

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ



I. СВЕДЕНИЕ К АЛГЕБРАИЧЕСКОМУ.



Пример:

$$3 - \cos^2 x - 3 \sin x = 0$$

$$3 - (1 - \sin^2 x) - 3 \sin x = 0$$

$$3 - 1 + \sin^2 x - 3 \sin x = 0$$

Пусть $\sin x = a, |a| \leq 1$.

Уравнение примет вид:

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$a_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \text{ не удовлетворяет условию}$$

$$|a| \leq 1$$

$$a_2 = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$\sin x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$



II. ОДНОРОДНЫЕ И СВОДИМЫЕ К НИМ.



Уравнение вида

$$a \sin x + b \cos x = 0$$

**называется однородным
уравнением I степени.**



Пример:

$$\sin x - \cos x = 0$$

Множество значений x , удовлетворяющих уравнению $\cos x = 0$, не является решением данного уравнения. Поэтому можно обе части уравнения разделить на $\cos x \neq 0$.

Получим:

$$\operatorname{tg} x - 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$



Уравнение вида

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

**называется однородным
уравнением II степени.**



Пример:

$$2\sin^2 x + 3\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$$

Решение:

Множество значений x , удовлетворяющих уравнению
, не является решением данного уравнения.

Разделим обе части уравнения на

Получим:

$$2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x + 1 = 0$$

$$\cos^2 x \neq 0$$



Пусть $a = \operatorname{tg}x$

Уравнение примет вид:

$$2a^2 + 3a + 1 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$a_1 = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{-3-1}{4} = -1$$

$$\operatorname{tg}x = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}x = -1$$

$$x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.



**III. ЕСЛИ В УРАВНЕНИИ
СОДЕРЖИТСЯ ПРОИЗВЕДЕНИЕ
ФУНКЦИЙ $\sin(Ax)\sin(Bx)$,
 $\sin(Ax)\cos(Bx)$, $\cos(Ax)\cos(Bx)$, ТО
ТАКИЕ УРАВНЕНИЯ РЕШАЮТСЯ
ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ПРОИЗВЕДЕНИЯ
В СУММУ (РАЗНОСТЬ) И НАОБОРОТ.**



При этом применяют тождества:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$



Пример 1.

$$\cos 3x \cos x = \cos 5x \cos 7x$$

$$\frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 12x)$$

$$\cos 4x - \cos 12x = 0$$

$$2 \sin 8x \sin 4x = 0$$

$$\sin 8x = 0$$

или

$$\sin 4x = 0$$

$$8x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$4x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi n}{8}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{8}, n \in \mathbb{Z}$.



Пример 2.

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 0$$

$$2 \sin 2x \cos x + 2 \sin 6x \cos x = 0$$

$$2 \cos x (\sin 2x + \sin 6x) = 0$$

$$2 \cdot 2 \cos x \sin 4x \cos^2 x = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 4x = 0$$

$$4x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}.$



IV. Понижение степени.



Если в уравнении содержатся чётные степени $\sin x$ и $\cos x$, то понижают степень уравнения с применением понижающих формул:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos^2 x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$



Пример.

$$\sin^2 x + \sin^2 5x = \cos^2 2x + \cos^2 4x$$

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 10x}{2} = \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 8x}{2}$$

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 8x + \cos 10x = 0$$

$$2 \cos 3x \cos x + 2 \cos 9x \cos x = 0$$

$$2 \cos(\cos 3x + \cos 9x) = 0$$

$$4 \cos x \cdot \cos 6x \cdot \cos 3x = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$\cos 6x = 0$$

$$\cos 3x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$6x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}.$



V. РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ.



ПРИМЕР.

$$4 \cos x \cdot \sin x + 2 \cos x + 2 \sin x + 1 = 0$$

$$2 \cos x(2 \sin x + 1) + (2 \sin x + 1) = 0$$

$$(2 \sin x + 1)(2 \cos x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$



VI. ВВЕДЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА.



Пример

$$\sin x + \cos x = 1$$

Решение:

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} \sin x + \cos \frac{\pi}{4} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$



VII. ПРИМЕНЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ПОДСТАНОВКИ.



УНИВЕРСАЛЬНАЯ ПОДСТАНОВКА:

$$\sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}$$



Пример

$$2\cos 2x + 2\operatorname{tg}^2 x = 5$$

Решение:

$$2 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 2\operatorname{tg}^2 x = 5$$

Пусть: $\operatorname{tg}^2 x = a, a \geq 0$ Уравнение примет вид

$$2 \cdot \frac{1 - a}{1 + a} + 2a - 5 = 0, \text{ Д.З.} \quad a \neq -1$$

$$2(a - 1) + 2a(1 + a) - 5(1 + a) = 0$$

$$2 - 2a + 2a + 2a^2 - 5 - 5a = 0$$

$$2a^2 - 5a - 3 = 0$$

$$D = 25 + 24 = 49$$

$$a_1 = \frac{5 + 7}{4} = 3 \quad \text{не удовлетворяет условию} \quad a_2 = \frac{5 - 7}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$a \geq 0$$

$$\operatorname{tg}^2 x = 3$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Пример 2:

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3} = 0$$

Решение:

$$\frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \sqrt{3} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \sqrt{3} = 0$$

Проверка:

$$x = \pi + 2\pi k$$

$$2\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3}\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3}\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 0$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0 -$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\sqrt{3}$$

$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$



VIII. ВВЕДЕНИЕ НОВОГО ПЕРЕМЕННОГО.



! Если в уравнении содержится сумма или разность $\sin x$ и $\cos x$ и их произведения, то уравнение решается введением нового переменного:

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = t \\ \sin x \cdot \cos x = \frac{t^2 - 1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x - \cos x = t \\ \sin x \cdot \cos x = \frac{1 - t^2}{2} \end{cases}$$



Пример:

$$\sin 2x + \cos x + \sin x - 1 = 0$$

$$2 \sin x \cos x + \cos x + \sin x - 1 = 0$$

Пусть:

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = t \\ \sin x \cdot \cos x = \frac{t^2 - 1}{2} \end{cases}$$

$$t^2 - 1 + t - 1 = 0$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$t_1 = 1 \quad t_2 = -2$$

$$\sin x + \cos x = 1 \quad \sin x \cos x = \frac{1 - 1}{2} = 0 \quad \sin x + \cos x = -2 \quad \sin x \cos x = \frac{4 - 1}{2} = \frac{3}{2}$$

(Решите самостоятельно)

∅



**IX. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ
ПОНЯТИЯ
ОГРАНИЧЕННОСТИ
(МИНИМАКС).**



Пример:

$$\cos 3x + \cos \frac{5x}{2} = 2$$

$$\begin{cases} \cos 3x = 1 & \begin{cases} 3x = 2\pi k \\ \frac{5}{2}x = 2\pi n \end{cases} \\ \cos \frac{5}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi k}{3} \\ x = \frac{4\pi n}{5} \end{cases} \xrightarrow{k=\text{целое}} \frac{2\pi k}{3} \rightarrow \frac{4\pi n}{5}$$

$$\frac{k}{3} = \frac{2n}{5} \quad k = \frac{6n}{5} \quad n = 5t$$

$$x = \frac{4\pi}{5} \cdot 5t = 4\pi t, t \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = 4\pi t, t \in \mathbb{Z}$

