

**10.12.20**

**Квадратичная  
функция, ее график и  
свойства**



- Определение
- График
- Свойства функции
- График и свойства функции  $y = ax^2$
- Сдвиг графика  $y = ax^2$
- Способы построения параболы
- Квадратичная функция в заданиях ГИА
- Примеры и комментарии
- Задания ГИА

# Квадратичная функция

Квадратичной функцией называют функцию, которую можно задать формулой вида  $y = ax^2 + bx + c$ , где  $a$ ,  $b$  и  $c$  - некоторые числа, причём  $a \neq 0$ .

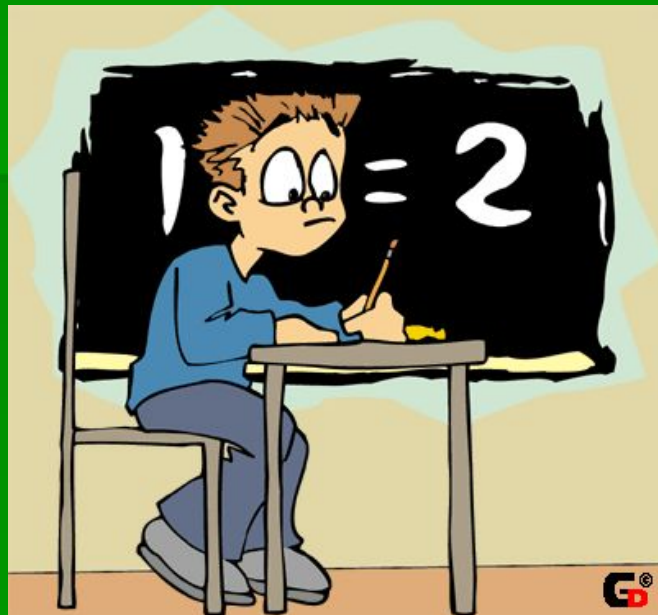
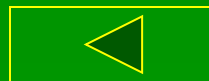
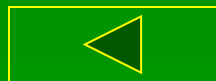
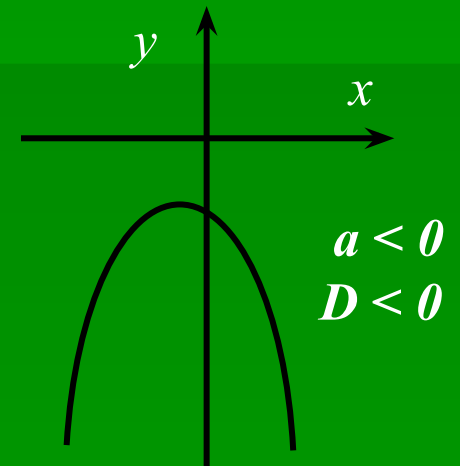
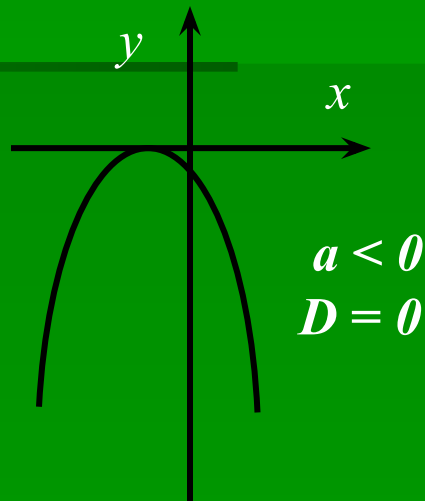
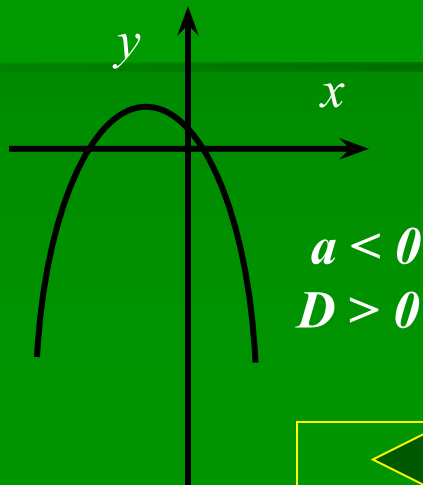
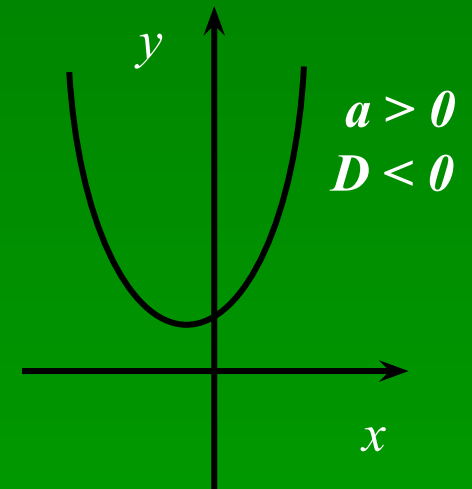
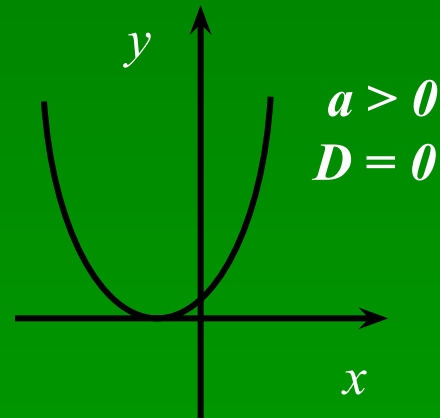
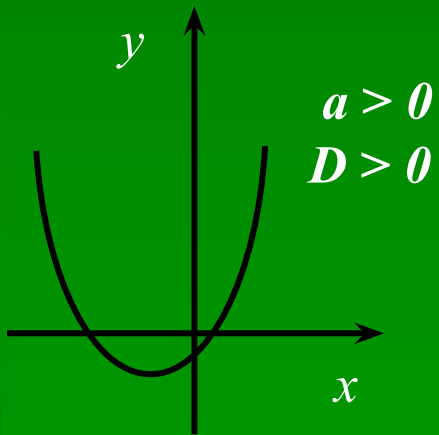


График любой квадратичной функции — парабола.

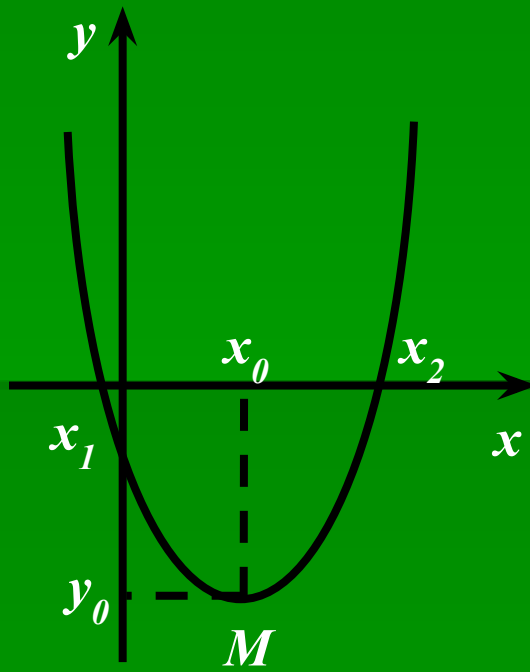


# График функции



# График

- $y = ax^2 + bx + c,$



- $D = b^2 - 4ac$  - дискриминант

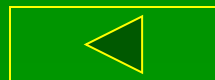
- $M(x_0, y_0)$  – вершина параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$$

- Уравнение параболы, проходящей через точку  $M$ :

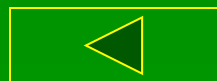
$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

- $x_1, x_2$  – корни уравнения:  
 $ax^2 + bx + c = 0$



# Свойства функции

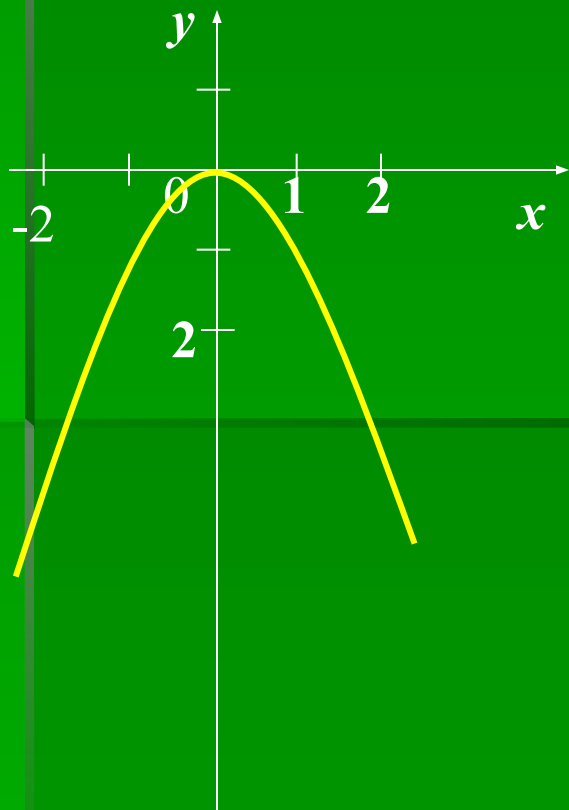
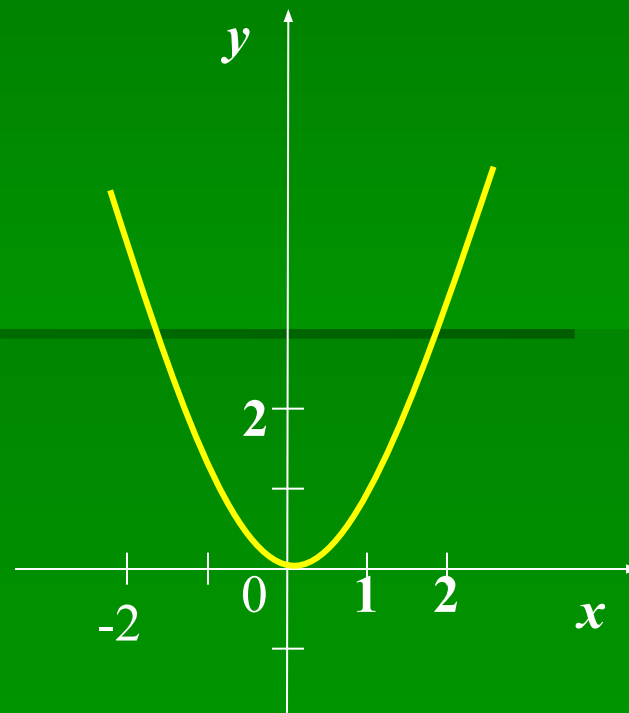
- 1. Нули функции:  $y=0$  (пересечения с осью  $Ox$ )
- 2. Точки пересечения с осью  $Oy$
- 3. Возрастание функции (если  $X_2 > X_1$ , то  $f(X_2) > f(X_1)$ ):  
с возрастанием аргумента увеличивается значение функции.  
Убывание функции (если  $X_2 > X_1$ , то  $f(X_2) < f(X_1)$ ):  
с возрастанием аргумента уменьшается значение функции  
- аргумент и функция связаны противоположными знаками.
- 4. Промежутки знакопостоянства :  $f(x) > 0$  и  $f(x) < 0$ .
- 5. Непрерывность функции (разрыв - нельзя провести график не отрываясь).
- 6. Наибольшее и наименьшее значение.



# Функция $y=x^2$

Построим график функции  $y=x^2$

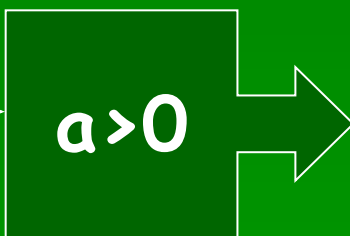
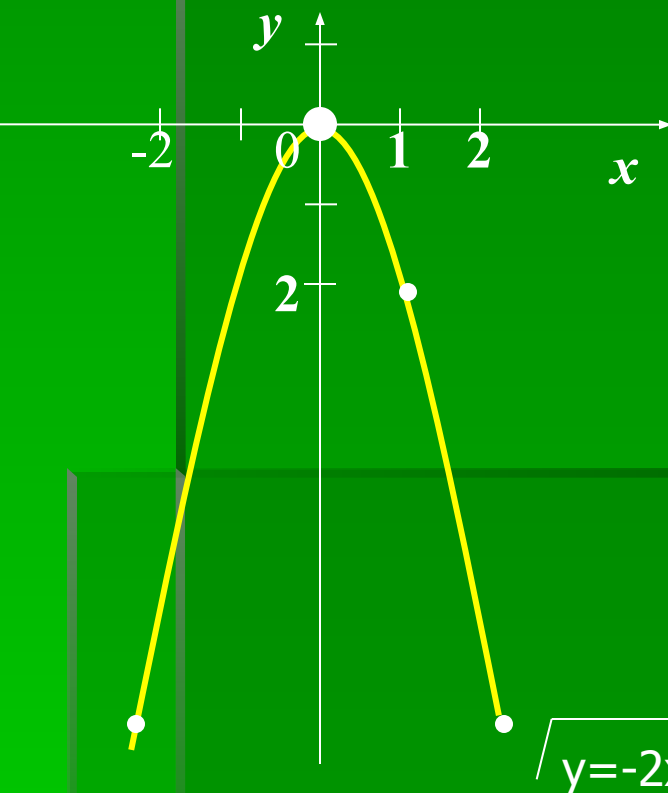
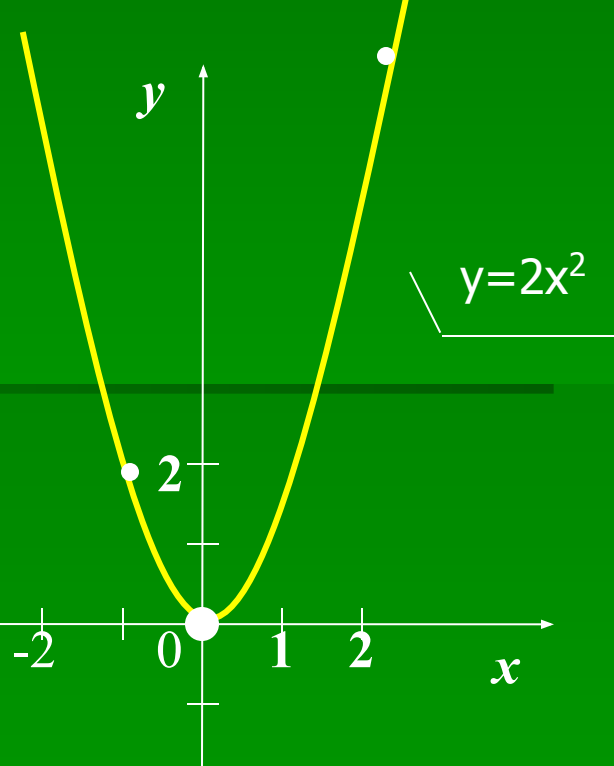
$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=x^2$	9	4	1	0	1	4	9



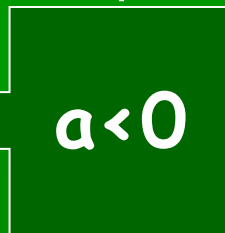
# Функция $y=ax^2$

Построим график функции  $y=2x^2$

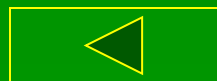
$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=2x^2$	18	8	2	0	2	8	18



Построим график функции  $y=-2x^2$



$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=2x^2$	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18





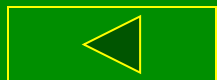
# График и свойства функции $y=ax^2$

Графиком функции  $y=ax^2$ , где  $a \neq 0$ , является парабола с вершиной в начале координат;

её осью симметрии служит ось  $y$ ;

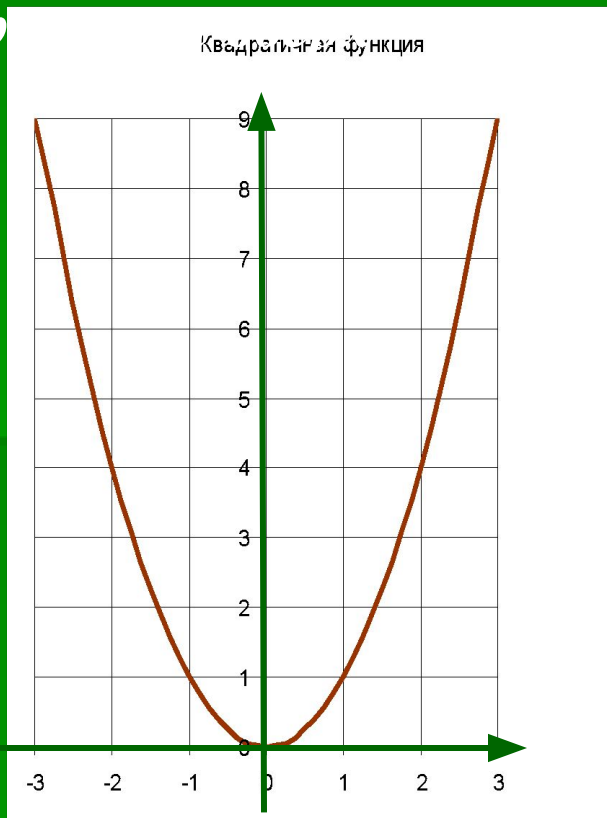
при  $a > 0$  ветви параболы направлены вверх,

при  $a < 0$  ветви вниз.

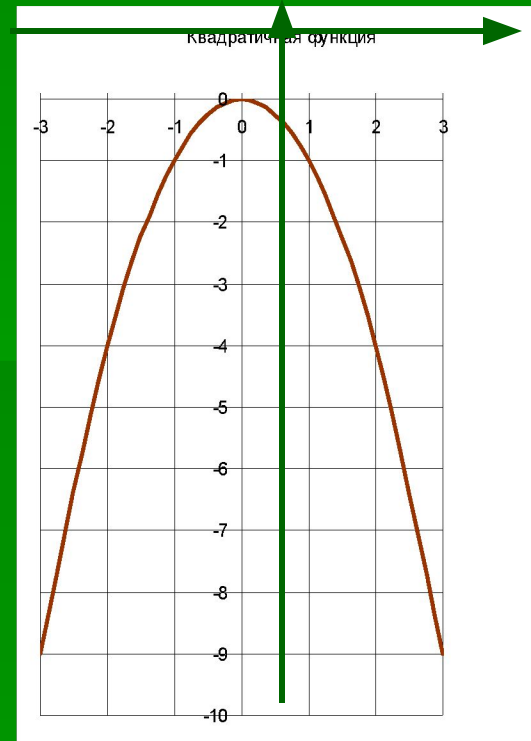


# Свойства квадратичной функции $y = ax^2$

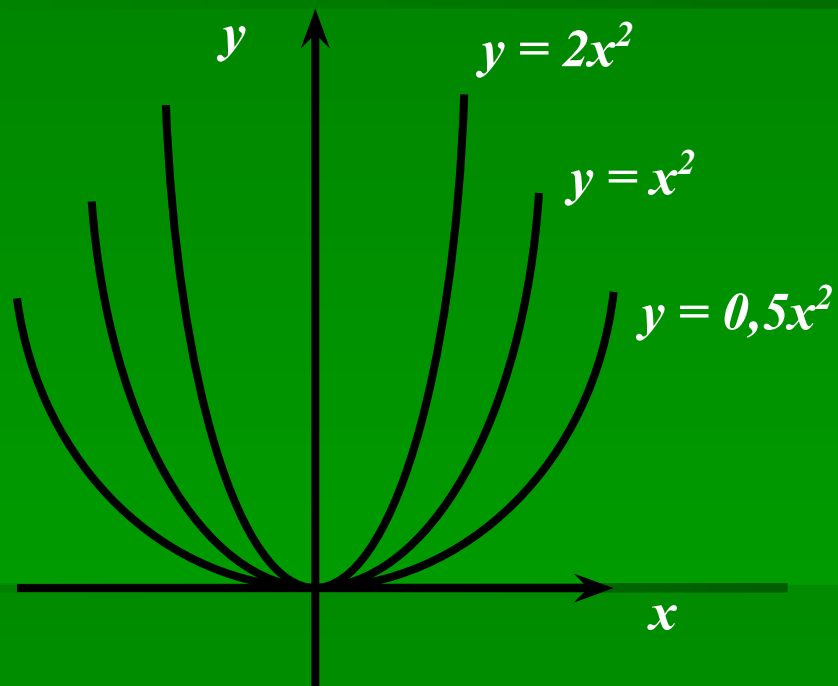
При  $a > 0$  ветви параболы  
напр



При  $a < 0$  ветви параболы  
направлены вниз

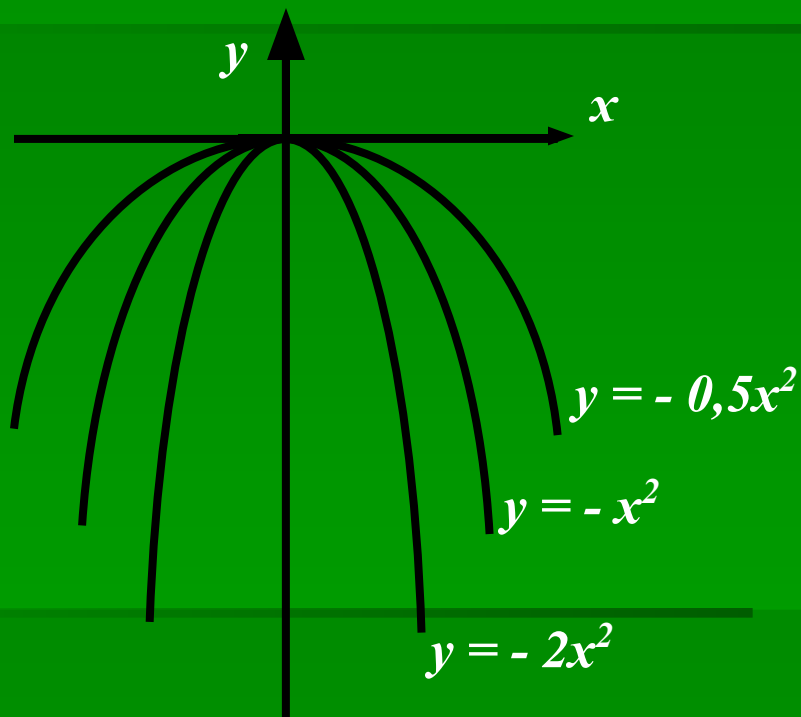


# Свойства $y = ax^2$ при $a > 0$



1.  $D(y) = \mathbb{R}$
2.  $E(y) = [0; +\infty)$
3. четная, т.к.  $y(-x) = y(x)$
4. Возрастает  
на промежутке  $[0; +\infty)$
5. Убывает  
на промежутке  $(-\infty; 0]$
6. Наименьшее значение  
равное 0 при  $x = 0$

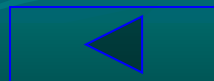
# Свойства $y = ax^2$ при $a < 0$



1.  $D(y) = \mathbb{R}$
2.  $E(y) = (-\infty; 0]$
3. четная, т.к.  $y(-x) = y(x)$
4. Возрастает  
на промежутке  $(-\infty; 0]$
5. Убывает  
на промежутке  $[0; +\infty)$
6. Наибольшее значение  
равное 0 при  $x = 0$

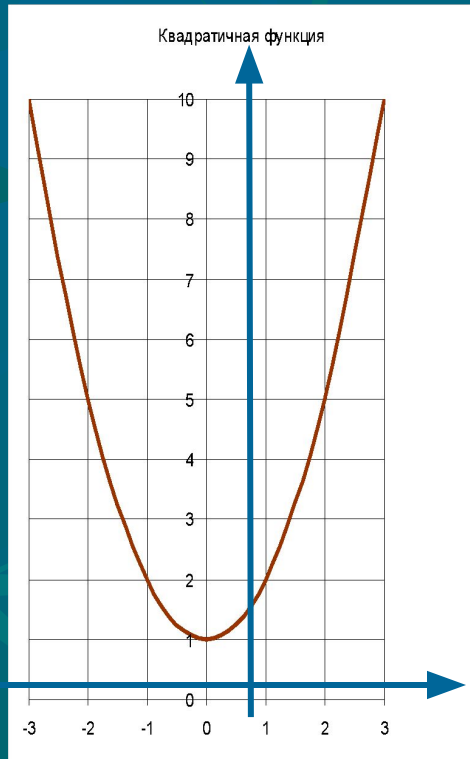
# Сдвиг графика функции $y = ax^2$ вдоль осей координат

- 1. Чтобы построить график функции  $y = ax^2 + g$ , нужно перенести параболу  $y = ax^2$  вдоль оси на  $g$  единиц вверх, если  $g > 0$ , или на  $|g|$  единиц вниз, если  $g < 0$ . При этом вершина параболы окажется в точке  $(0; g)$ .
- 2. Чтобы построить график функции  $y = a(x + p)^2$ , нужно перенести параболу  $y = ax^2$  вдоль оси  $x$  на  $p$  единиц влево, если  $p > 0$ , или на  $|p|$  единиц вправо, если  $p < 0$ . При этом вершина параболы окажется в точке  $(-p; 0)$ .
- 3. Чтобы построить график функции  $y = a(x + p)^2 + g$ , нужно перенести параболу  $y = ax^2$  вдоль оси  $x$  на  $p$  единиц влево, если  $p > 0$ , или на  $|p|$  единиц вправо, если  $p < 0$  и вдоль оси  $y$  на  $g$  единиц вверх, если  $g > 0$ , или на  $|g|$  единиц вниз, если  $g < 0$ . При этом вершина параболы окажется в точке  $(-p; g)$ .

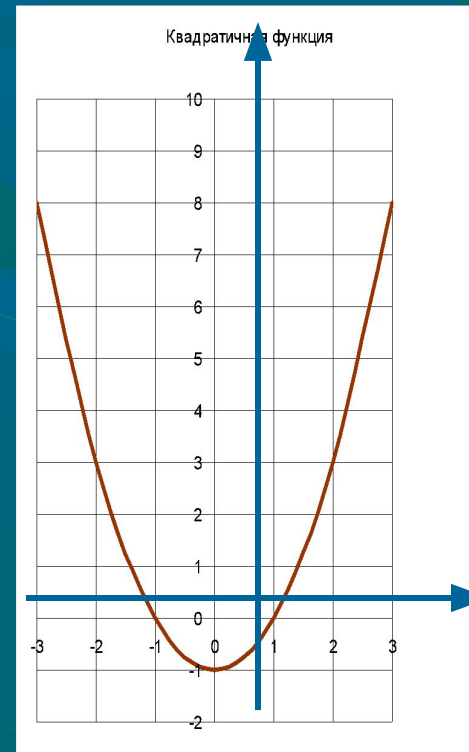


# Функция $y = ax^2 + b$

1)  $b > 0$



2)  $b < 0$

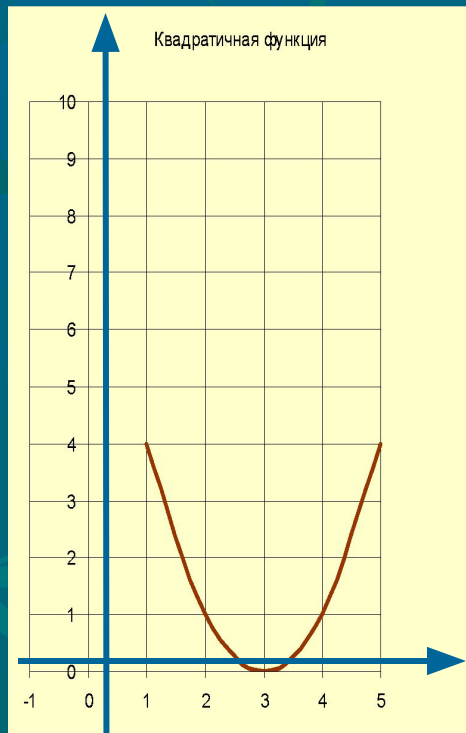


Данный график получается

смещением параболы  $y = ax^2$  по оси  $Oy$  на  $b$  единиц вверх (если  $b > 0$ ) или вниз (если  $b < 0$ )

# Функция $y = a(x - p)^2$

1)  $p > 0$



2)  $p < 0$

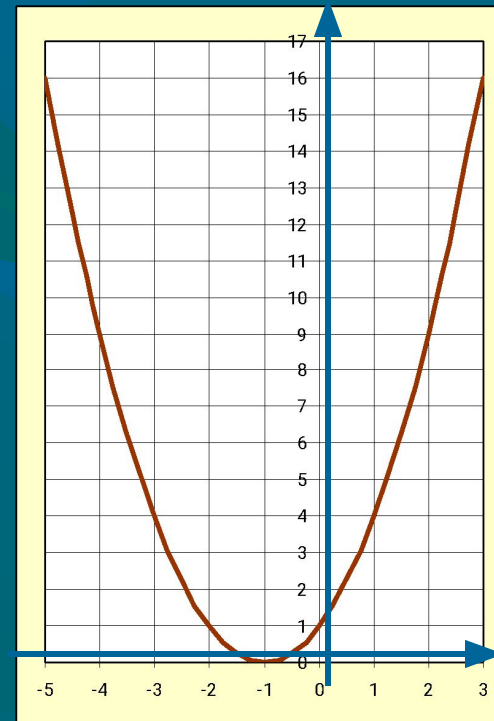


График получается

смещением параболы  $y = ax^2$  по оси  $Ox$  на  $p$  единиц вправо (если  $p > 0$ ) или влево (если  $p < 0$ )

# Способы построения графика квадратичной функции

## 1 СПОСОБ

Схема

Пример №1

Пример №2

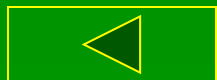
## 2 СПОСОБ

Пример №3

## 3 СПОСОБ

Пример №4

Пример №5

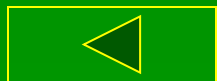




# 1 СПОСОБ.

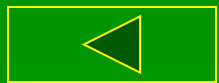
Схема построения графика квадратичной функции  $y=ax^2-bx+c$ :

- Построить вершину параболы.
- Провести через вершину параболы прямую, параллельную оси ординат, - ось симметрии параболы.
- Найти нули функции, если они есть, и построить на оси абсцисс соответствующие точки параболы.
- Построить дополнительные точки.
- Провести через построенные точки параболу.



## 2 СПОСОБ.

Построение параболы по точкам с ординатой, равной свободному члену квадратного трёхчлена  $ax^2 - bx + c$ .



### 3 СПОСОБ.

$$y = a(x - m)^2 + n$$

График функции  $y = a(x - m)^2 + n$  получается сдвигом графика функции  $y = ax^2$  на  $m$  единичных отрезков по оси  $Ox$  и на  $n$  единичных отрезков по оси  $Oy$ .

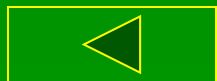
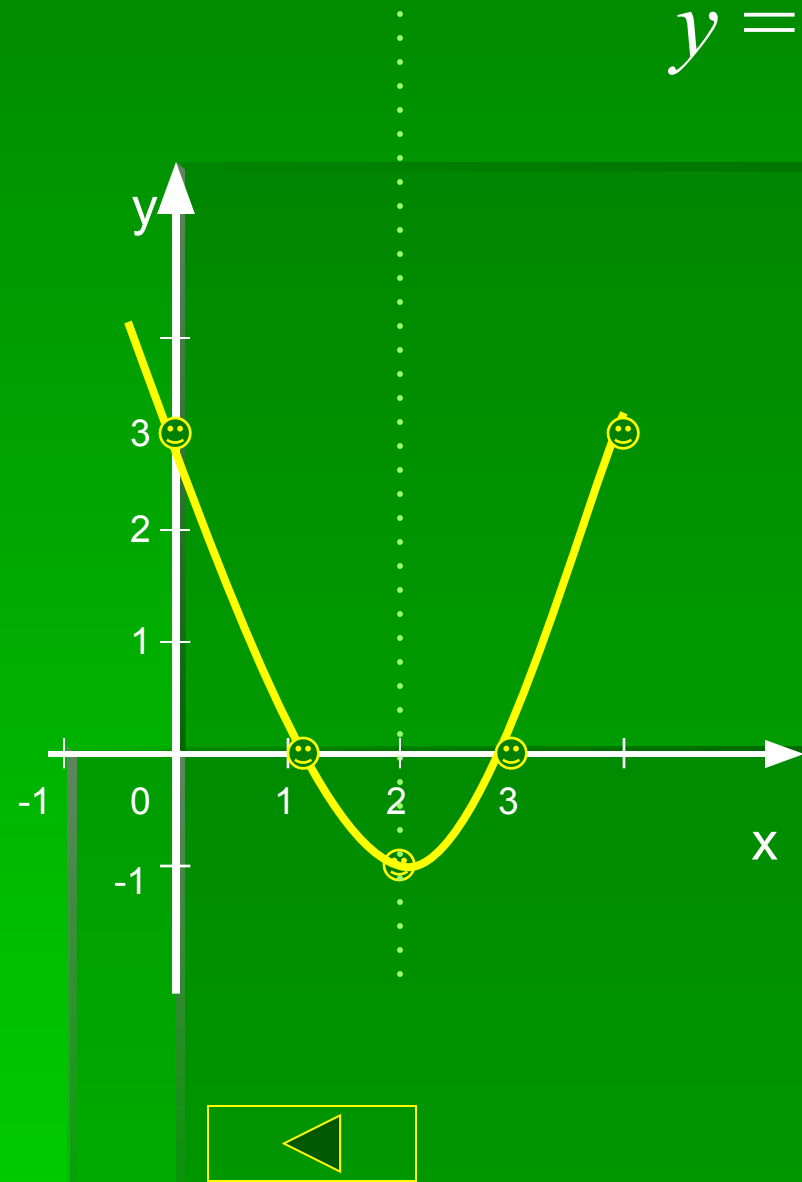


Схема построения параболы:

$$y = x^2 - 4x + 3$$



- Найти координаты вершины параболы:  $M(2;-1)$ .
$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$$
$$y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = 7 - 8 = -1$$
- Провести ось симметрии:  $x = 2$ .
- Найти нули функции при  $y = 0$ :  $(1;0)$  и  $(3;0)$
- Найти дополнительные точки: при  $x=0, y=3$ ; при  $x=4, y=3$ .
- Соединить полученные точки.

## Пример №1

$$y = 3x^2 + 12x + 9$$

Графиком функции является парабола, ветви параболы направлены вверх, т.к.  $a = 3$ ,  $a > 0$ .

$M(x_0; y_0)$  - вершина параболы

$$x_0 = \frac{-b}{2a}; \quad x_0 = -12 : 6 = -2$$

$$y_0 = 3(-2)^2 + 12(-2) + 9 = -3. \quad M(-2; -3)$$

Прямая  $x = -2$  – ось симметрии

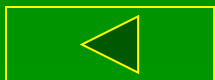
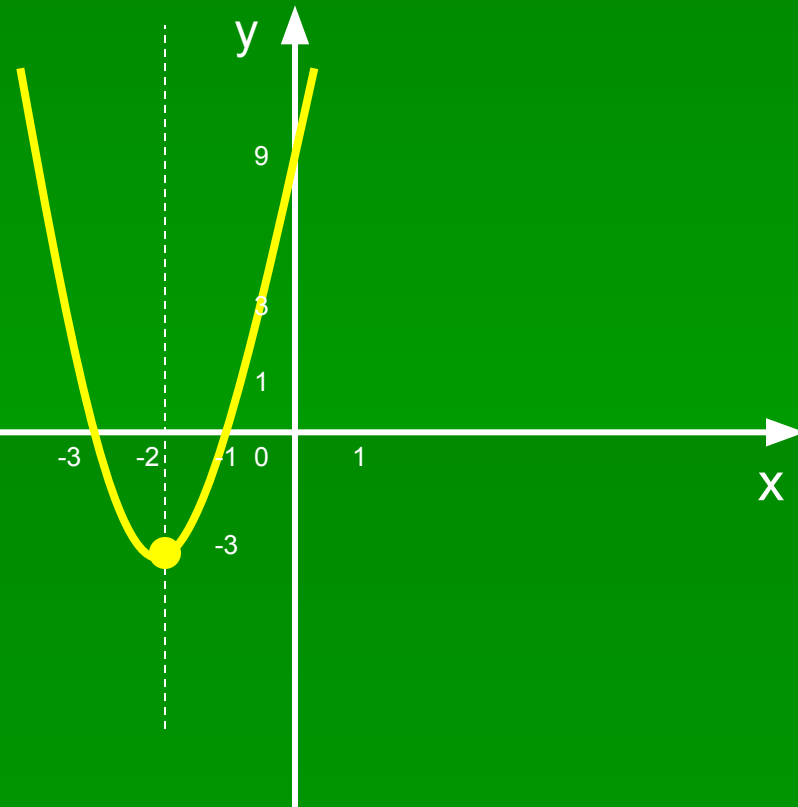
Нули функции:  $y=0$

$$3x^2 + 12x + 9 = 0$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -3$$

x	0	-1
y	9	0



## Пример №2

$$y = \frac{1}{4}x^2 + 2x - 5$$

Графиком функции является парабола, ветви параболы направлены вверх, т.к.  $a = \frac{1}{4}$ ,  $a > 0$ .

$M(x_0; y_0)$  - вершина параболы

$$x_0 = \frac{-b}{2a}; \quad x_0 = -2 : \frac{1}{2} = -4$$

$$y_0 = \frac{1}{4}(-4)^2 + 2(-4) - 5 = -9. \quad M(-4; -9)$$

Прямая  $x = -4$  – ось симметрии

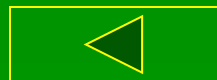
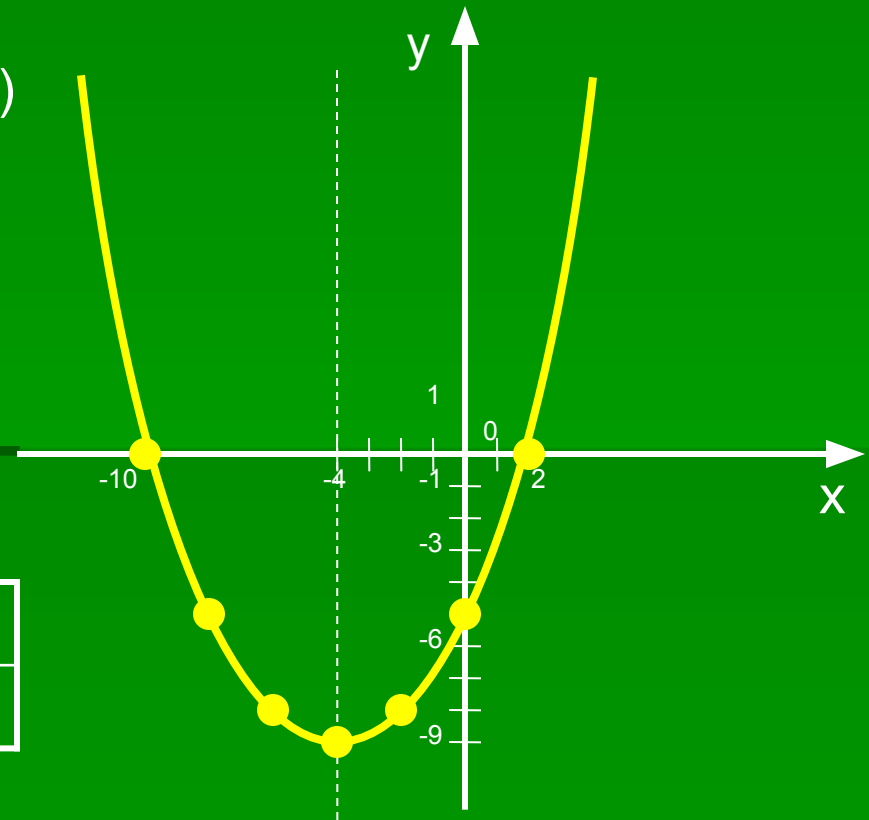
Нули функции:  $y=0$

$$\frac{1}{4}x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$x^2 + 8x - 20 = 0$$

$$x_1 = -10, \quad x_2 = 2$$

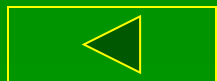
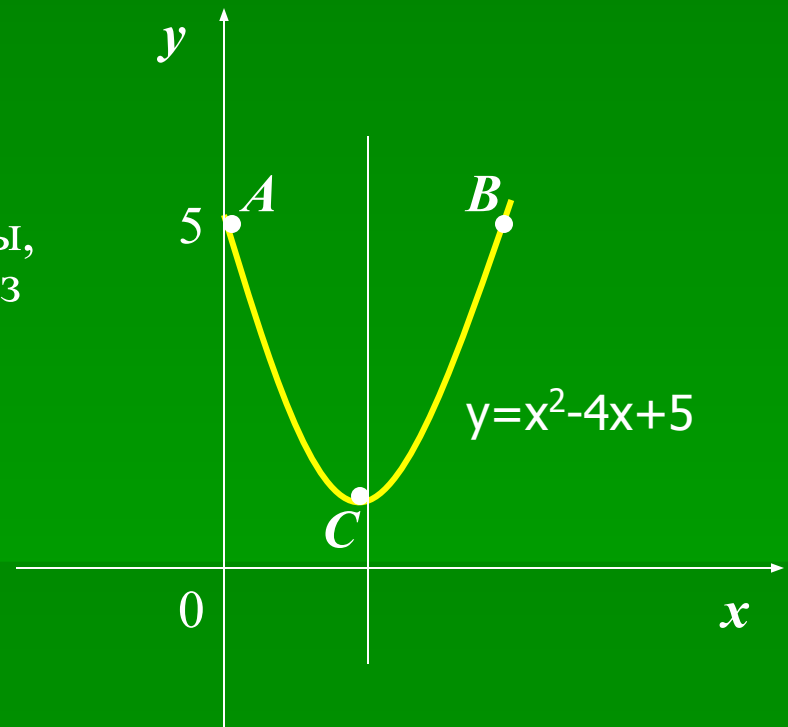
x	0	-2
y	-5	-8



### Пример №3

Построим график функции  $y=x^2-4x+5$ .

- 1) Найдём точки графика, имеющие ординату, равную 5. Для этого решаем уравнение  $x^2 - 4x + 5 = 5$ . Получаем:  $x_1 = 0, x_2 = 4$
- 2) Точки  $A(0; 5)$  и  $B(4; 5)$  лежат на параболе и имеют одинаковую ординату. Эти точки симметричны относительно оси симметрии параболы, поэтому ось симметрии проходит через середину отрезка  $AB$ . Т.к. абсцисса точки  $A$  равна 0, а т.  $B$  равна четырём, то уравнение оси параболы  $x = 2$ .
- 3) Подставим значение  $x$  в уравнение. Получаем координаты вершины параболы:  $x_0 = 2, y_0 = 1$ .
- 4) Отмечаем на координатной плоскости т.  $C(2; 1)$ , построим параболу, проходящую через три точки  $A, B, C$ .



## Пример №4

Построим график функции  $y=2(x+1)^2-3$ .

Будем действовать следующим образом:

1) Построим параболу  $y=2x^2$ ;

2) Перенесем ее на 1 единицу влево и на 3 единицы вниз – в результате получится график заданной функции  $y=2(x+1)^2 - 3$  (см.рис)

Действия , которые мы выполнили для построения графика , можно описать такой схемой:

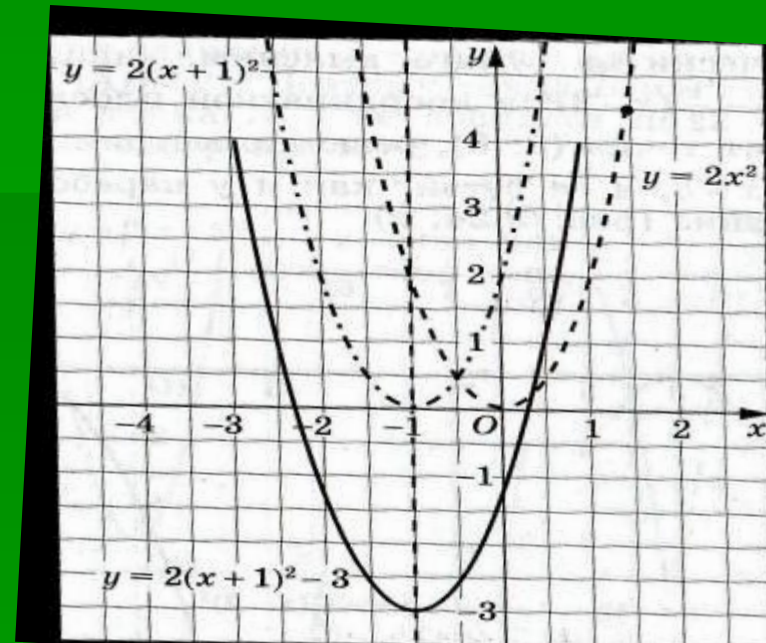
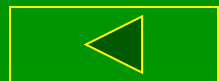
$$y=2x^2$$

Влево на 1 ед.

$$y=2(x+1)^2$$

Вниз на 3 ед.

$$y=2(x+1)^2 - 3$$





Пример №5

$$y = -2(x+3)^2 + 2$$

$$m = -3$$
$$n = 2$$

$$y = -2x^2$$

x	1	-1	2
y	-2	-2	-8

$$y = -2(x+3)^2 + 2$$

