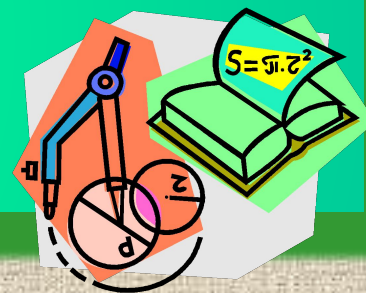


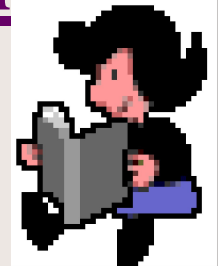
**Материалы к урокам  
геометрии  
в 8 классе  
по теме:**



**«Подобие треугольников.  
Признаки подобия  
треугольников»**

# Содержание:

- Теоретический материал
- Признаки подобия  
треугольников
- Примеры решения задач
- Это интересно...
- Задачи для самостоятельного  
выполнения



# Геометрический материал:

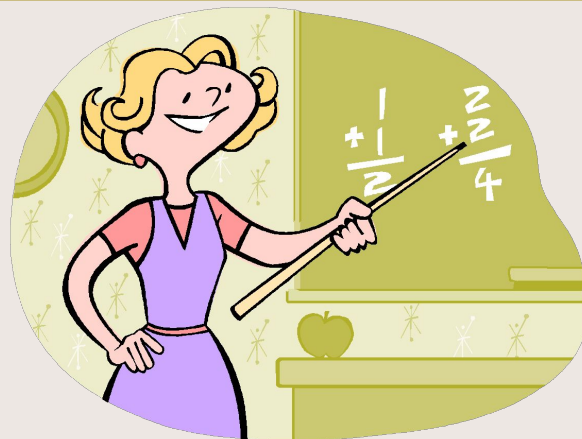
- Пропорциональные отрезки
- Определение подобных треугольников
- Отношение площадей подобных треугольников



# Признаки подобия треугольников:



- II I признак
- III признак
- III признак
- Подобие прямоугольных  
треугольников

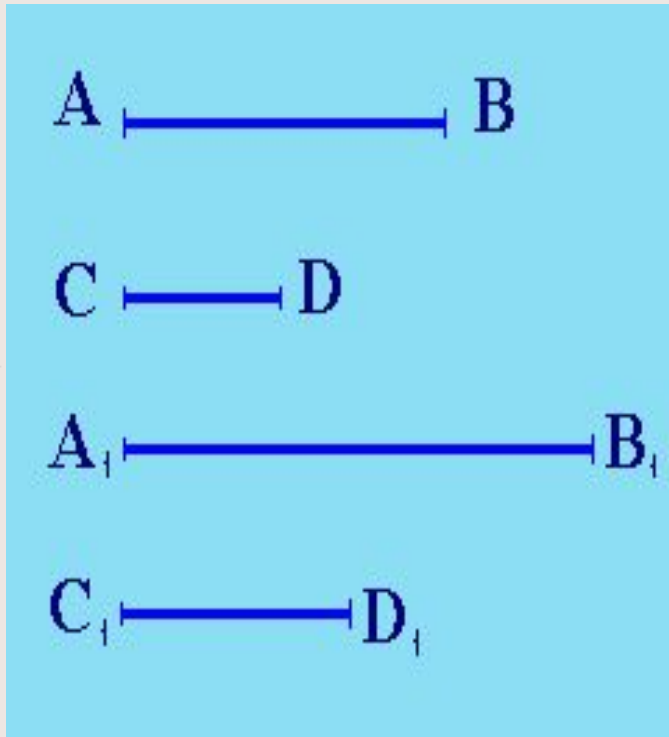


# Примеры решения задач:

- Задача 1
- Задача 2
- Задача 3



# Пропорциональные отрезки.



*Отношением отрезков* AB и CD называется отношение их длин, т. е.

$$\frac{AB}{CD}$$

Говорят, что отрезки AB и CD *пропорциональны* отрезкам A<sub>1</sub>B<sub>1</sub> и C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>, если

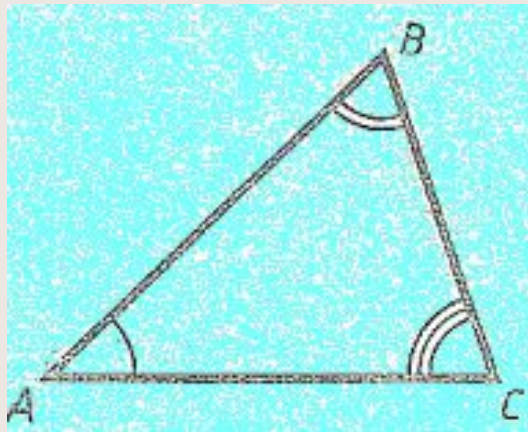
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$$

Например, отрезки AB и CD, длины которых равны 2 см и 1 см, пропорциональны отрезкам A<sub>1</sub>B<sub>1</sub> и C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>, длины которых равны 3 см и 1,5 см.

В самом деле,  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{2}{3}$

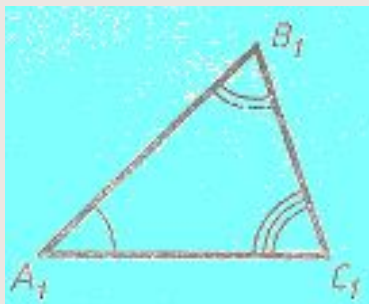


# Определение подобных треугольников.



Пусть у двух треугольников  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  соответствующие углы равны. В этом случае стороны  $AB$  и  $A_1B_1$ ,  $BC$  и  $B_1C_1$ ,  $CA$  и  $C_1A_1$  называются *сходственными*.

Два треугольника называются *подобными*, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$$

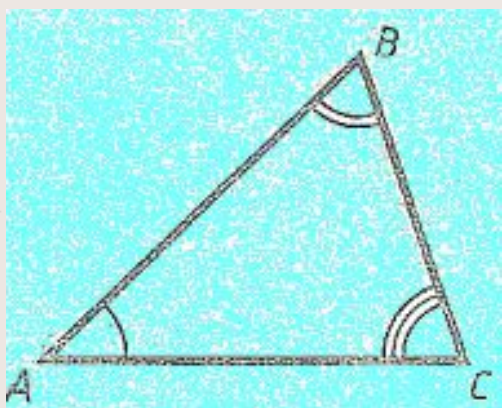
Число  $k$ , равное отношению сходственных сторон треугольников, называется *коэффициентом подобия*.





# Отношение площадей подобных треугольников.

**Теорема:** Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

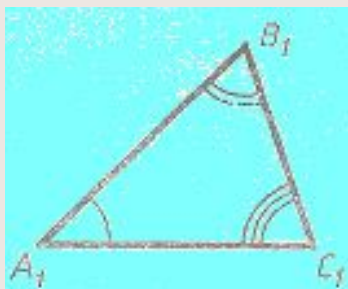


Дано:  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ . Коэффициент подобия равен  $k$ .

Доказать:  $\frac{S}{S_1} = k^2$

Доказательство: Пусть площадь  $\triangle ABC$  равна  $S$ , а площадь  $\triangle A_1B_1C_1$  равна  $S_1$ .

Так как  $\angle A = \angle A_1$ , то  $\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$



(по теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу). Так как  $\frac{AB}{A_1B_1} = k$ ,  $\frac{AC}{A_1C_1} = k$ ,

поэтому  $\frac{S}{S_1} = k^2$ . Теорема доказана.





# Первый признак подобия треугольников.

**Теорема:** Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

**Дано:**  $\triangle ABC$ ,  $\triangle A_1B_1C_1$ .  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$

**Доказать:**  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .

**Доказательство:** по теореме о сумме углов треугольника

$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B, \quad \angle C_1 = 180^\circ - \angle A_1 - \angle B_1,$$

и, значит,  $\angle C = \angle C_1$ . Таким образом, углы  $\triangle ABC$

соответственно равны углам  $\triangle A_1B_1C_1$ . Докажем, что стороны  $\triangle ABC$  пропорциональны сходственным сторонам  $\triangle A_1B_1C_1$ .

Т.к.  $\angle A = \angle A_1$  и  $\angle C = \angle C_1$ , то

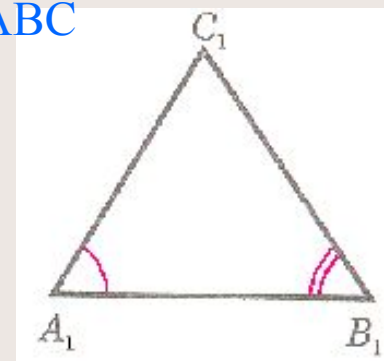
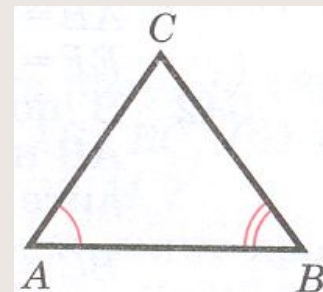
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} \quad \text{и} \quad \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{CA \cdot CB}{C_1A_1 \cdot C_1B_1}$$

Из этих равенств следует, что  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$

Аналогично, используя равенства  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle B = \angle B_1$ , получаем  $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$ .

Итак, стороны  $\triangle ABC$  пропорциональны сходственным сторонам  $\triangle A_1B_1C_1$ .

**Теорема доказана.**



# Второй признак подобия треугольников.

**Теорема:** Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

**Дано:**  $\triangle ABC$ ,  $\triangle A_1B_1C_1$ , у которых  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ ,  $\angle A = \angle A_1$

**Доказать:**  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .

**Доказательство:** Достаточно доказать, что  $\angle B = \angle B_1$ .

Рассмотрим  $\triangle ABC_2$ , у которого  $\angle 1 = \angle A_1$ ,  $\angle 2 = \angle B_1$

Треугольники  $ABC_2$  и  $A_1B_1C_1$  подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1}.$$

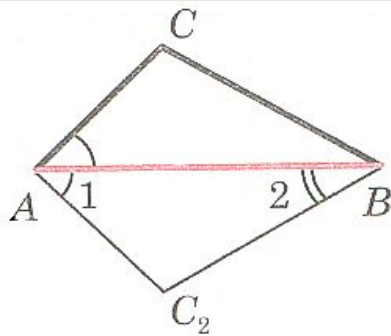
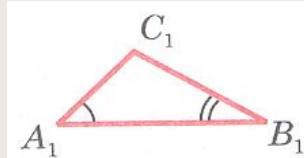
С другой стороны, по условию  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ .

Из этих двух равенств получаем  $AC = AC_2$ .

$\triangle ABC$  и  $\triangle ABC_2$  равны по двум сторонам и углу между ними ( $AB$  – общая сторона,  $AC = AC_2$  и  $\angle A = \angle 1$ )

Отсюда следует, что  $\angle B = \angle 2$ , а так, как  $\angle 2 = \angle B_1$ , то  $\angle B = \angle B_1$ .

**Теорема доказана.**



# Третий признак подобия треугольников.

**Теорема:** Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

**Дано:**  $\triangle ABC$ ,  $\triangle A_1B_1C_1$ , у которых  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$ .

**Доказать:**  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .

**Доказательство:** Достаточно доказать, что  $\angle A = \angle A_1$ .

Рассмотрим  $\triangle ABC_2$ , у которого  $\angle 1 = \angle A_1$ ,  $\angle 2 = \angle B_1$

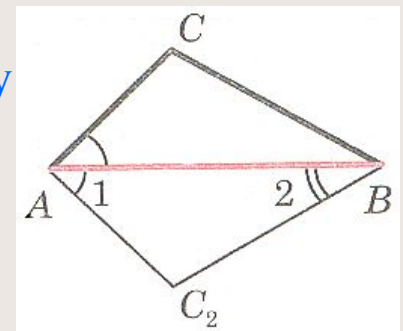
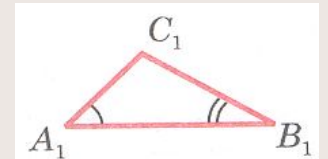
Треугольники  $ABC_2$  и  $A_1B_1C_1$  подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому  $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC_2}{B_1C_1} = \frac{C_2A}{C_1A_1}$ .

Сравнивая эти равенства с равенствами, которые записаны в дано, получаем:  $BC = BC_2$ ,  $CA = C_2A$ .

$\triangle ABC = \triangle ABC_2$  по трем сторонам. Отсюда следует, что  $\angle A = \angle 1$ ,

а так как  $\angle 1 = \angle A_1$ , то  $\angle A = \angle A_1$ .

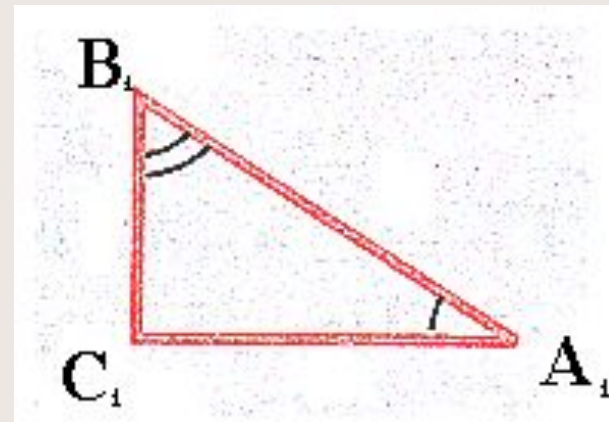
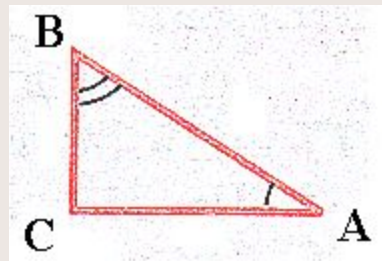
**Теорема доказана.**



# Подобие прямоугольных треугольников.

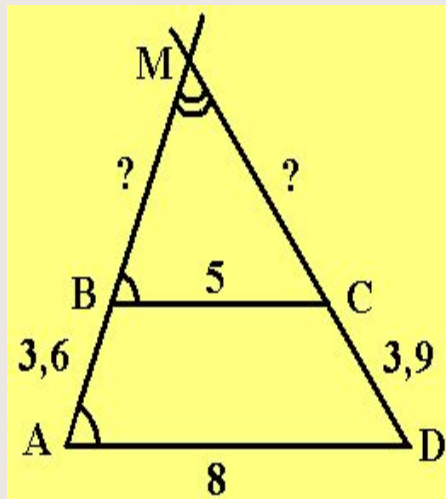
Два прямоугольных треугольника **подобны**, если

- 1) их катеты пропорциональны;
- 2) катет и гипотенуза одного треугольника пропорциональны катету и гипотенузе другого;
- 3) два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника.



# Задача 1.

Основания трапеции равны 5 см и 8 см. Боковые стороны, равные 3,6 см и 3,9 см, продолжены до пересечения в точке М. Найдите расстояния от точки М до концов меньшего основания.



**Дано:** ABCD – трапеция. AD=8 см, BC=5 см, AB = 3,6 см, CD = 3,9 см. AB пересекает CD в точке М.

**Найти:** BM и CM.

**Решение:**  $\triangle AMD \sim \triangle BMC$  по I признаку подобия треугольников (угол М – общий, угол MAD = углу MBC как односторонние при параллельных прямых BC и AD и секущей AM). Значит их сходственные стороны пропорциональны.

Пусть  $BM = x$ , тогда  $AM = 3,6 + x$ . По определению подобных треугольников имеем

$$\frac{x}{3,6+x} = \frac{5}{8}$$

По свойству пропорций получим:  $8x = 5(3,6 + x)$ . Отсюда получаем, что  $x = 6$ . Значит  $BM = 6$  см. Аналогично составим пропорцию для стороны MC:

$\frac{x}{3,9+x} = \frac{5}{8}$  По свойству пропорций получим:  $8x = 5(3,9 + x)$ . Отсюда получаем, что  $x = MC = 6,5$  см.

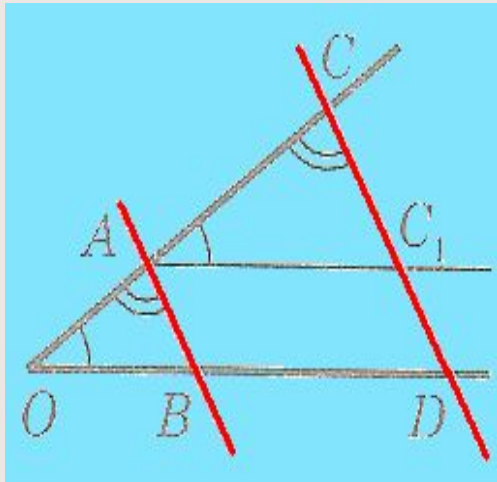
**Ответ:** 6 см и 6,5 см.





# Задача 2.

Стороны угла  $O$  пересечены параллельными прямыми  $AB$  и  $CD$ . Докажите, что отрезки  $OA$  и  $AC$  пропорциональны отрезкам  $OB$  и  $BD$ .



**Дано:** угол  $O$ ,  $AB \parallel CD$ .

$AB$  пересекает угол  $O$ ,  $CD$  пересекает угол  $O$ .

**Доказать:**  $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$

**Доказательство:** Проведем через точку  $A$  прямую  $AC_1 \parallel BD$  ( $C_1$  – точка пересечения этой прямой с прямой  $CD$ ). Тогда  $\triangle OAB \sim \triangle ACC_1$  по первому признаку подобия треугольников ( $\angle O = \angle CAC_1$  и

$\angle OAB = \angle C$ ), следовательно,  $\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{AC_1}$

Так как  $AC_1 = BD$  (по определению параллелограмма  $AC_1DB$ ), то  $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$

**Что и требовалось доказать.**





# Задача 3.

На одной из сторон данного угла  $A$  отложены отрезки  $AB = 5$  см и  $AC = 16$  см. На другой стороне этого же угла отложены отрезки  $AD = 8$  см и  $AF = 10$  см. Подобны ли треугольники  $ACD$  и  $AFB$ ?

Дано: угол  $A$ .  $AB = 5$  см,  $AC = 16$  см,  $AD = 8$  см,  $AF = 10$  см.

Проверить:  $\triangle ACD \sim \triangle AFB$  ?

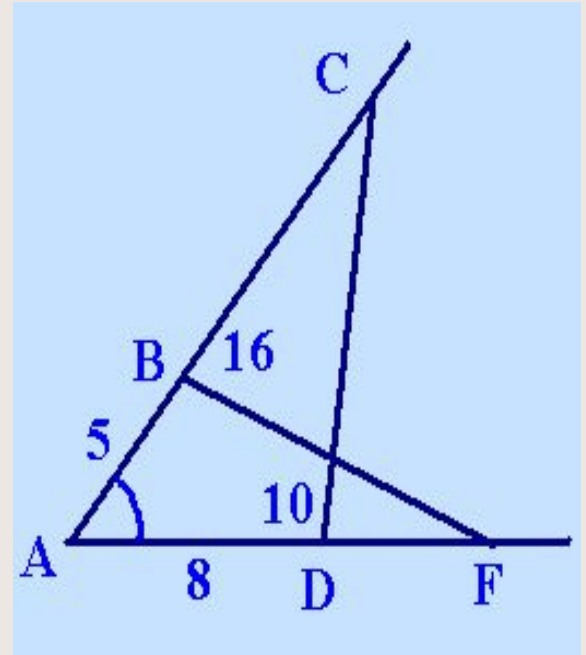
Решение: Используем II признак подобия треугольников. Угол  $A$  общий, значит нужно проверить пропорциональны ли сходственные стороны треугольников, заключающие этот угол  $A$ . По определению подобных треугольников должно выполняться следующее равенство:

Подставив данные мы получим верное равенство:  $\frac{5}{8} = \frac{10}{16}$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AF}{AC}$$

Значит по второму признаку подобия треугольников  $\triangle ACD \sim \triangle AFB$ .

Ответ: да.





# Это интересно...

## История учения о подобии фигур.

Искусство изображать предметы на плоскости с древних времен привлекало к себе внимание человека. Попытки таких изображений появились значительно раньше, чем возникла письменность. Еще в глубокой древности люди рисовали на скалах, сосудах и прочих предметах быта различные орнаменты, растения, животных. При этом человек стремился к тому, чтобы изображение правильно отражало естественную форму предмета.

Идея отношения и пропорции зародилась в глубокой древности. Одинаковые по форме, но различные по величине фигуры встречаются в вавилонских и египетских памятниках. В сохранившейся погребальной камере отца фараона Рамзеса II имеется стена, покрытая сетью квадратиков, с помощью которой на стену перенесены в увеличенном виде рисунки меньших размеров.

Учение о подобии фигур на основе теории отношений и пропорции было создано в Древней Греции в V-IV вв. до н. э. трудами Гиппократы Хиосского, Архита Тарентского, Евдокса Книдского и др. Оно изложено в VI книге «Начала» Евклида.

Символ, обозначающий подобие фигур, есть не что иное, как повернутая латинская буква S-первая буква в слове *similis*, что в переводе означает подобие.

