числа α по недостатку:

$$\alpha_1 = a, a_1;\ \alpha_2 = a, a_1 a_2;\ \alpha_3 = a, a_1 a_2 a_3; \dots;$$
$$\alpha_n = a, a_1 a_2 \dots a_n \dots.$$

Тогда предел последовательности $a^{\alpha_1}, a^{\alpha_2}, a^{\alpha_3}, \dots, a^{\alpha_n}, \dots$ обозначают $\boldsymbol{a^{\alpha}}$ и называют **степенью с иррациональным показателем**. Если $a > 1$ и $\alpha < 0$ – иррациональное число, то под a^{α} будем понимать число $\frac{1}{a^{-\alpha}}$.

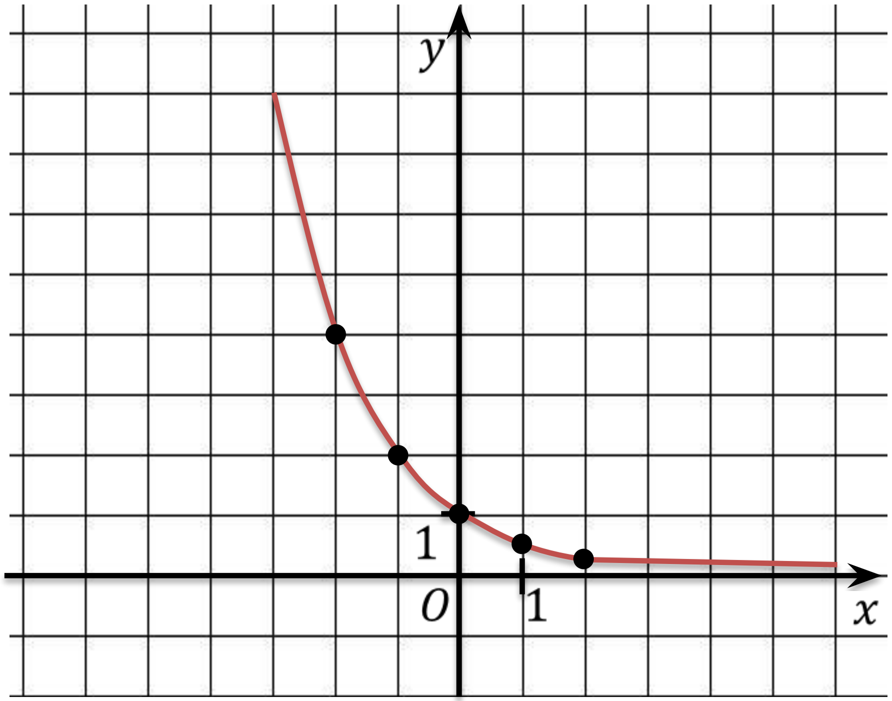
Если $0 < \alpha < 1$, то под a^{α} будем понимать число $\left(\frac{1}{a}\right)^{-\alpha}$.

$$D(y = a^x) = R$$



$y = a^x, a > 1$

1. $D(y) = R$
2. $E(y) = (0; +\infty)$
3. функция не является ни четной, ни нечетной
4. функция возрастает на R
5. функция не ограничена сверху, но ограничена снизу
6. $y_{\text{наиб}}, y_{\text{наим}}$ – не существует
7. функция непрерывная на R
8. функция выпукла вниз на R

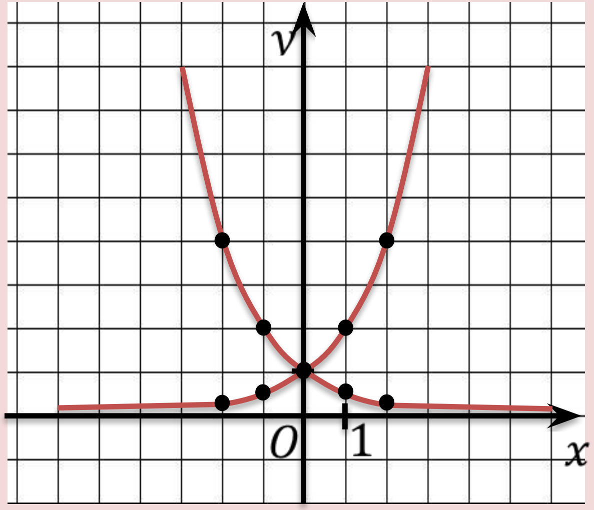


$y = a^x, 0 < a < 1$

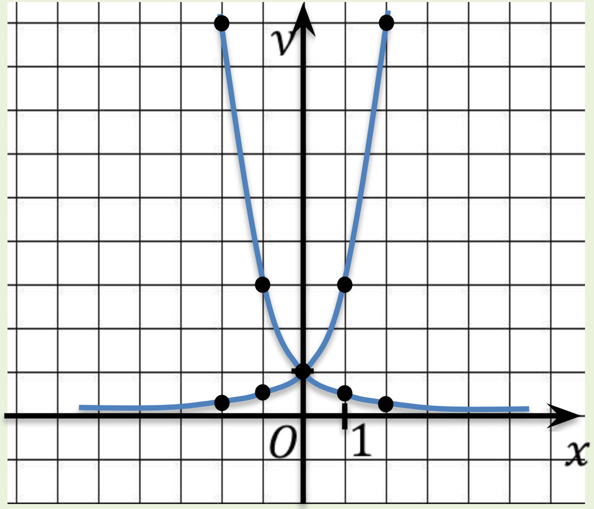
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

1. $D(y) = R$
2. $E(y) = (0; +\infty)$
3. функция не является ни четной, ни нечетной
4. функция убывает на R
5. функция не ограничена сверху, но ограничена снизу
6. $y_{\text{наиб}}, y_{\text{наим}}$ – не существует
7. функция непрерывная на R
8. функция выпукла вниз на R

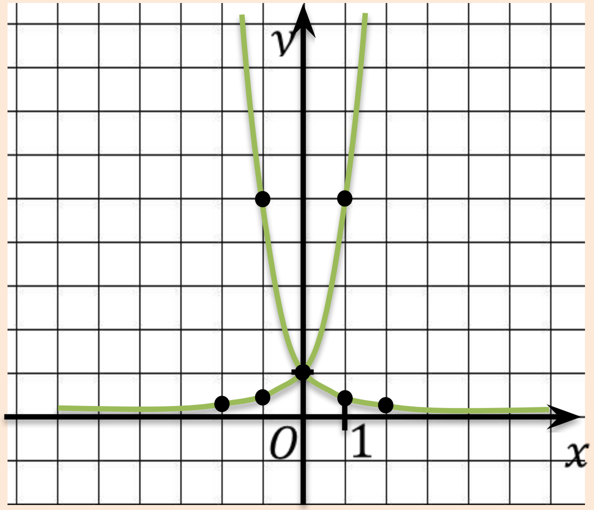
$$y = 2^x$$
$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$



$$y = 3^x$$
$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$



$$y = 5^x$$
$$y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$$



Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называют **показательной функцией**.

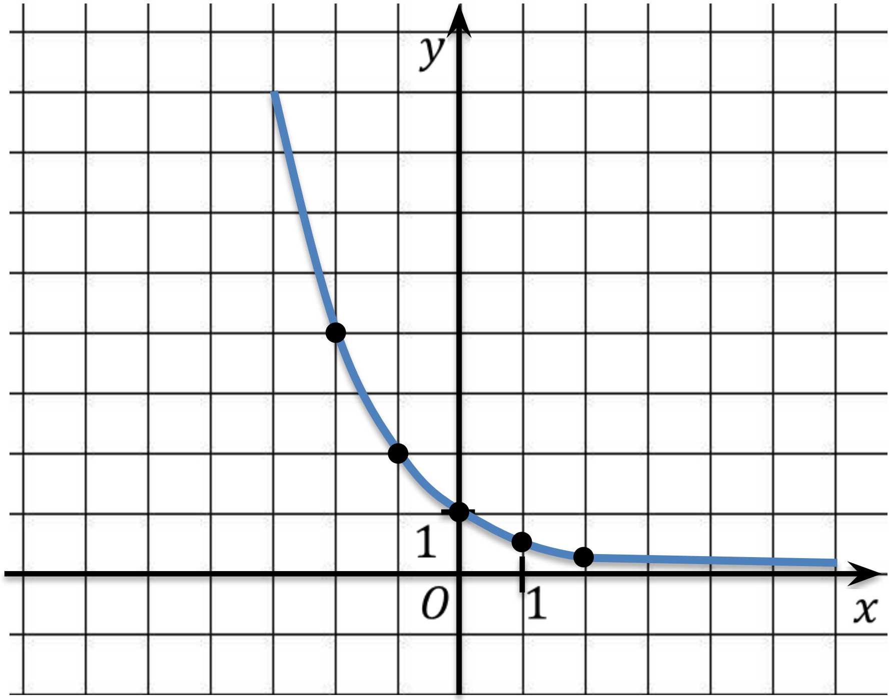
Возрастает

Непрерывна

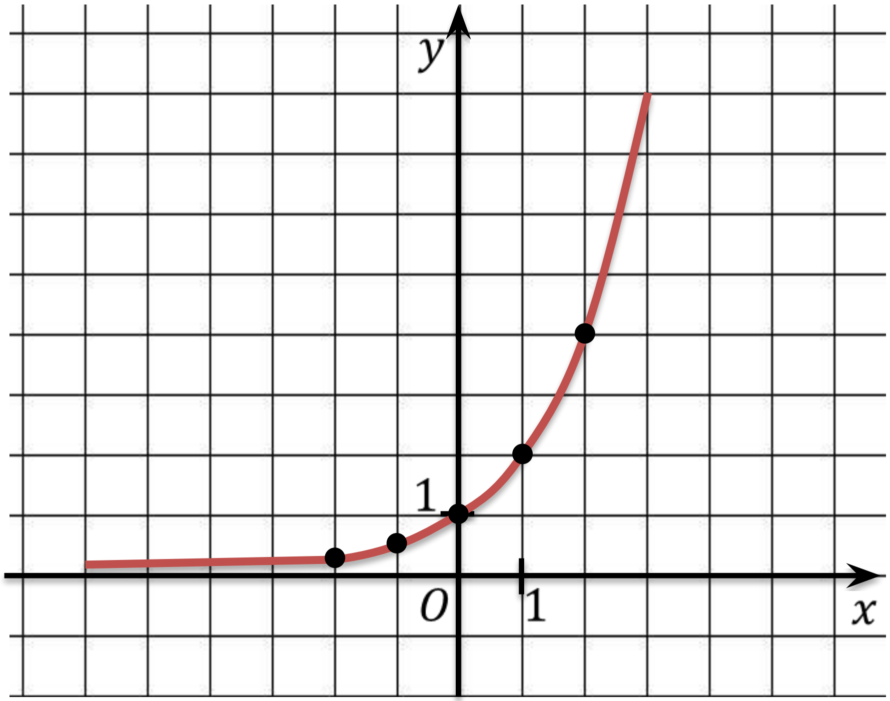
Убывает

Непрерывна

$$y = a^x, 0 < a < 1$$



$$y = a^x, a > 1$$



Экспонент
а

- $y = x^a$ – степенная функция

$y = a^x$ – показательная функция

$y = x^x$ – показательно-степенная функция

Пример:

Решить уравнения и неравенства:

а) $2^x = 1$; б) $2^x = 4$;

в) $2^x > 1$.

Решение:

а) $2^x = 1$

$(0; 1) \Rightarrow x = 0$

$2^x = 2^0$

б) $2^x = 4$

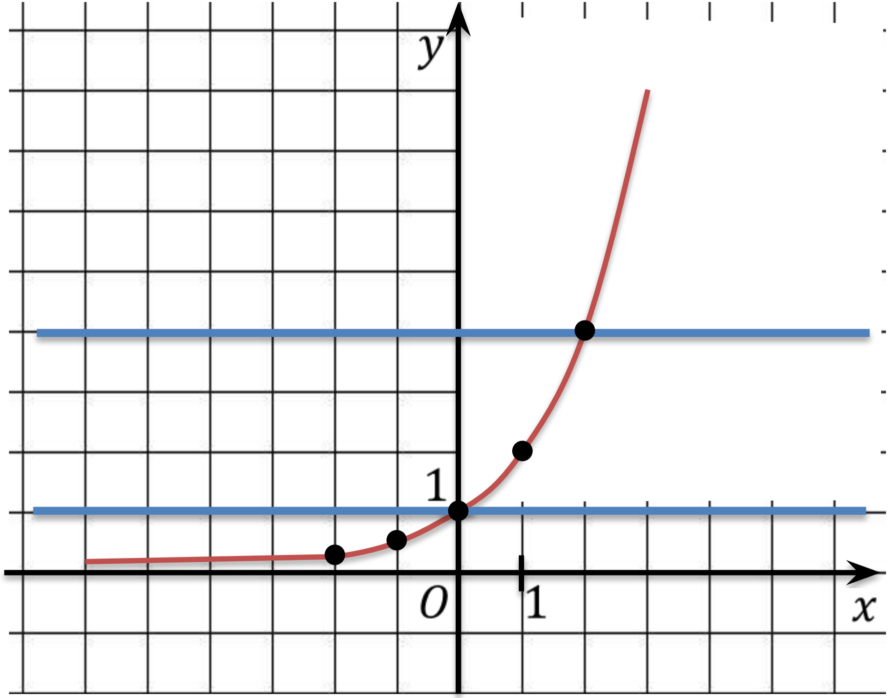
$(2; 4) \Rightarrow x = 2$

$2^x = 2^2$

в) $2^x > 1$

$x > 0$

$x \in (0; +\infty)$



Теорема 1. Если $a > 1$, то равенство $a^t = a^s$ справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.

Теорема 2. Если $a > 1$, то неравенство $a^x > 1$ справедливо тогда и только тогда, когда

$x > 0$; неравенство $a^x < 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x < 0$.

Пример:

Решить уравнения и неравенство:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 1$.

Решение:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$

$(0; 1) \Rightarrow x = 0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^0$

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$

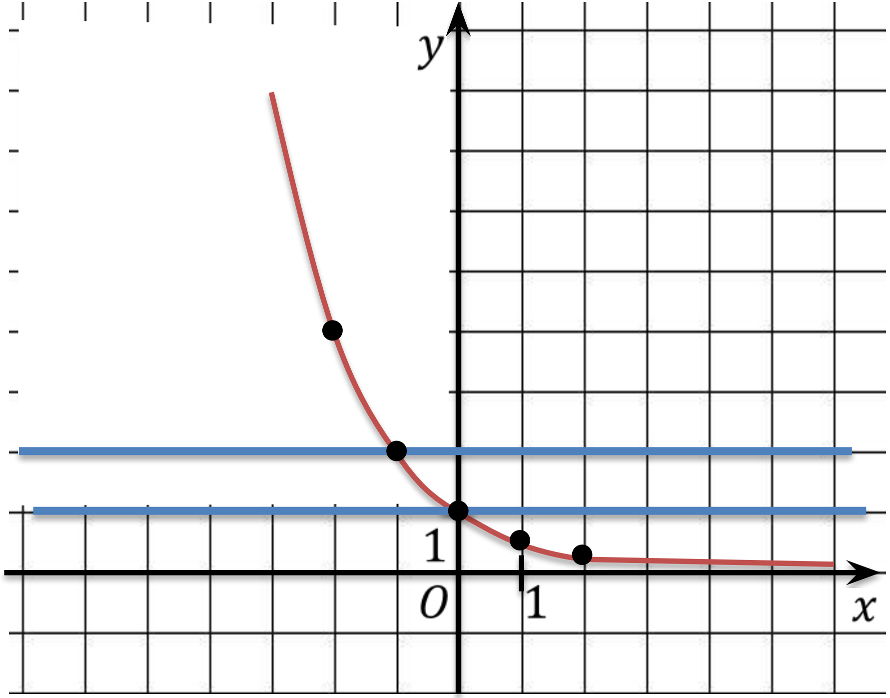
$\Rightarrow x = -1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 1$

$x < 0$

$x \in (-\infty; 0)$



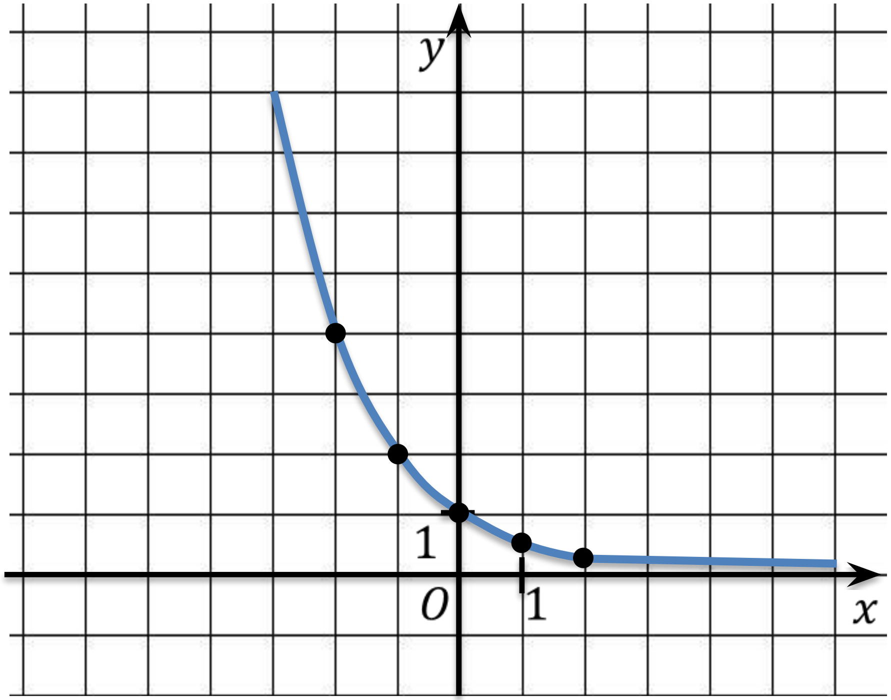
Теорема 1. Если $0 < a < 1$, то равенство $a^t = a^s$ справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.

Теорема 2. Если $0 < a < 1$, то неравенство $a^x > 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x < 0$; неравенство $a^x < 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x > 0$.

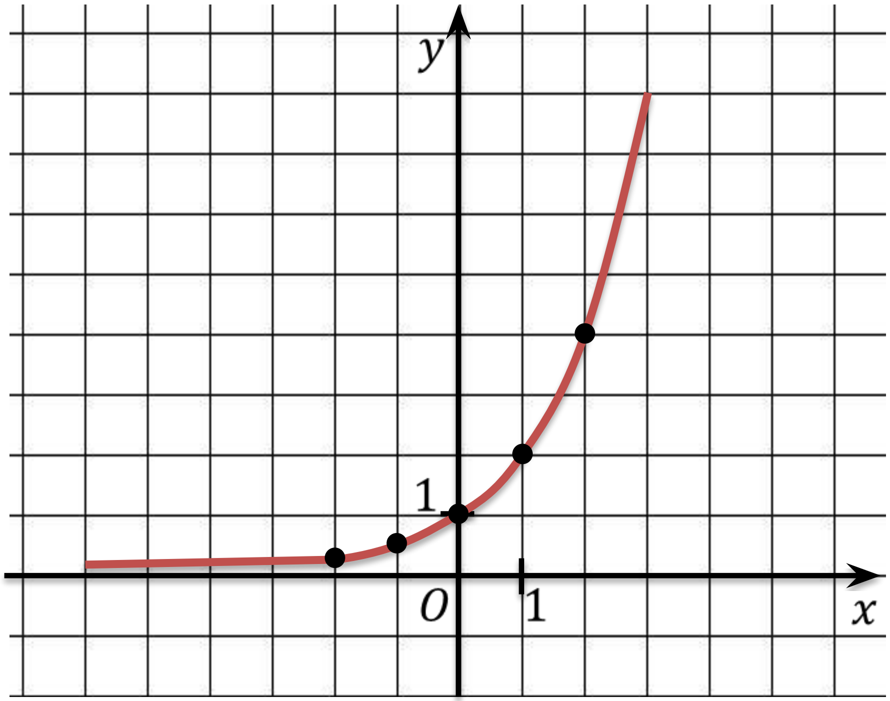
Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называют **показательной функцией**.

Возрастает	Убывает
Непрерывна	Непрерывна

$y = a^x, 0 < a < 1$



$y = a^x, a > 1$



Экспонент
а