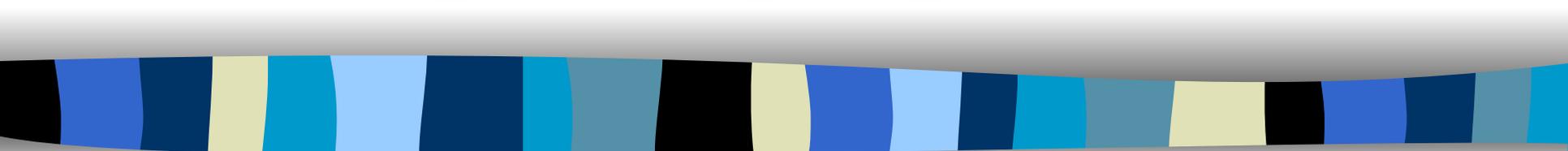
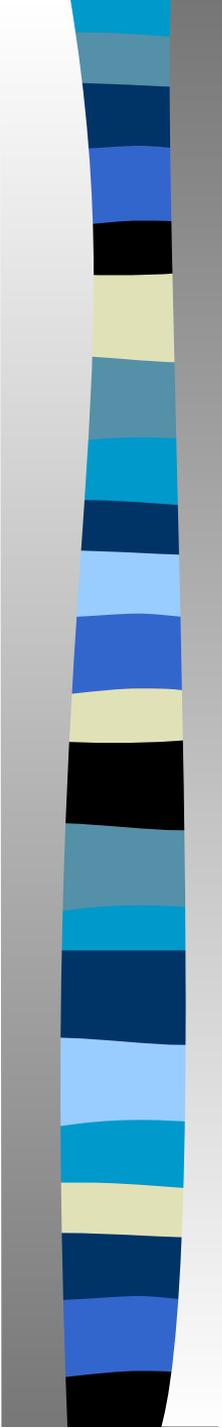


Теория графов



Основные понятия



История

- Термин «граф» впервые появился в книге выдающегося венгерского математика Д. Кёнига в 1936 г, хотя начальные задачи теории графов восходят еще к Эйлеру (XVIII в.).
- Л. Эйлер в 1736 году опубликовал решение задачи о Кенигсбергских мостах.

История

Город Кенигсберг был построен в месте слияния двух рек на их берегах и на двух островах. В нем было семь мостов, которые соединяли острова между собой и с береговыми частями города. Мог ли любой житель города выйти из дома, пройти по всем семи мостам в точности по одному разу и вернуться домой?

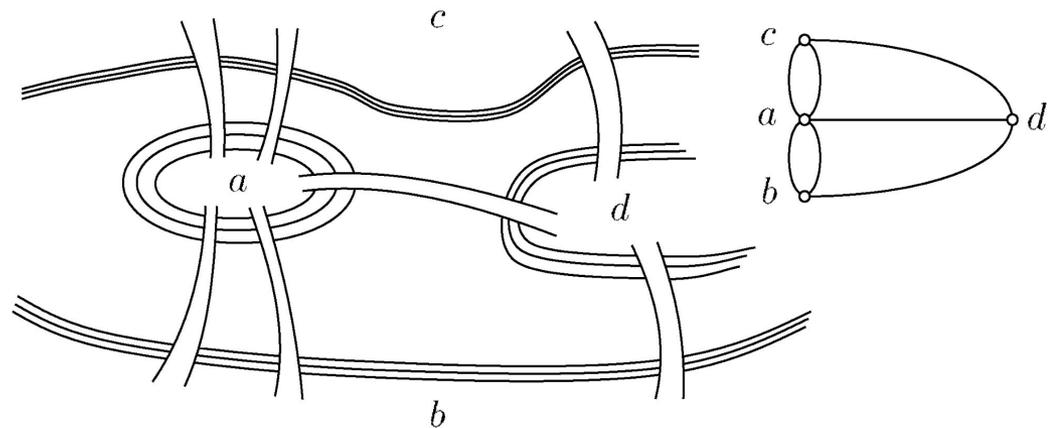


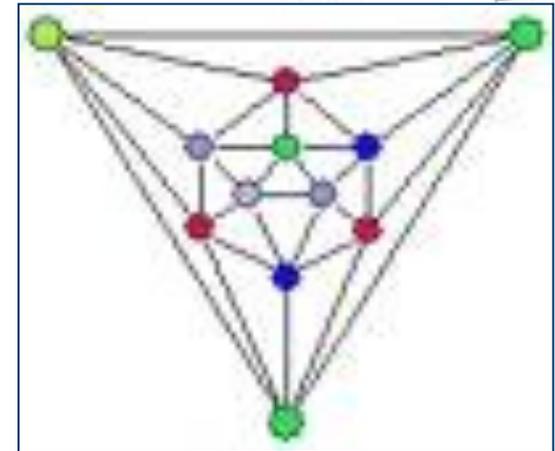
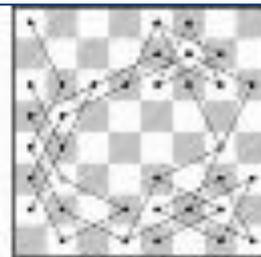
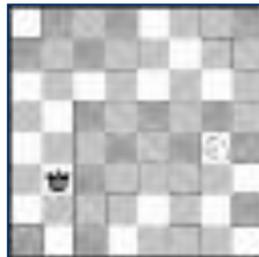
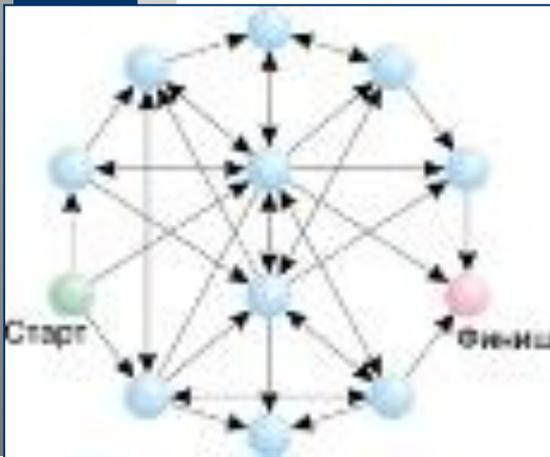
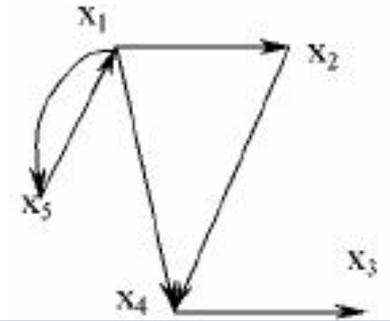
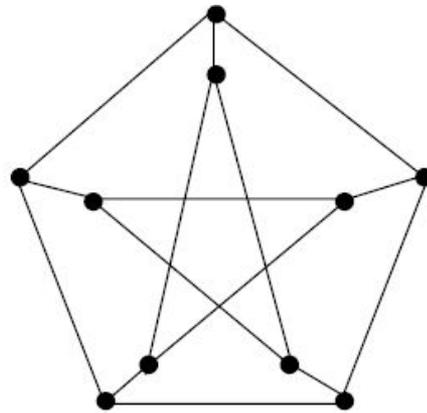
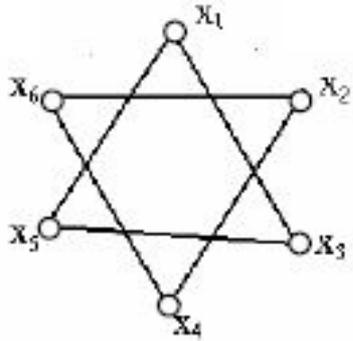
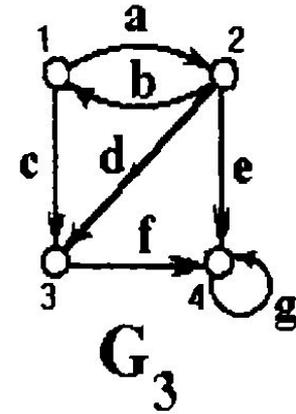
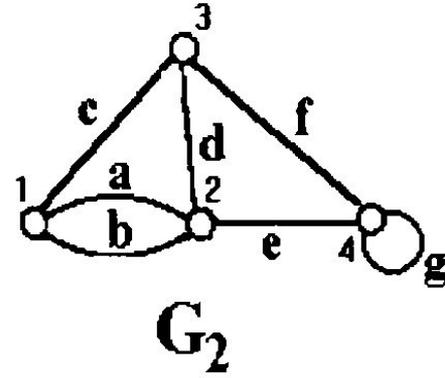
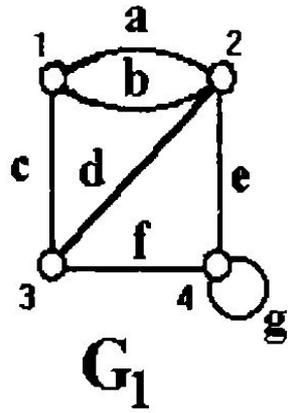
Рис. 1.1. План города Кенигсберга и граф к задаче о Кенигсбергских мостах

Определение графа

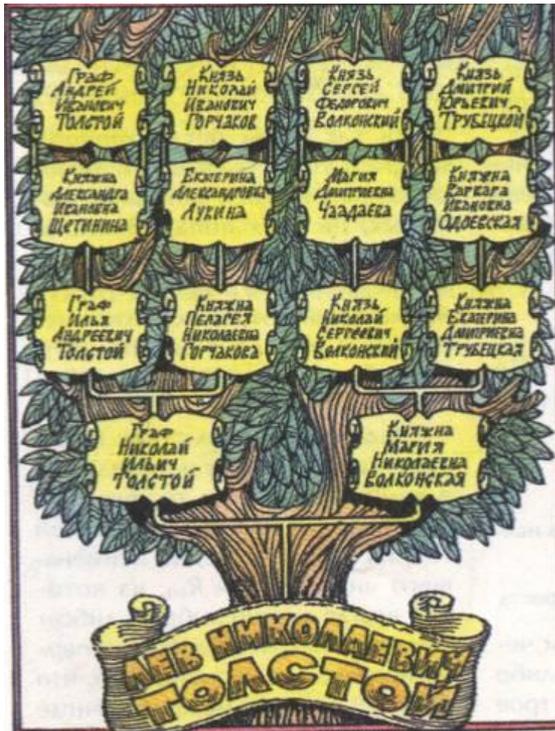
Графом G называется совокупность двух множеств: *вершин* V и *ребер* E , между элементами которых определено *отношение инцидентности* – каждое ребро $e \in E$ инцидентно ровно двум вершинам $v', v'' \in V$, которые оно соединяет. При этом вершина v' (v'') и ребро e называются *инцидентными* друг другу, а вершины v' и v'' , являющиеся для ребра e концевыми точками, называются *смежными*.

$$G(V, E) = \langle V; E \rangle, V \neq \emptyset,$$

Примеры графов

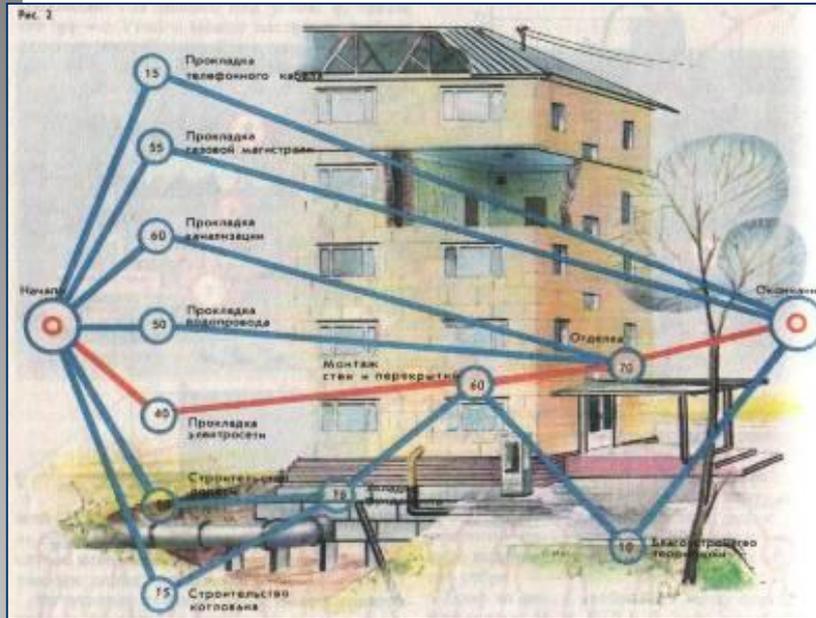


Примеры графов из прикладных областей.



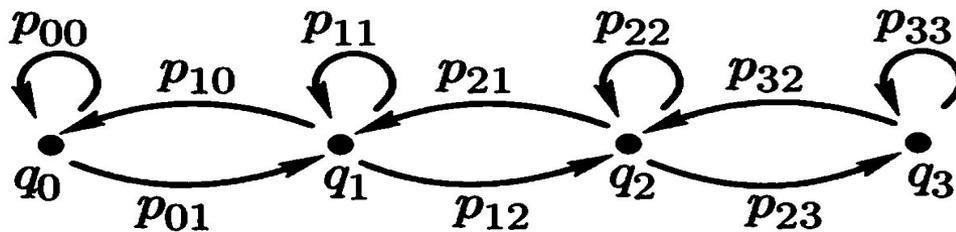
Это, например, сеть дорог, трубопроводная, железнодорожная, информационная и т.д. Вершины графа — города, аэропорты, железнодорожные станции, телефонные станции и т. д. Дуги графа — односторонние дороги, трубы, кабели, стекловолокно и т. д. на дугах задают нагрузки (скалярные или векторные),

Сетевой график.

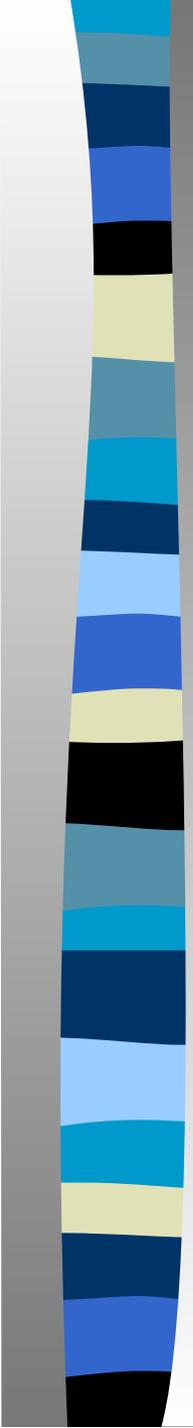


Граф, описывающий некоторый технологический процесс (проект создания какой-либо системы), называется сетевым. Вершины графа — главные события процесса.

Граф смены состояний системы массового обслуживания



g_i — возможные состояния СМО;
 p_i — возможные переходы системы из одного состояния в другое



Орграф и н-граф

Существуют два основных вида графов: ориентированные и неориентированные.

Если ребрам графа приданы направления от одной вершины к другой, то такой граф называется **ориентированным (орграф)**.

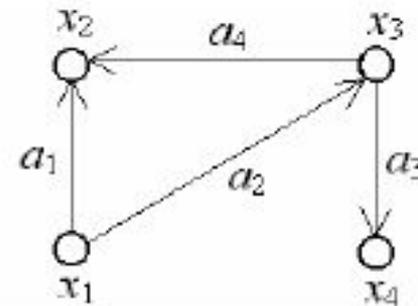
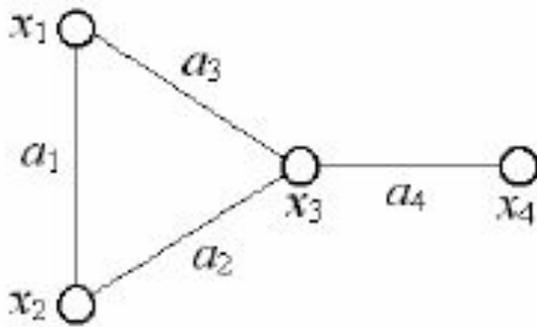
Ребра ориентированного графа называются **дугами**. Соответствующие вершины ориентированного графа называют **началом** и **концом**.

Если направления ребер не указываются, то граф называется **неориентированным** или просто графом (**н-граф**).

Примеры

Пример 1. Неориентированный граф $G = (X, E)$.

- $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,
- $E = \{a_1(x_1, x_2), a_2(x_2, x_3), a_3(x_1, x_3), a_4(x_3, x_4)\}$.



Пример 2. Ориентированный граф $G = (X, A)$.

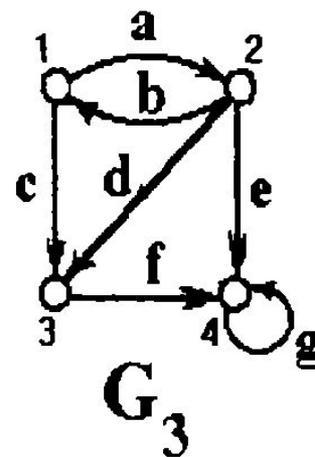
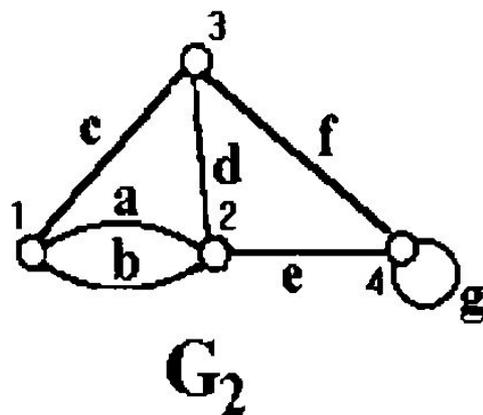
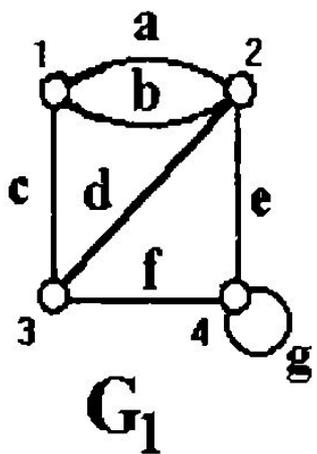
$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,

$A = \{a_1(x_1, x_2), a_2(x_1, x_3), a_3(x_3, x_4), a_4(x_3, x_2)\}$.

Мульти- и псевдографы

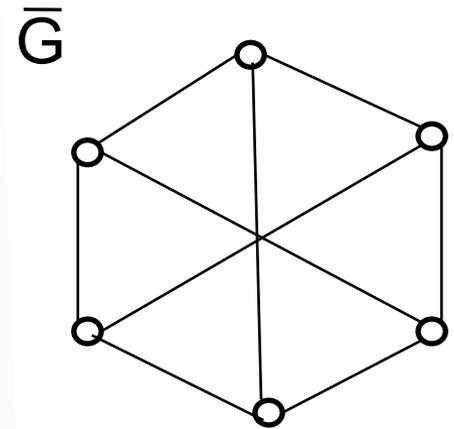
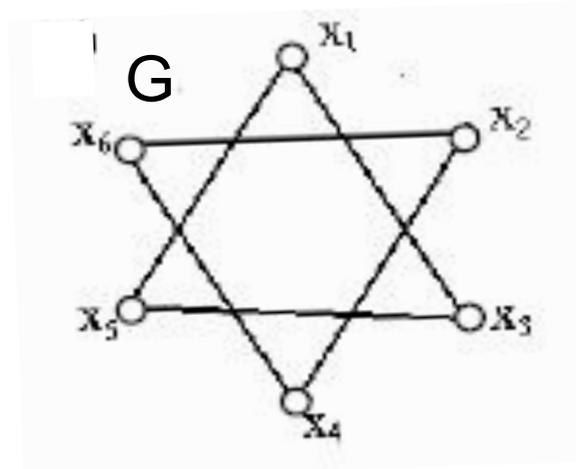
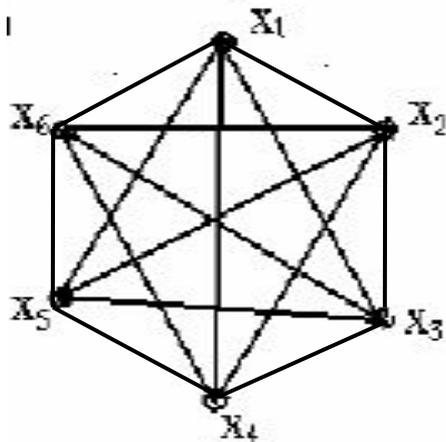
Ребра, инцидентные одной и той же паре вершин, называются *параллельными*, или *кратными*. Граф, содержащий кратные ребра, именуется *мультиграфом*. Ребро, концевые вершины которого совпадают, называется *петлей*.

Граф с кратными ребрами и петлями называется **псевдографом**.

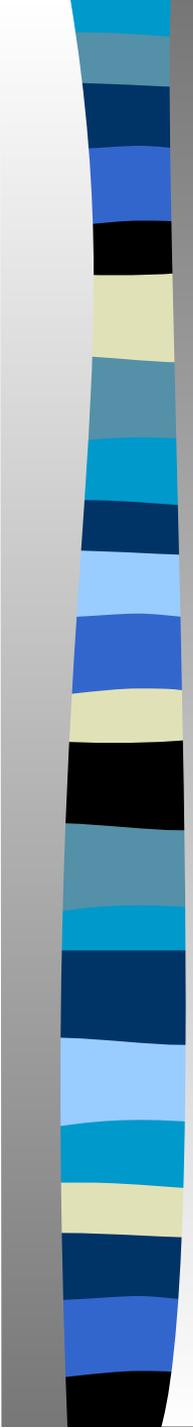


Полный граф

Граф без петель и кратных ребер называется **полным**, если каждая пара вершин соединена ребром.



Дополнением данного графа называется граф, состоящий из всех ребер и их концов, которые необходимо добавить к исходному графу, чтобы получить полный граф.



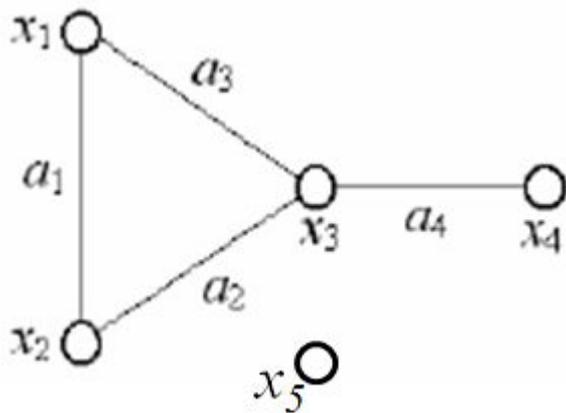
Смежные вершины и ребра

Две вершины называются **смежными**, если они инцидентны одному и тому же ребру.

Два ребра называются **смежными**, если они имеют общую вершину

Каждому неориентированному графу *канонически соответствует* ориентированный граф с тем же множеством вершин, в котором каждое ребро заменено двумя ориентированными ребрами, инцидентными тем же вершинам и имеющими противоположные направления.

Степень вершины в n-графе



Степенью вершины n-графа называется число ребер, инцидентных этой вершине.

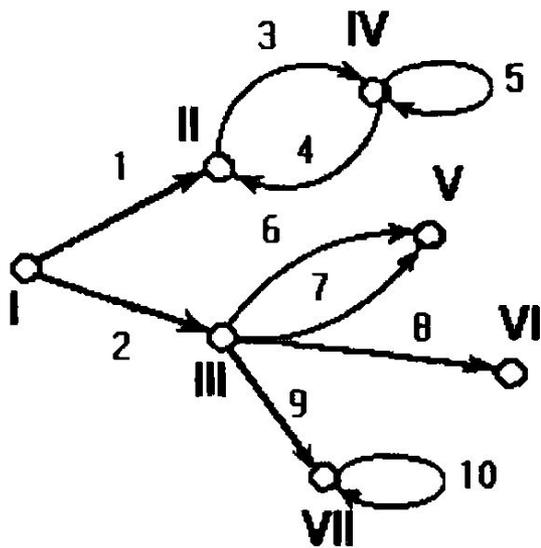
Вершина, имеющая степень 0, называется **изолированной**, а степень 1 – **висячей**.

Граф, состоящий из изолированных вершин называется **нуль-графом**.

В n-графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер m графа (в графе с петлями петля дает вклад 2 в степень вершины):

$$\sum \deg v_i = 2m$$

Степень вершины в орграфе



Полустепенью захода (входа) вершины $v_i - d_+(v_i)$ называется число ребер, для которых вершина v_i является концом.

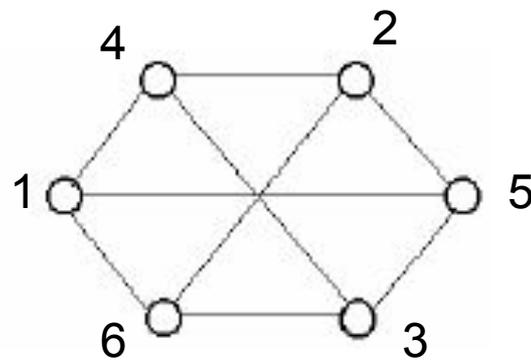
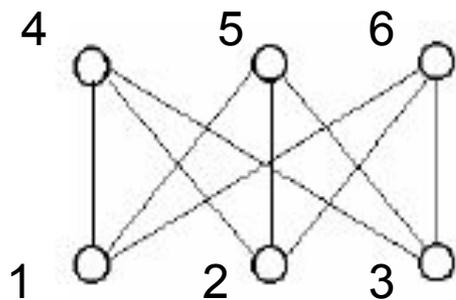
Полустепенью исхода (выхода) $v_i - d_-(v_i)$ — число ребер, для которых вершина v_i является началом.

Для орграфа выполняются равенства:

- $\deg v_i = d_+(v_i) + d_-(v_i)$
- $\sum d_+(v_i) = \sum d_-(v_i) = m$, где m — количество ребер в графе.

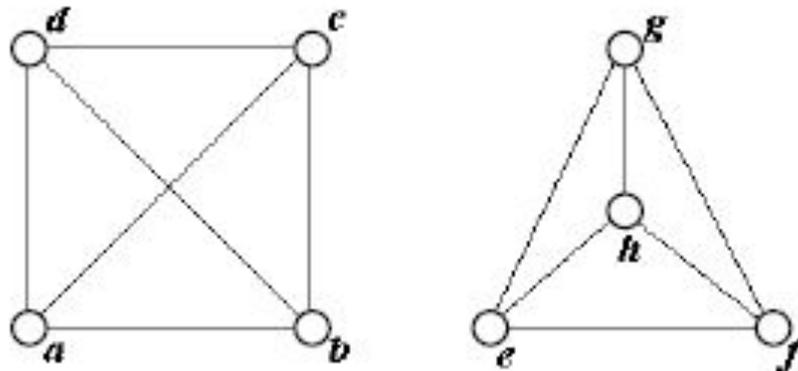
Равные и изоморфные графы

Графы G_1 и G_2 равны, т.е. $G_1 = G_2$, если их множества вершин и ребер (выраженных через пары инцидентных им вершин) совпадают: $V_1 = V_2$ и $E_1 = E_2$.

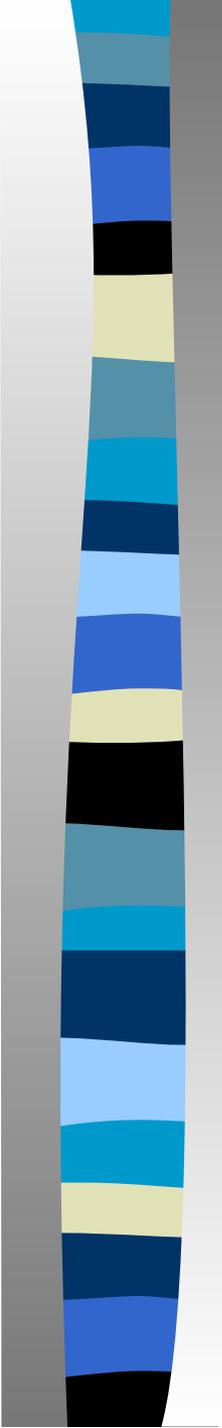


Равные и изоморфные графы

Графы $G_1 = (X_1, A_1)$ и $G_2 = (X_2, A_2)$ **изоморфны**, если существует взаимно однозначное соответствие между множествами вершин X_1 и X_2 , такое, что любые две вершины одного графа соединены тогда и только тогда, когда соответствующие вершины соединены в другом графе.

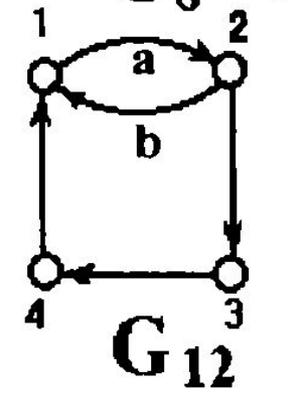
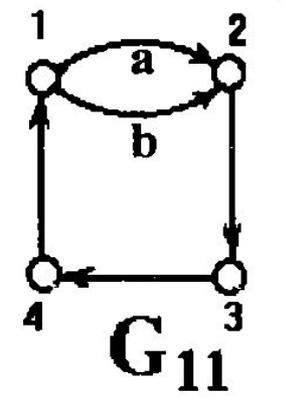
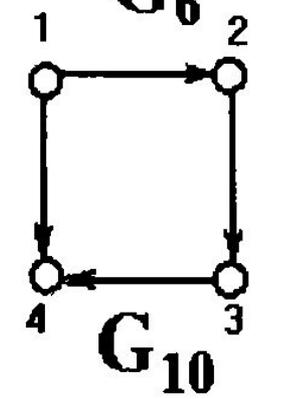
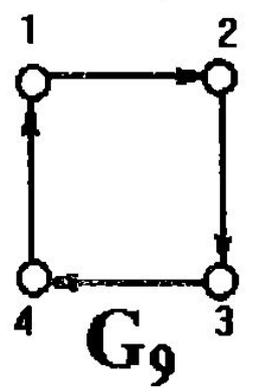
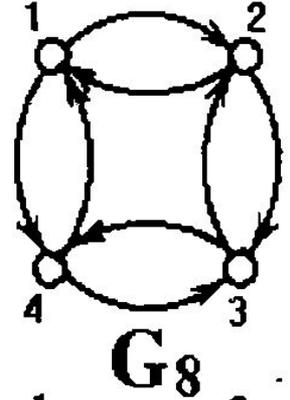
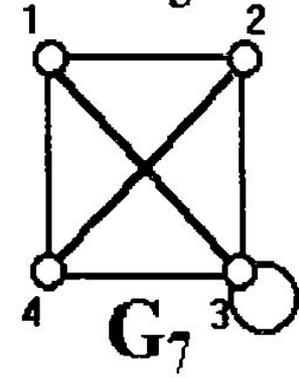
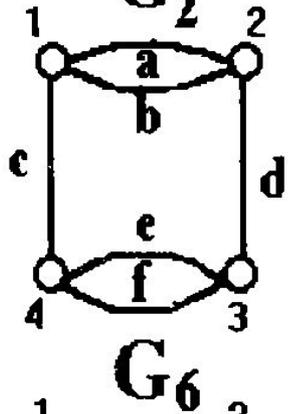
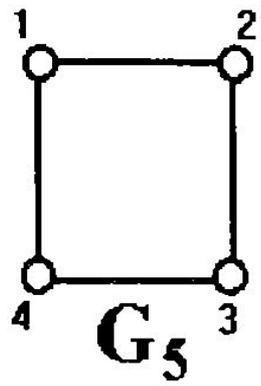
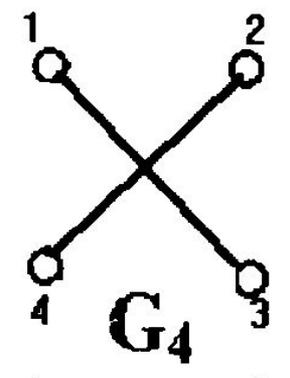
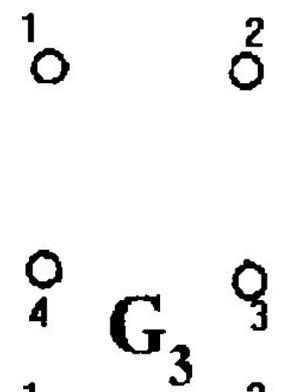
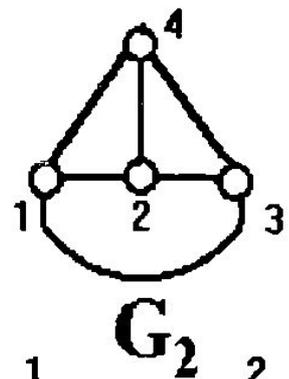
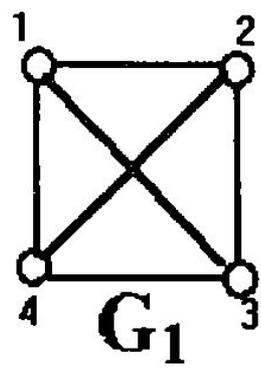


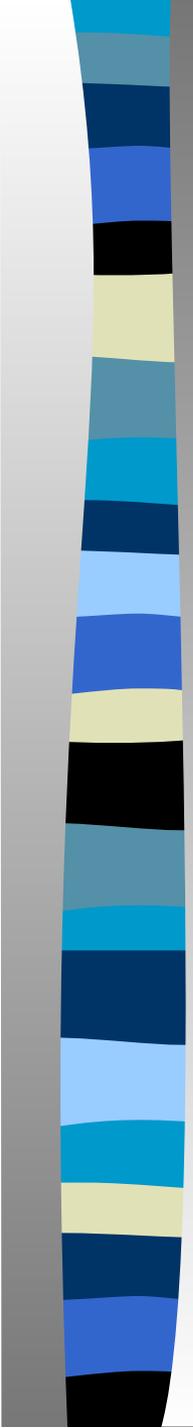
$$a \rightarrow e, b \rightarrow f, c \rightarrow g, d \rightarrow h,$$



Планарные графы

Граф $G = (X, A)$ – **планарный**, если он может быть изображен на плоскости так, что не будет пересекающихся дуг.





Способы задания графов

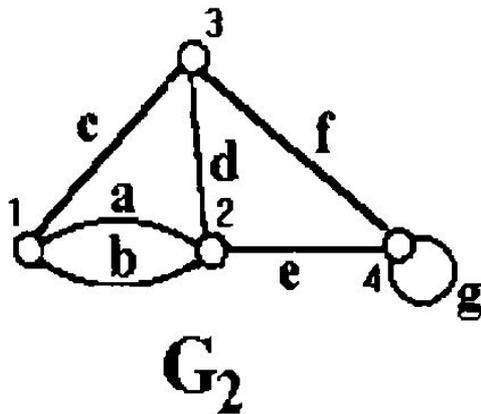
Возможны следующие различные способы задания графа:

1. посредством графического изображения;
2. указанием множества вершин и множества ребер (дуг);
3. матрицей смежности;
4. матрицей инцидентности.

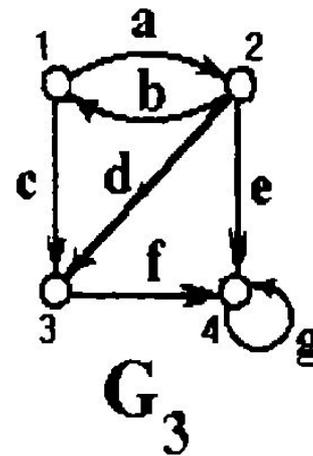
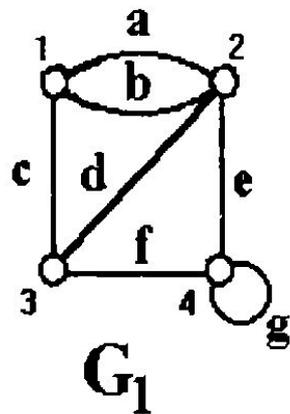
Матрица смежности

Матрица смежности $A = (a_{ij})$ определяется одинаково для ориентированного и неориентированного графов. Это квадратная матрица порядка n , где n – число вершин, у которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (x_i, x_j) \in E \\ 0, & (x_i, x_j) \notin E \end{cases}$$



Постройте матрицы смежности для графов:



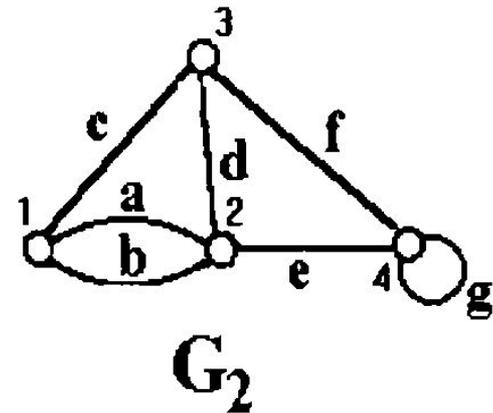
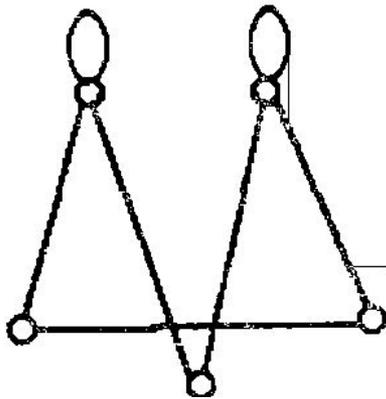
G_1	1	2	3	4
1	0	2	1	0
2	2	0	1	1
3	1	1	0	1
4	0	1	1	1

G_3	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	1	1
3	0	0	0	1
4	0	0	0	1

Матрица инцидентности

Матрицей инцидентности $V=(b_{ij})$ неориентированного графа называется прямоугольная матрица $(n \times m)$, где n – число вершин, m – число ребер, у которой

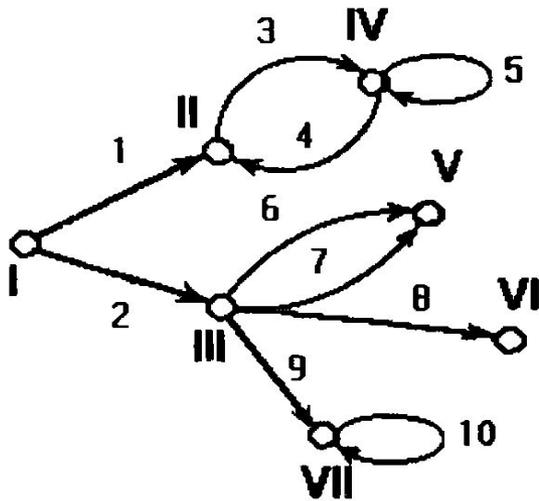
$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } x_i \text{ инцидентно вершине } a_j, \\ 0 & \text{– в противном случае,} \end{cases}$$



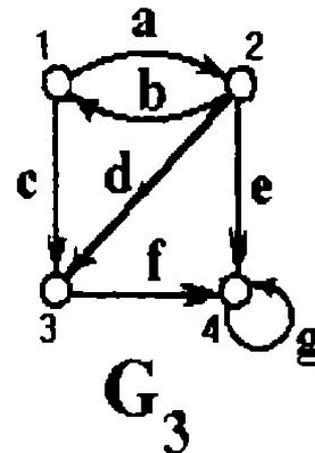
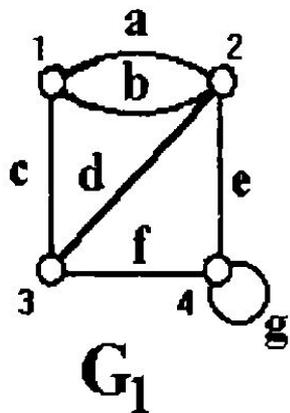
Матрица инцидентности

Матрицей инцидентности $V=(b_{ij})$ ориентированного графа называется прямоугольная матрица ($n \times m$), где n – число вершин, m – число ребер, у которой

$$b_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если } x_i \text{ является началом дуги } a_j; \\ 1, & \text{если } x_i \text{ является концом дуги } a_j; \\ 0, & \text{если } x_i \text{ не инцидентна дуге } a_j; \\ \alpha & (\text{любое число, отличное от } 0, -1, 1), \text{ если } a_j \text{ – петля,} \\ & x_i \text{ – инцидентная ей вершина} \end{cases}$$

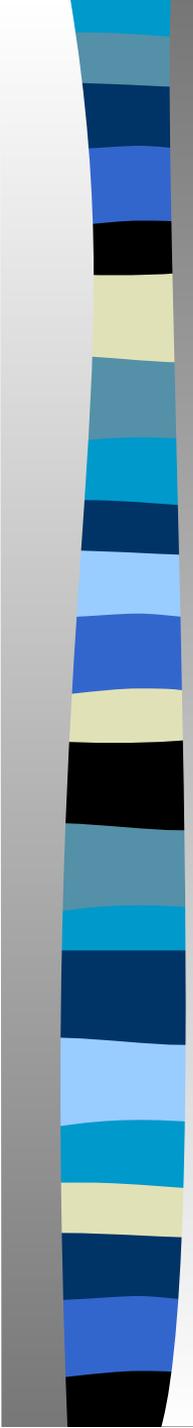


Постройте матрицы инцидентности для графов:



G_1	a	b	c	d	e	f	g
1	1	1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	1	1	0	0
3	0	0	1	1	0	1	0
4	0	0	0	0	1	1	1

	a	b	c	d	e	f	g
1	-1	1	-1	0	0	0	0
2	1	-1	0	-1	-1	0	0
3	0	0	1	1	0	-1	0
4	0	0	0	0	1	1	2



R_2	a	b	c	d	e
a	0	1	1	1	0
b	1	0	0	0	1
c	1	0	0	1	0
d	1	0	1	0	1
e	0	1	0	1	0

G_1	a	b	c	d	e	f	g
1	1	0	0	0	0	1	0
2	1	1	1	0	0	0	0
3	0	0	1	1	1	0	0
4	0	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	0	1	0	1

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

	(1,2)	(1,3)	(2,4)	(2,5)	(3,4)	(4,6)	(5,6)
1	-1	-1	0	0	0	0	0
2	1	0	-1	-1	0	0	0
3	0	1	0	0	-1	0	0
4	0	0	1	0	1	-1	0
5	0	0	0	1	0	0	-1
6	0	0	0	0	0	1	1

Теория графов

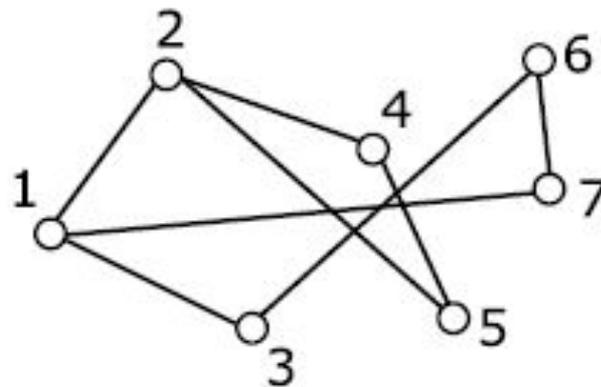
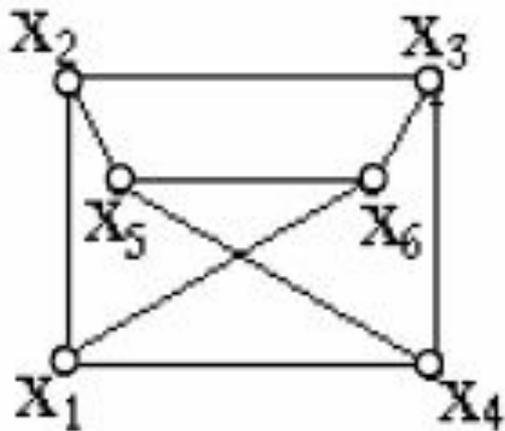
Маршруты, пути, цепи, циклы.

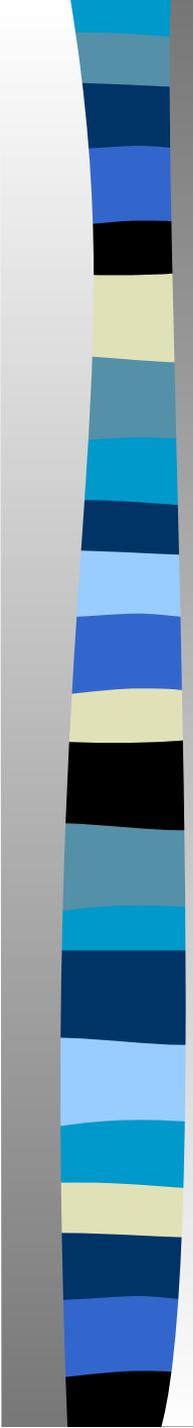
H-граф.

Пусть G – неориентированный граф.

Маршрутом в G называется такая последовательность ребер (a_1, a_2, \dots, a_n) , что каждые соседние два ребра a_i и a_{i+1} имеют общую инцидентную вершину.

Одно и то же ребро может встречаться в маршруте несколько раз.



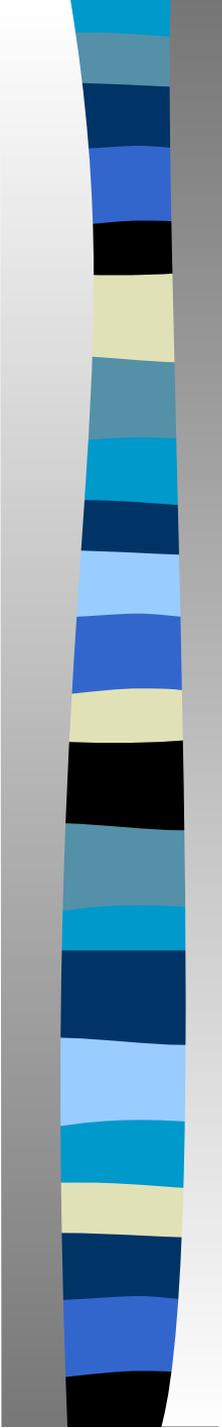


N-граф. Маршруты, цепи, циклы.

Вершина X_1 , инцидентная ребру a_1 , но не инцидентная ребру a_2 , называется **началом маршрута**, а вершина X_n , инцидентная ребру a_n , но не инцидентная ребру a_{n-1} , называется **концом маршрута**.

Маршрут, в котором начало и конец совпадают, называется **циклическим**.

Длиной маршрута называется число ребер, входящих в маршрут, причем каждое ребро считается столько раз, сколько оно входит в данный маршрут.



N-граф. Маршруты, цепи, циклы.

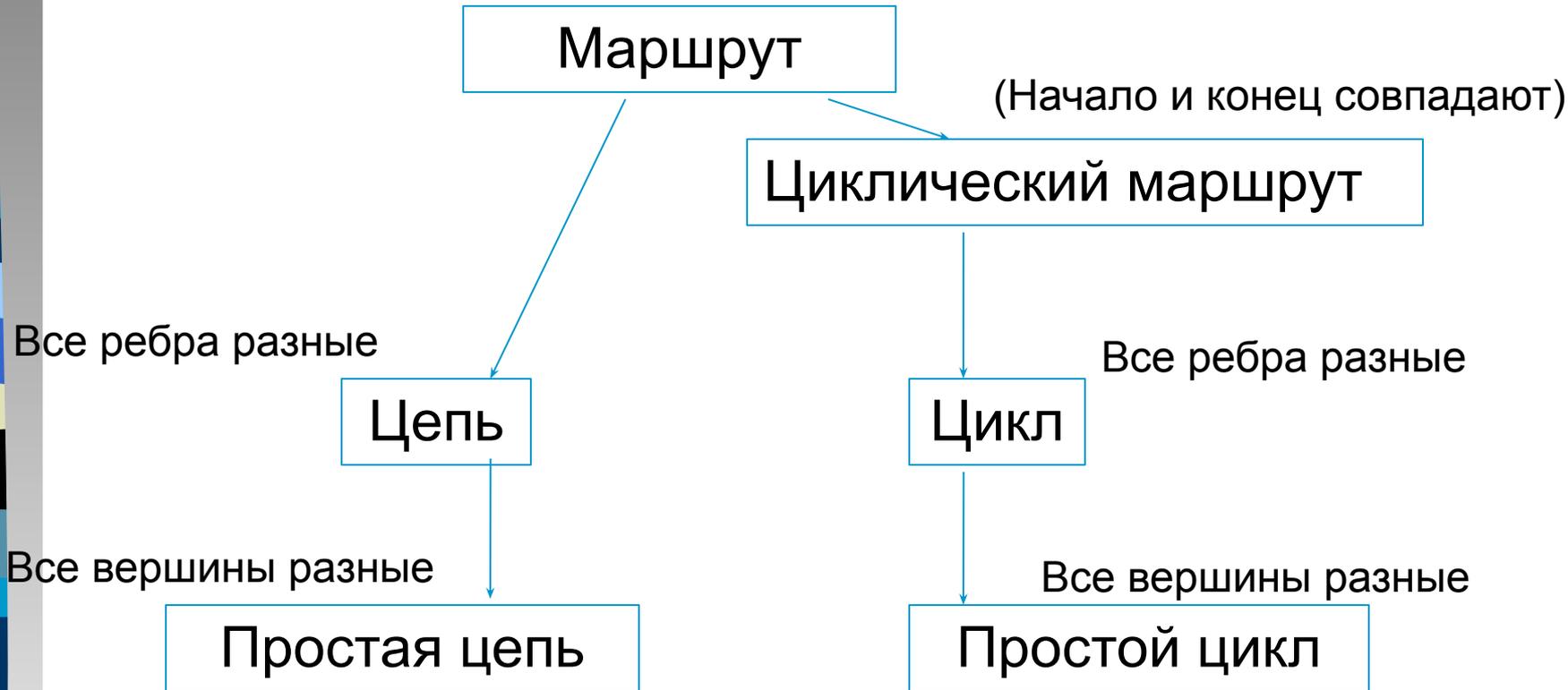
Маршрут, в котором все ребра разные, называется **цепью**.

Цепь, не пересекающая себя, т.е. не содержащая повторяющихся вершин, называется **простой цепью**.

Циклический маршрут называется **циклом**, если он не содержит повторяющихся ребер.

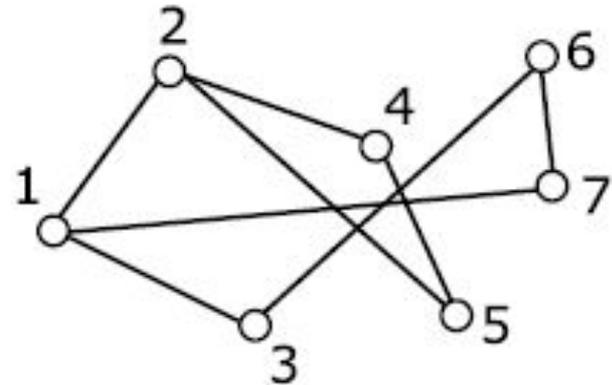
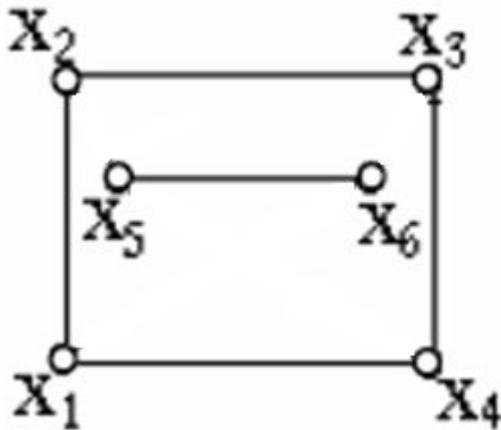
Цикл, не содержащий повторяющихся вершин, называется **простым циклом**.

N-граф. Маршруты, цепи, циклы.



N-граф. Связность.

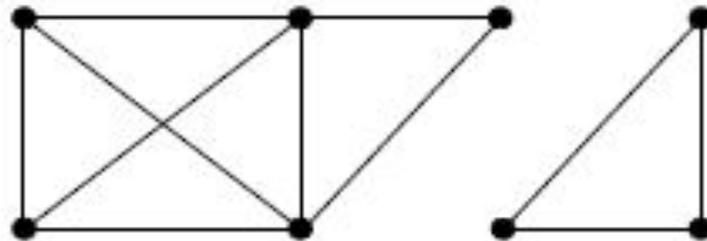
Неориентированный граф называется **связным**, если между любыми его вершинами есть маршрут.



Две вершины называются **связанными**, если между ними существует маршрут.

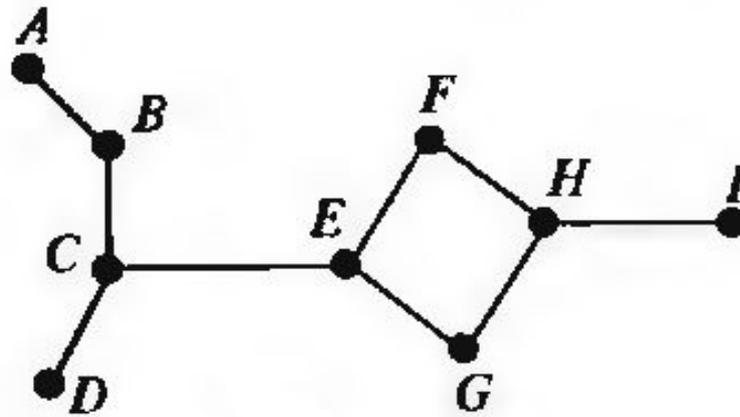
N-граф. СВЯЗНОСТЬ.

Граф G можно разбить на непересекающиеся подмножества V_i по признаку связности. Вершины одного множества являются связными между собой, а вершины различных множеств — несвязны. Тогда все подграфы V_i (классы эквивалентности) графа G называют **связными компонентами**, или **компонентами связности**. **Связный граф имеет одну компоненту связности.**



Н-граф. Связность.

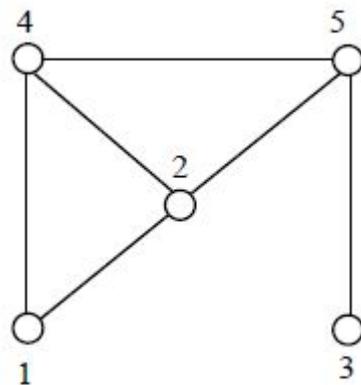
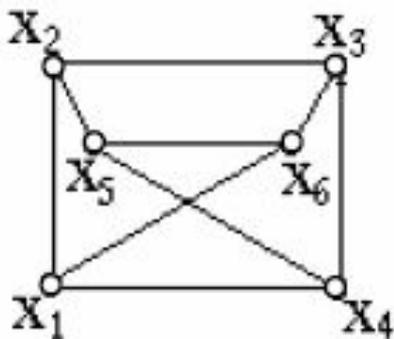
Ребро связного графа G называется **мостом**, если после его удаления граф G станет несвязным и распадется на два связных графа.



N-граф. Метрические характеристики.

Расстоянием между двумя вершинами $d(v_1, v_2)$ называется минимальная длина из всех возможных маршрутов между этими вершинами при условии, что существует хотя бы один такой маршрут.

Матрица $D=(d_{ij})$, в которой $d_{ij}=d(v_i, v_j)$, называется матрицей расстояний.

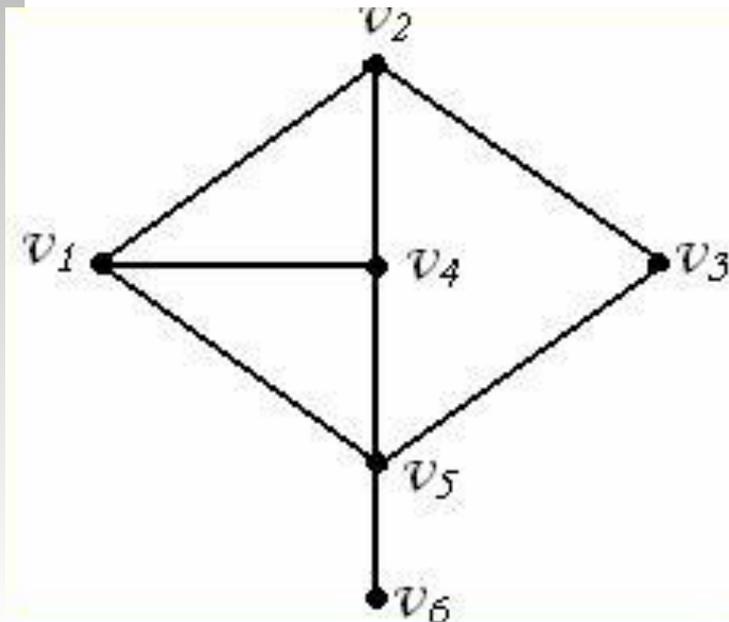


$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

N-граф. Метрические характеристики.

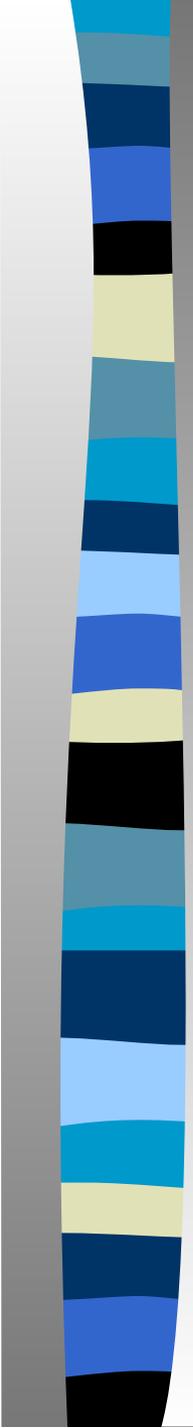
Для фиксированной вершины u максимальное из расстояний от этой вершины до любой другой вершины графа называется **эксцентриситетом** вершины u .

$$e(u) = \max_{v \in V} d(u, v)$$



G

0	1	2	1	1	2
1	0	1	1	2	3
2	1	0	2	1	2
1	1	2	0	1	2
1	2	1	1	0	1
2	3	2	2	1	0



N-граф. Метрические характеристики.

Максимальный среди всех эксцентриситетов вершин называется **диаметром** графа G и обозначается через $d(G)$.

$$d(G) = \max_{v \in V} e(v)$$

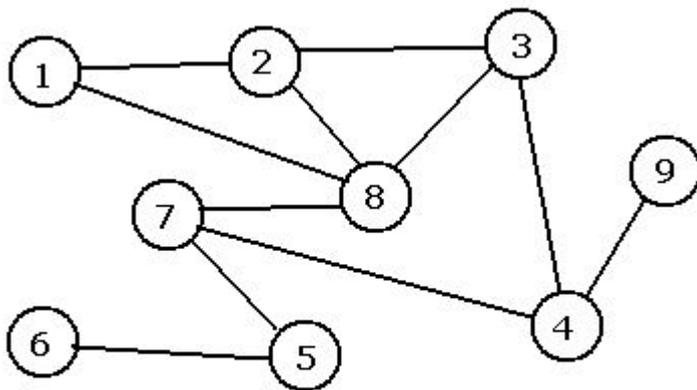
Вершина u называется **периферийной**, если $e(u) = d(G)$.

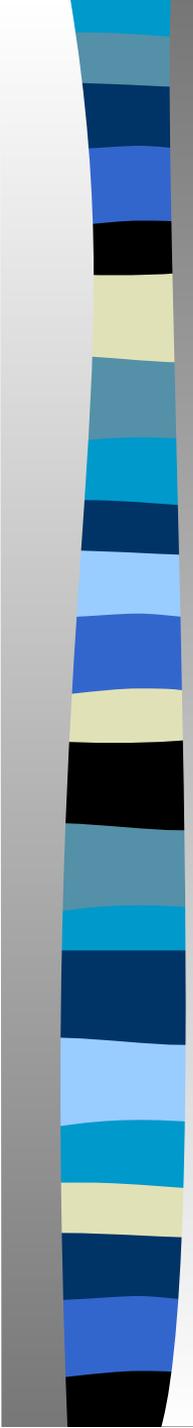
N-граф. Метрические характеристики.

Минимальный из эксцентриситетов вершин связного графа называется его **радиусом** и обозначается через $r(G)$:

$$r(G) = \min_{v \in V} e(v)$$

Вершина v называется **центральной**, если $e(v) = r(G)$.





Н-граф. Метрические характеристики.

Множество всех центральных вершин графа называется его **центром**.

Граф может иметь единственную центральную вершину или несколько центральных вершин.

Центр графа может совпадать с множеством всех вершин.

Эйлеровы графы

Эйлеровым $\frac{\text{путем}}{\text{циклом}}$ графа называется $\frac{\text{путь}}{\text{цикл}}$, который содержит все ребра графа только один раз. Граф, обладающий эйлеровым циклом, называется **эйлеровым**. Плоские эйлеровы графы можно изобразить «одним росчерком пера», причем процесс изображения начинается и заканчивается в одной вершине. Такой граф называют также **уникурсальным**.

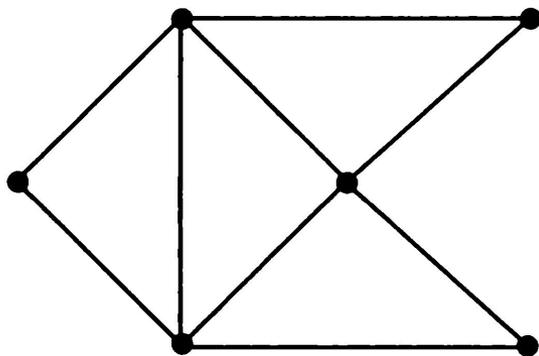
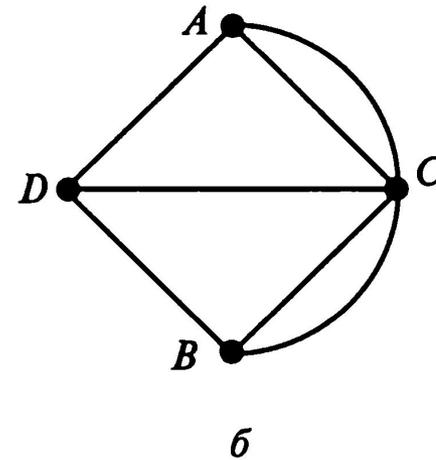
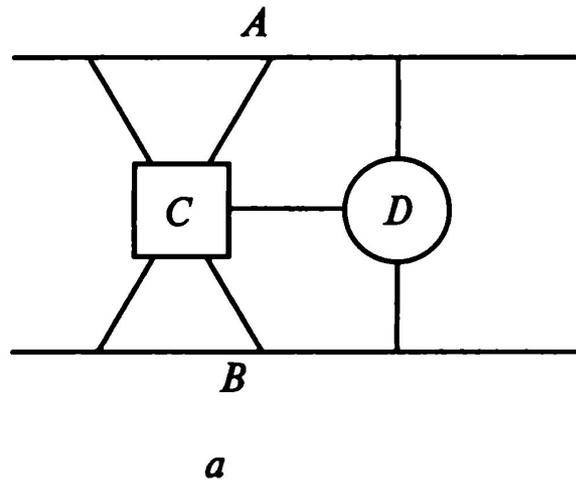


Рис. 2.9. Изображение эйлерова графа

Эйлеровы графы

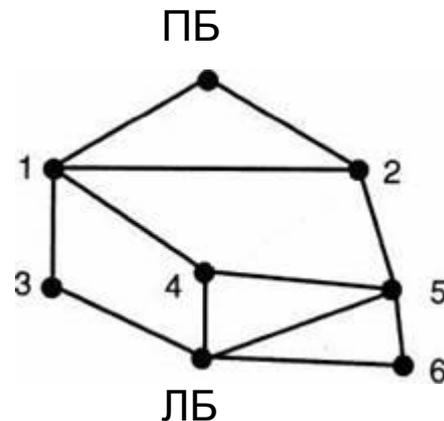
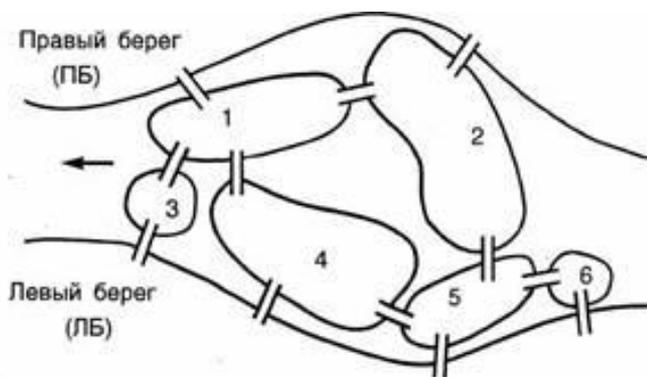
- **Теорема.** Граф G является эйлеровым тогда и только тогда, когда G — связный граф, имеющий все четные вершины.



a — условие; *б* — граф

Задача

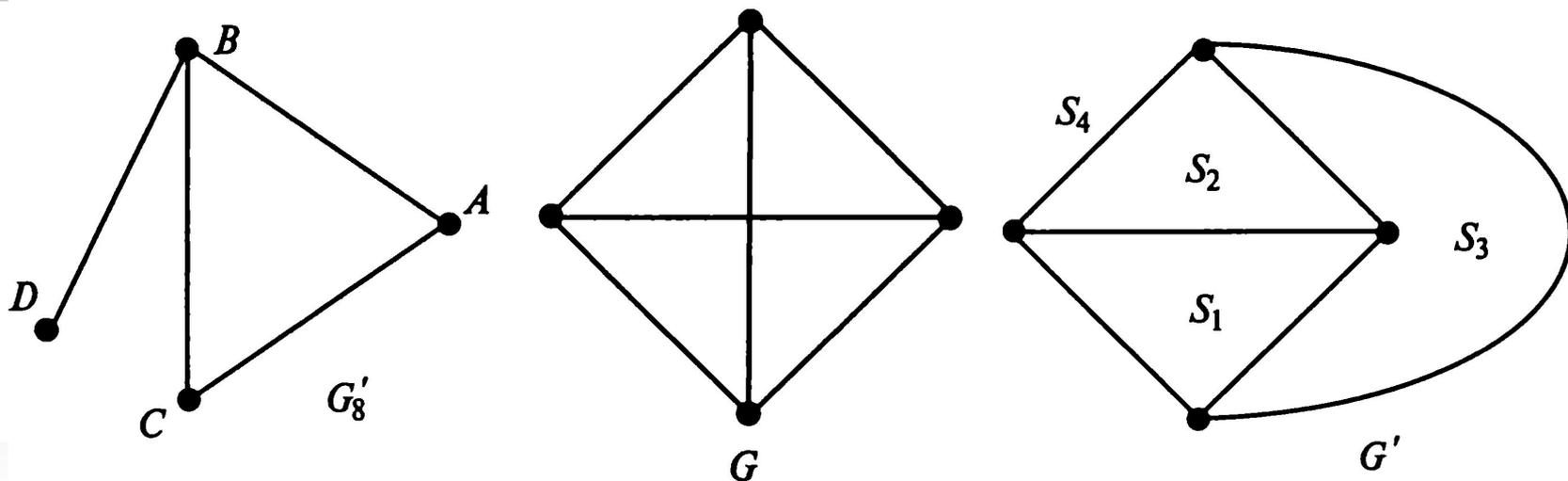
Шесть островов на реке в парке "Лотос" соединены мостами



Можно ли, начав прогулку на одном из островов, пройти по каждому из мостиков ровно один раз и вернуться на тот же остров? В случае отрицательного ответа определите, сколько мостиков и между какими островами нужно построить, чтобы такая прогулка стала возможной.

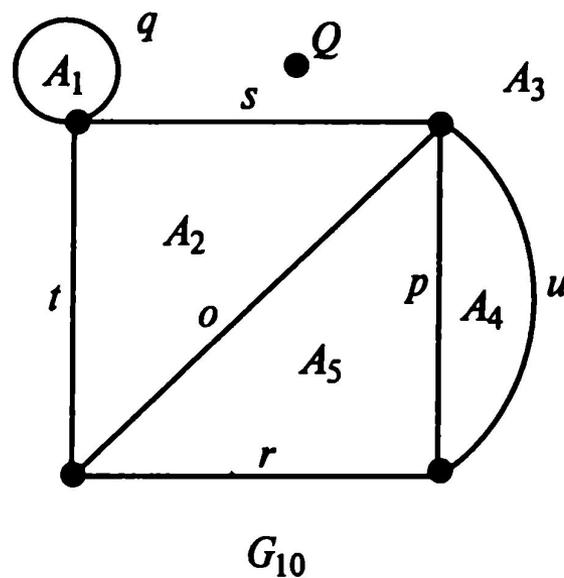
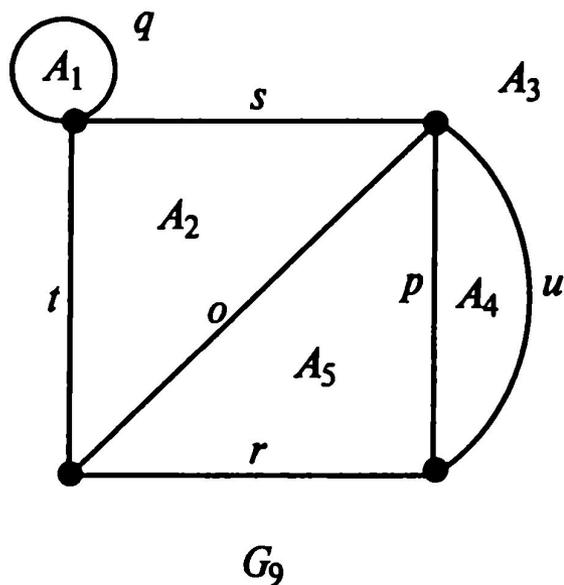
Планарные графы

- Граф G называется планарным (плоским), если существует изоморфный ему граф G' , в изображении которого на плоскости ребра пересекаются только в вершинах. Иными словами, у планарного графа никакие два ребра не имеют общих точек, кроме общих вершин.



Теорема Эйлера

- Областью называется подмножество плоскости, пересекающееся с планарным графом только по некоторому простому циклу графа, являющемуся границей области.

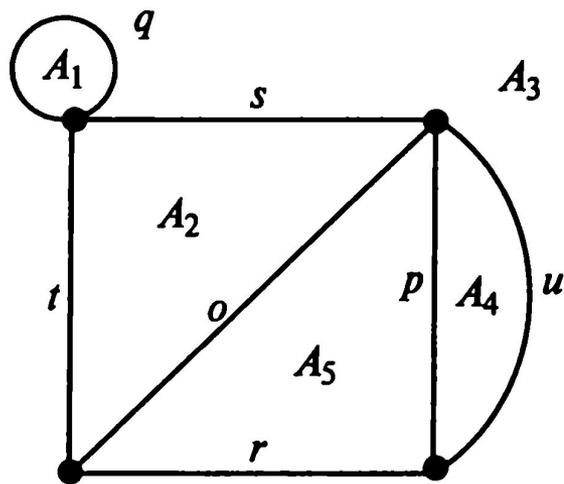


a — G_9 (с областями A_1 — A_5); b — G_{10} (с областями A_1, A_2, A_4, A_5)

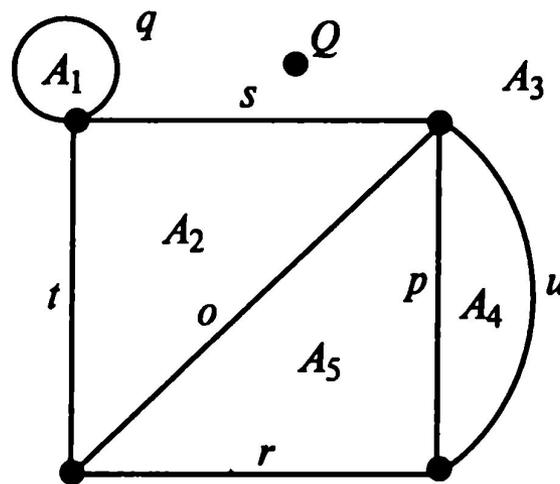
Теорема Эйлера

Теорема (Эйлера). Связный плоский граф с n вершинами и m ребрами разбивает плоскость на r областей (включая внешнюю), причем

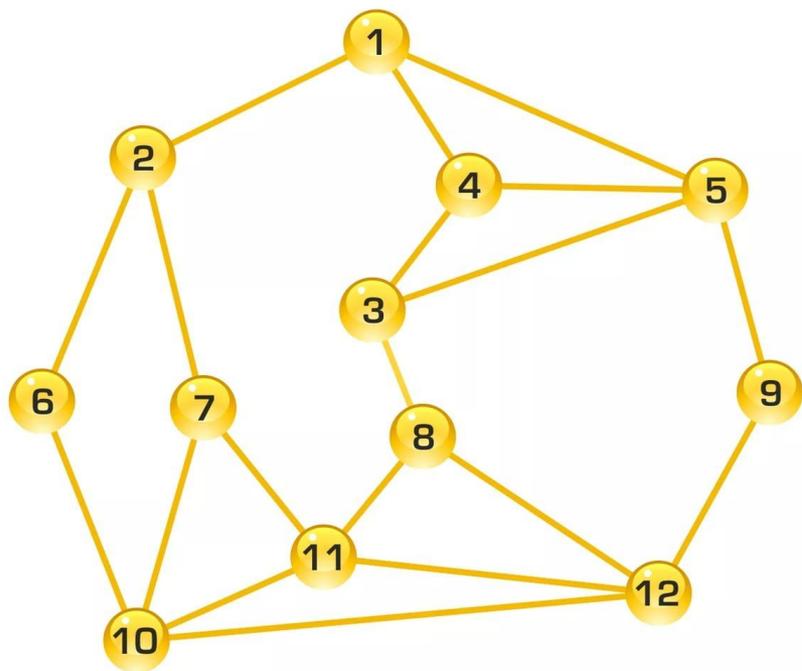
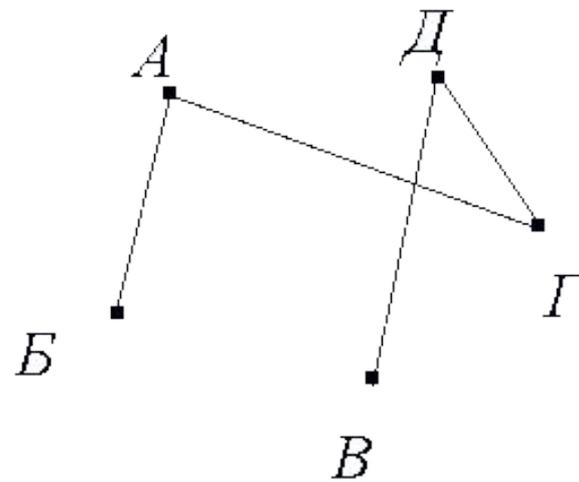
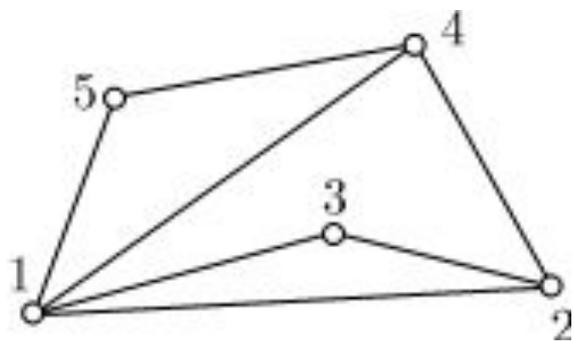
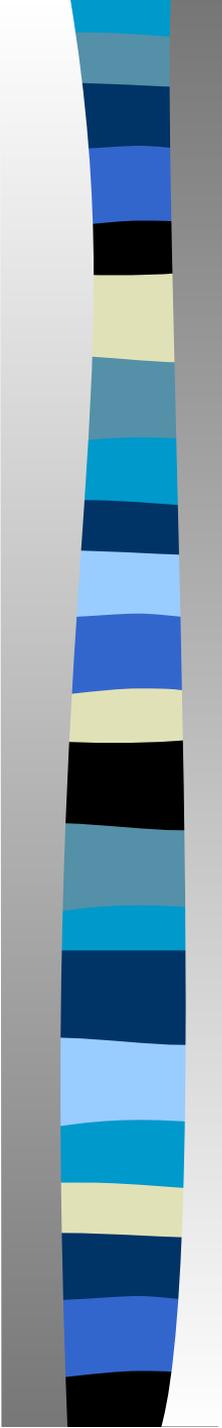
$$n - m + r = 2.$$



G_9



G_{10}

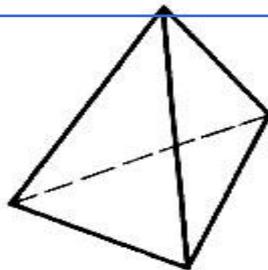
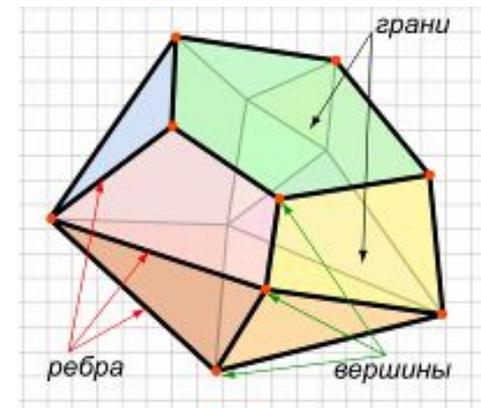


Другая интерпретация теоремы Эйлера

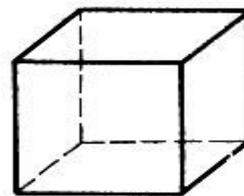
Теорема Эйлера. Пусть V - число вершин выпуклого многогранника, P - число его ребер и Γ - число граней. Тогда верно равенство $V - P + \Gamma = 2$.

Число $\chi = V - P + \Gamma$ называется *эйлеровой характеристикой* многогранника

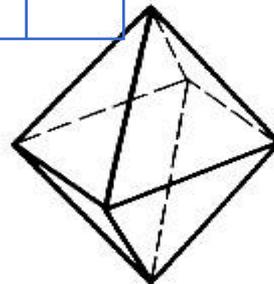
Многогранник	V	P	Γ	
Тетраэдр	4	6	4	2
Октаэдр	6	12	8	2
Параллелепипед	8	12	6	2
n -угольная пирамида	$n+1$	$2n$	$n+1$	2
n -угольная призма	$2n$	$3n$	$n+2$	2



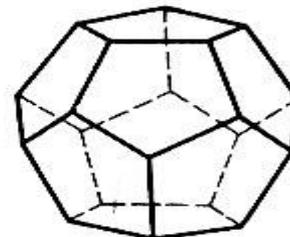
а) тетраэдр



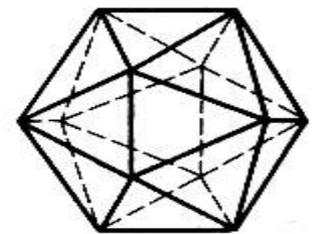
б) куб



в) октаэдр



г) додекаэдр



д) икосаэдр

Являются ли полные графы планарными?

Утверждение: Граф K_5 не планарный.

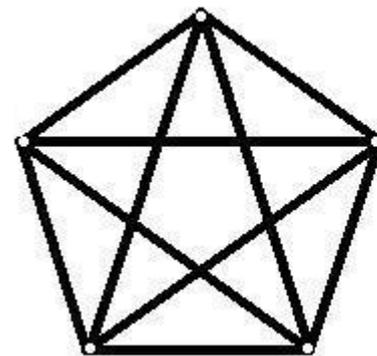
Доказательство.

Предположим, что K_5 – планарный граф; поскольку для него $n = 5$, $m = 10$, то, по формуле Эйлера, $r = 7$.

С другой стороны, каждый цикл в графе, ограничивающий некоторую область, очевидно, содержит не менее трех ребер.

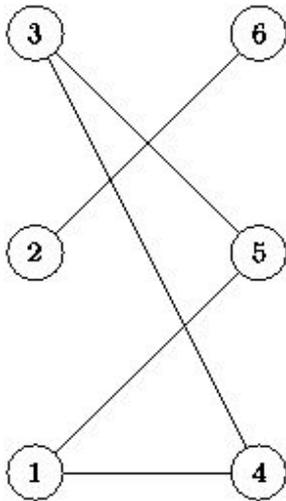
Подсчитаем для каждой области число ребер на ее границе. Учитывая, что при этом ребро считается не более двух раз (по одному для каждой из двух областей, на границах которых оно лежит), получим неравенство

$$2m \geq 3r, \text{ т.е. } 20 \geq 21.$$



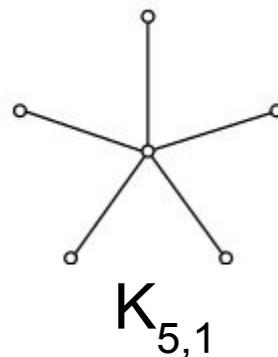
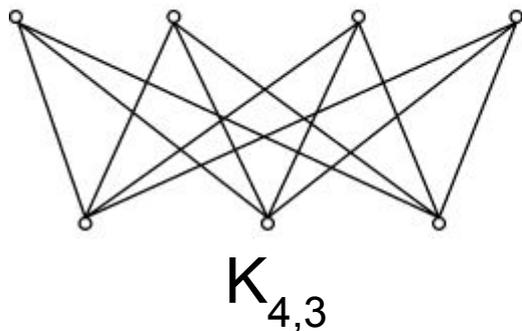
Двудольные графы

Неориентированный граф $G = (X, A)$ – **двудольный**, если множество его вершин X можно разбить на два подмножества X_1 и X_2 , что каждое ребро имеет один конец в X_1 , а другой в X_2 .



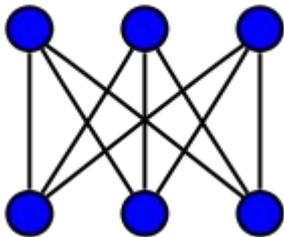
Полный двудольный граф

Полным двудольным графом называется специальный вид двудольного графа, у которого любая вершина первой доли соединена со всеми вершинами второй доли вершин.



Граф $K_{m,n}$ имеет ровно $m + n$ вершин и $m \cdot n$ ребер.

Полный двудольный граф



Утверждение: Граф $K_{3,3}$ не планарный.

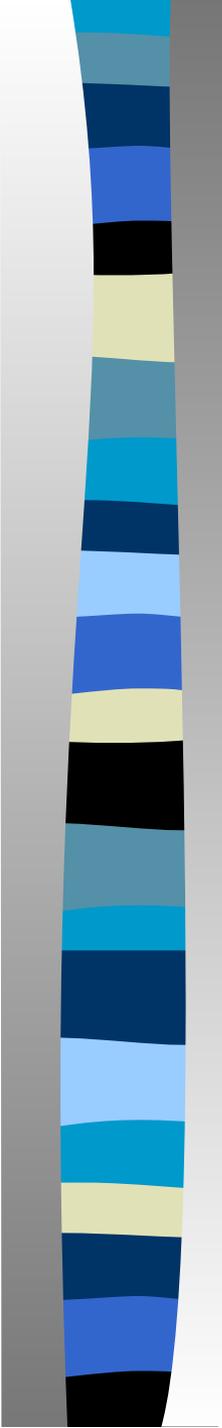
Доказательство.

Предположим, что $K_{3,3}$ – планарный граф;

поскольку для него $n = 6$, $m = 9$, то, по формуле Эйлера, $r = 5$.

С другой стороны, каждый цикл в графе, ограничивающий некоторую область, очевидно, содержит не менее четырех ребер; следовательно

$$2m \geq 4r, \text{ т.е. } 18 \geq 20$$



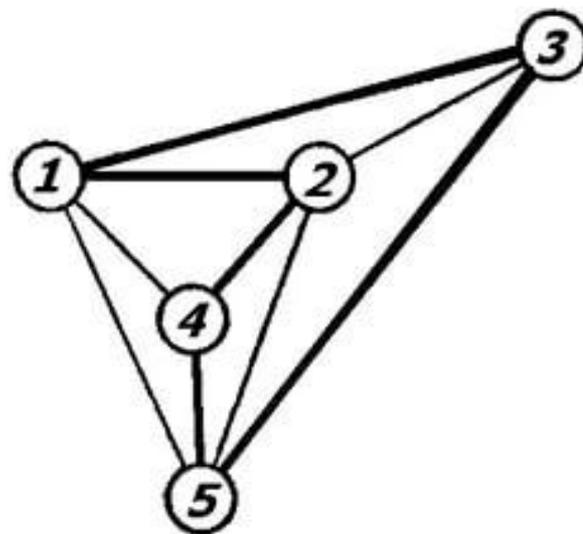
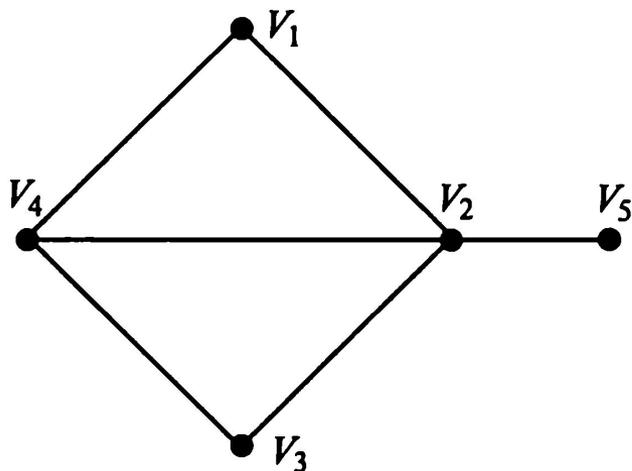
Планарные графы

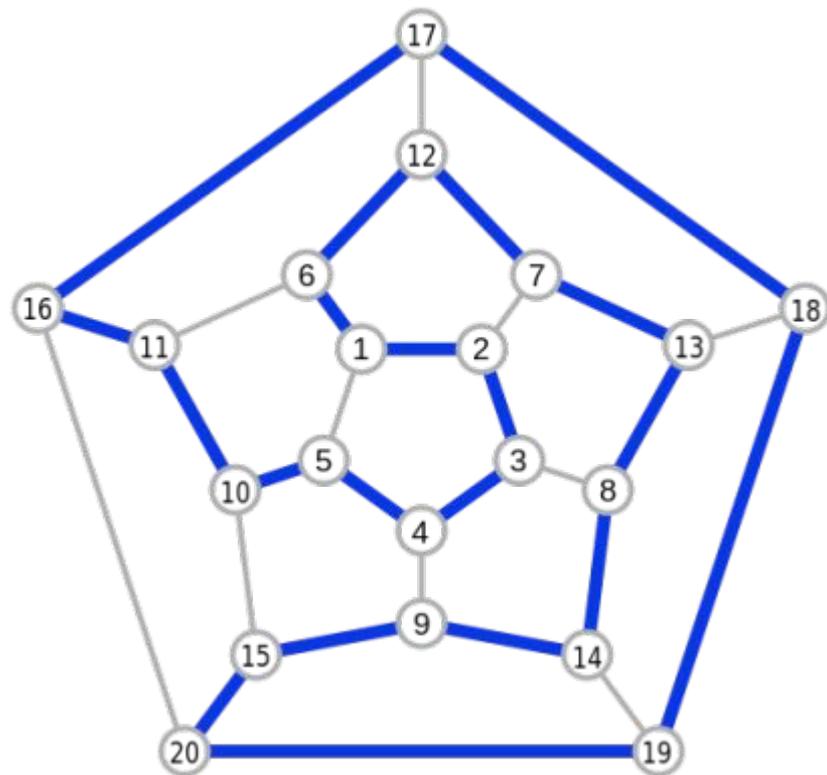
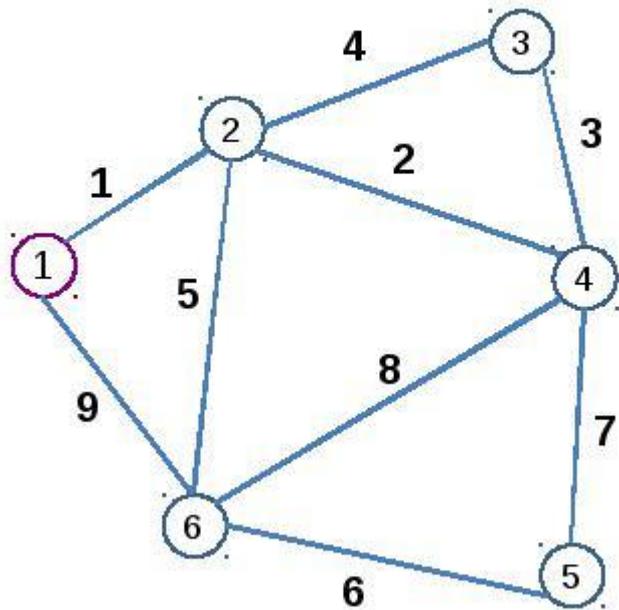
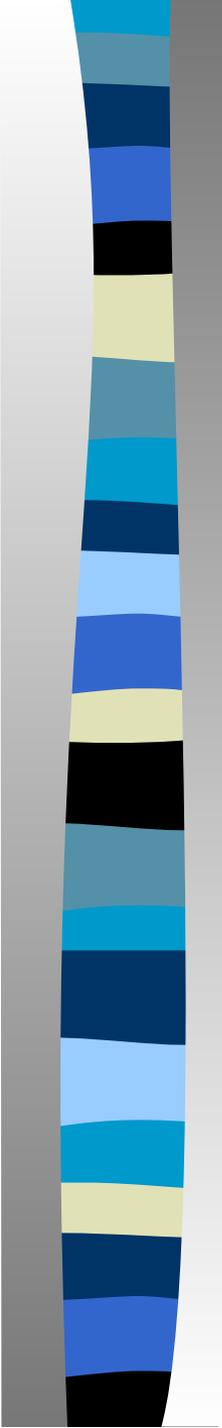
- **Теорема (Понтрягин-Куратовский)**

Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит в качестве частей графы K_5 и $K_{3,3}$

Гамильтонов граф

Гамильтоновым $\frac{\text{путем}}{\text{циклом}}$ графа G называется $\frac{\text{путь}}{\text{цикл}}$, проходящий через каждую его вершину только один раз. Граф, содержащий гамильтонов цикл, называется **гамильтоновым**.



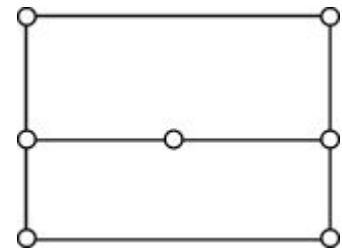


Гамильтонов граф

Критерий существования гамильтонова цикла в произвольном графе еще не найден.

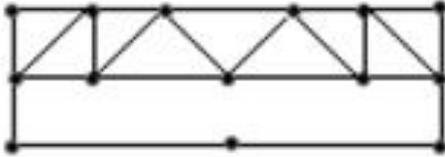
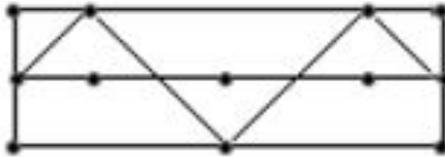
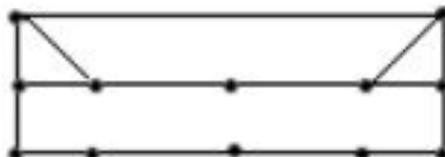
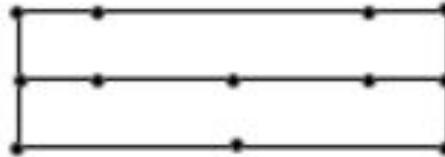
Факты о существовании гамильтоновых циклов в графе:

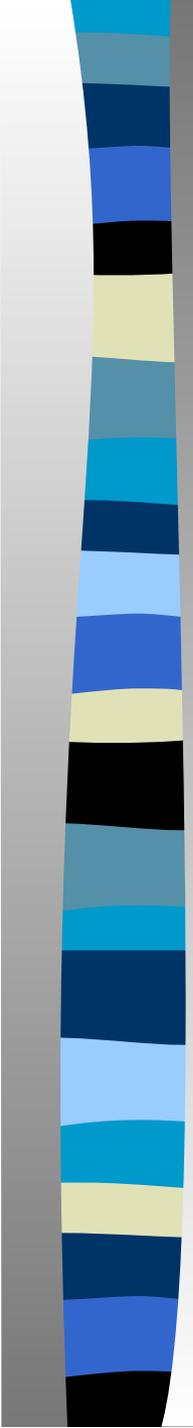
- Всякий полный граф является гамильтоновым
- Если *граф*, помимо простого *цикла*, проходящего через все его вершины, содержит и другие ребра, то он также является гамильтоновым.
- Если *гамильтонов граф* объединить с еще одной вершиной ребром так, что образуется *висячая вершина*, то такой *граф* гамильтоновым не является,
- Не является гамильтоновым и *граф*, представляющий собой *простой цикл* с "перекладиной" (тэта граф), на которой расположены одна или несколько вершин.



"тэта
граф"

Примеры графов, обладающих или не обладающих свойствами эйлеровости и гамильтоновости:

граф	гамильтонов	Не гамильтонов
эйлеров		
не эйлеров		



Орграф. Пути, цепи, циклы.

Последовательность ребер, в которой конец каждого предыдущего ребра e_{i-1} совпадает с началом следующего e_i , называется *путем* (в нем все ребра проходят по их ориентации). В пути одно и то же ребро может встречаться несколько раз. *Началом пути* является начало v_0 ребра e_1 , *концом пути* – конец v_n ребра e_n .

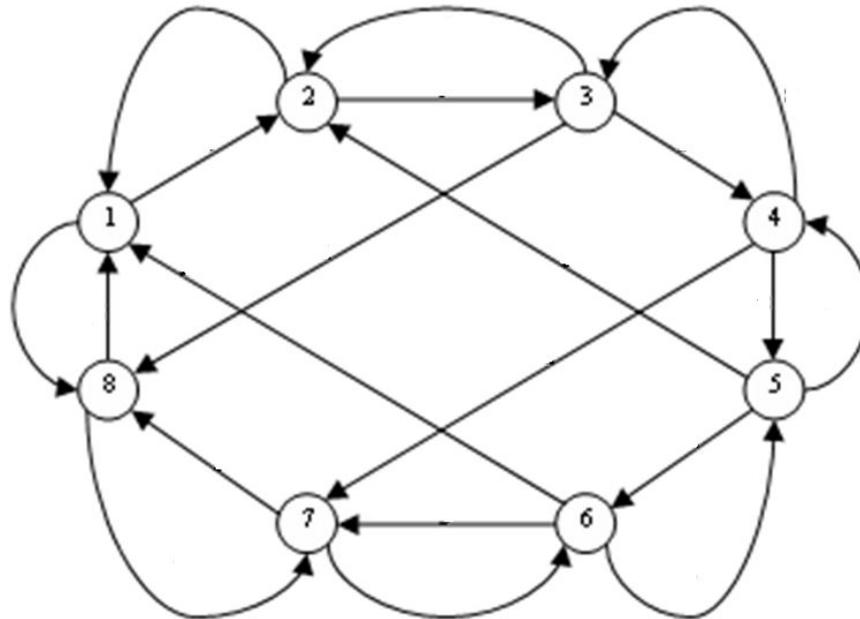
Путь называется *ориентированной цепью* (или просто *цепью*), если каждое ребро встречается в нем не более одного раза, и *простой цепью*, если любая вершина графа G инцидентна не более чем двум его ребрам.

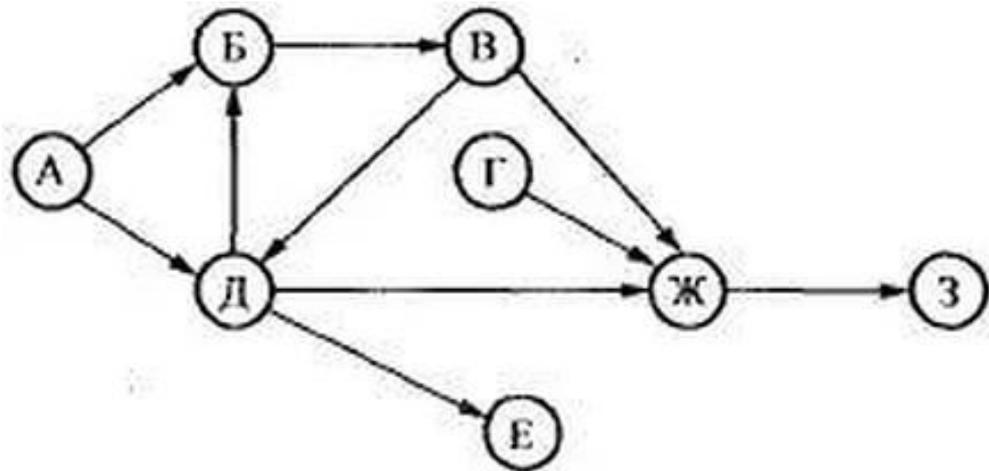
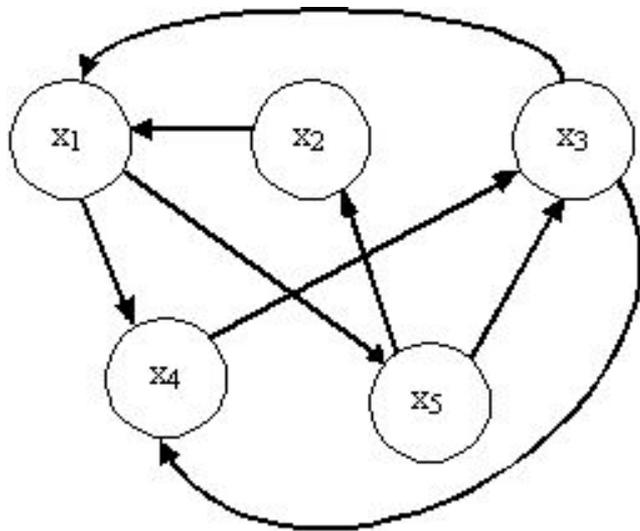
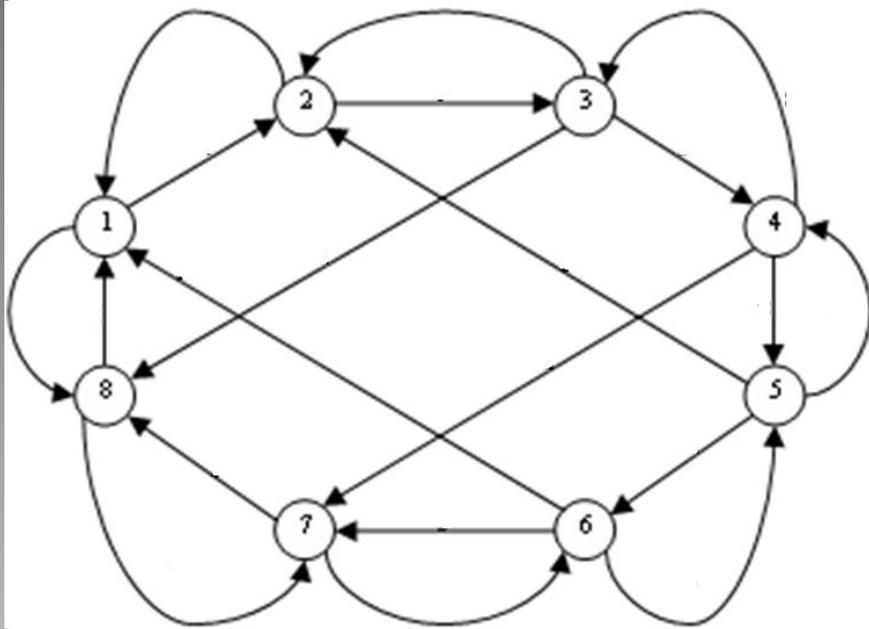
Орграф. Пути, цепи, циклы.

Путь называется контуром, если его начальная вершина совпадает с конечной вершиной.

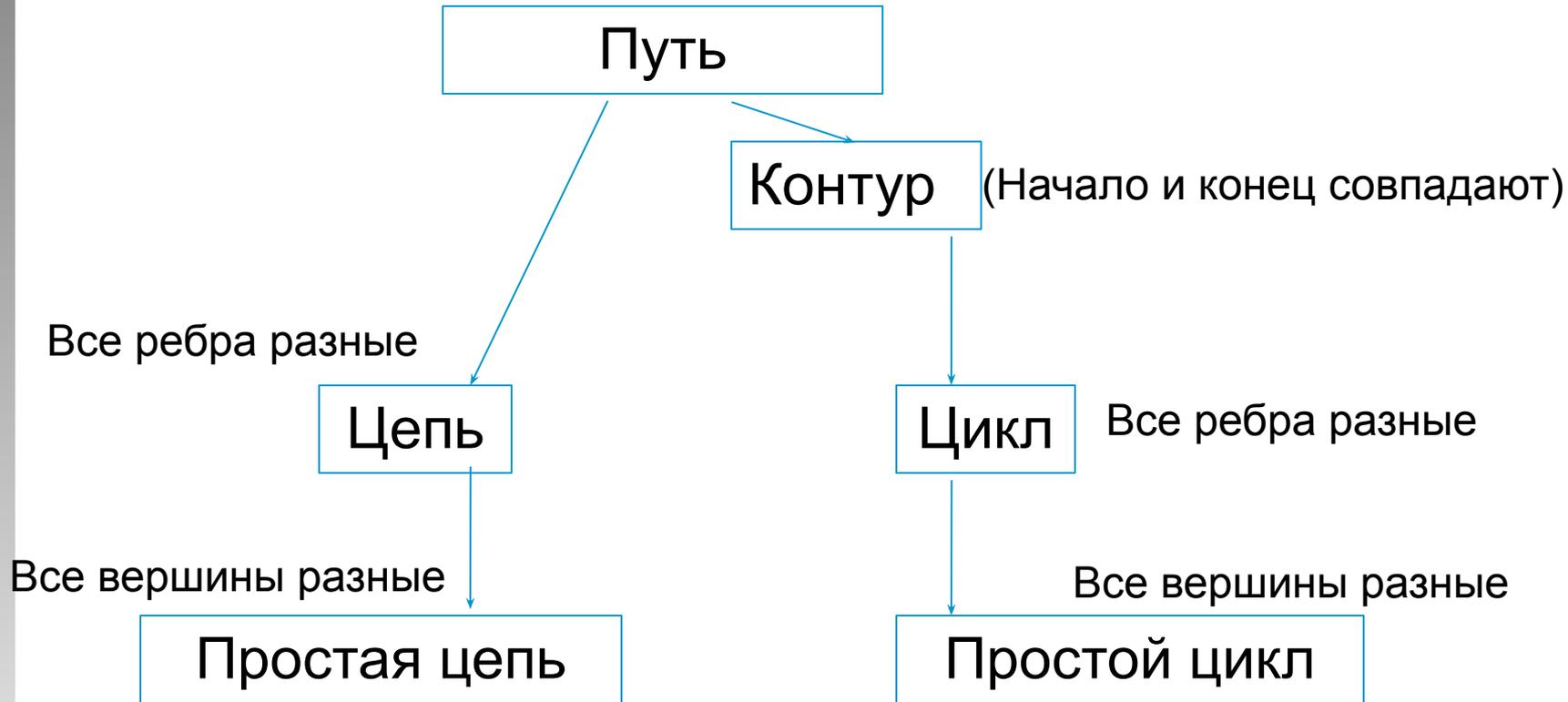
Контур называется **циклом**, если он не содержит повторяющихся ребер.

Цикл, не содержащий повторяющихся вершин, называется **простым циклом**.





Орграф. Пути, цепи, циклы.

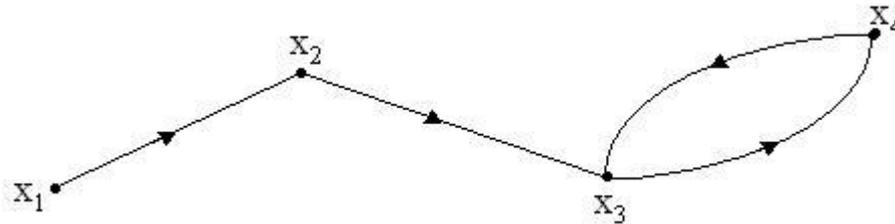


Матрица достижимости

Вершина графа V_i называется достижимой из вершины V_j того же графа, если существует по крайней мере один путь из V_j в V_i .

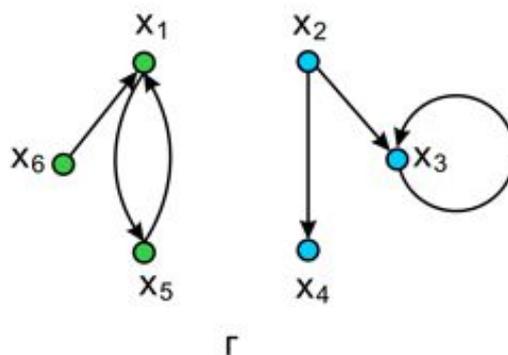
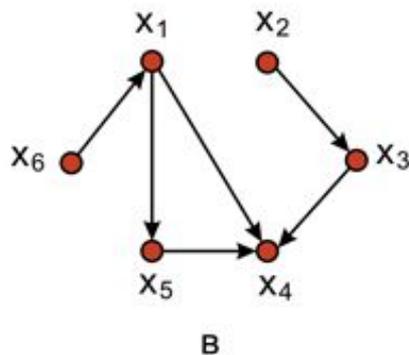
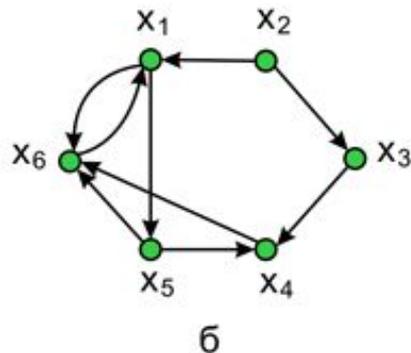
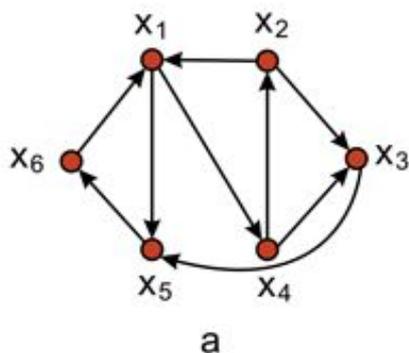
Матрицей достижимости называется квадратная матрица порядка n , элемент которой

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j \text{ достижима из } x_i \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

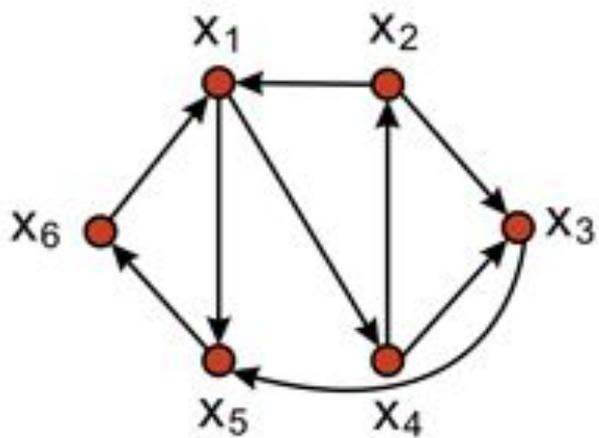


Сильно связанные графы

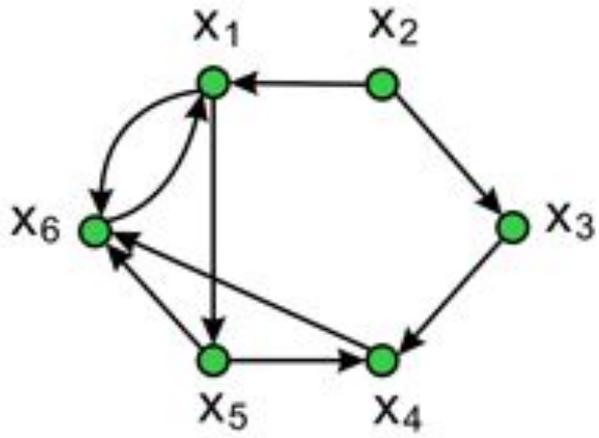
Орграф называется **сильно связным**, или **сильным**, если для двух любых различных его вершин x_i и x_j существует, по крайней мере, один **путь**, соединяющий эти вершины. Это определение означает также, что любые две вершины сильно связного графа взаимодостижимы.



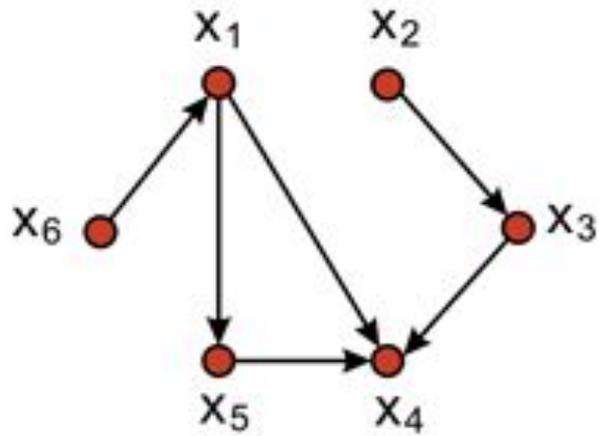
Орграф называется **слабо связным**, или **слабым**, если для любых двух различных вершин графа существует по крайней мере один **маршрут**, соединяющий их.



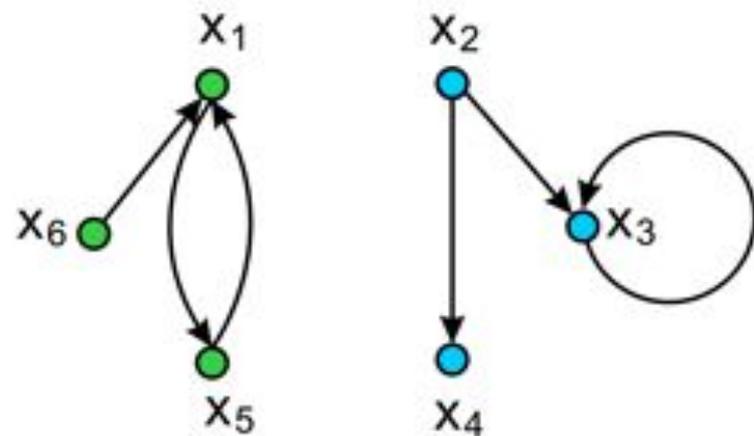
a



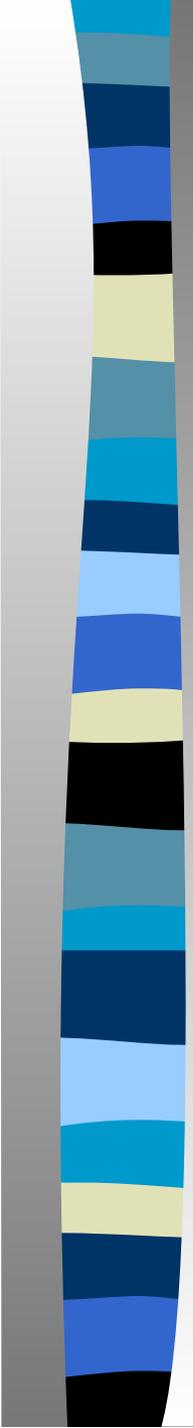
б

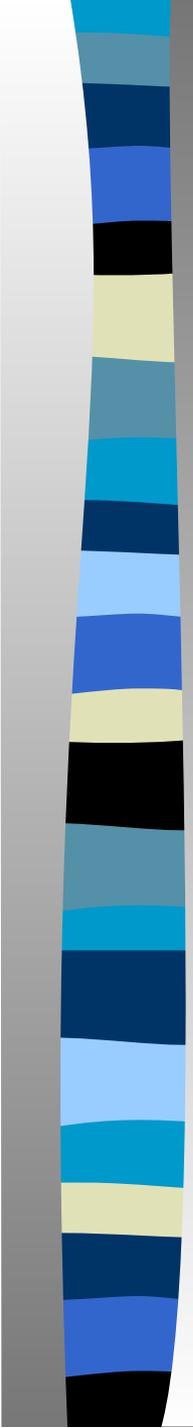


в



г





Самостоятельная работа

1 вариант

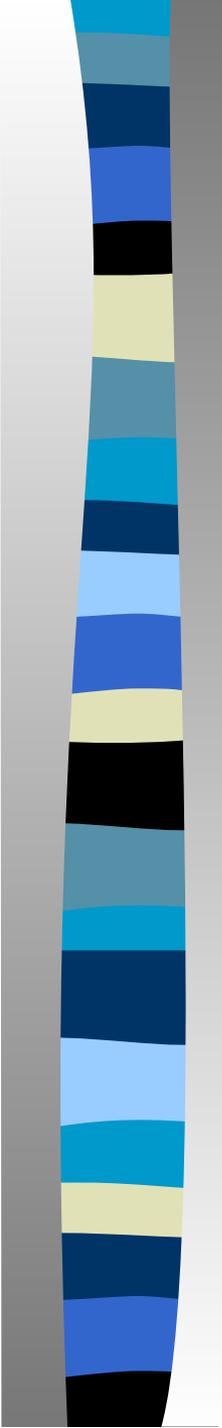
**Дайте определения и
приведите пример:**

1. Инцидентная вершина
2. Ориентированный граф
3. Мультиграф
4. Полный граф
5. Степень вершины
6. Матрица смежности
7. Маршрут
8. Расстояние
9. Цикл
10. Центр графа

2 вариант

**Дайте определения и
приведите пример:**

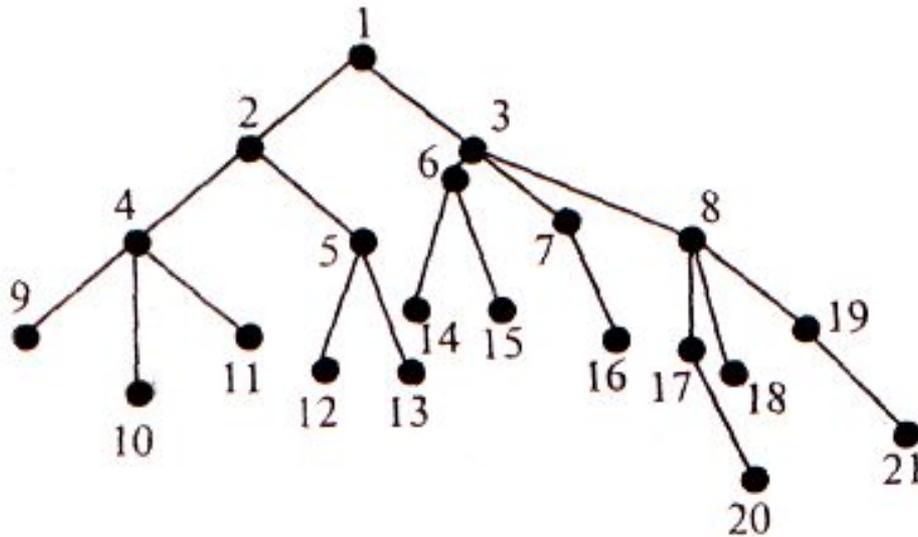
1. Смежные вершины
2. Неориентированный граф
3. Псевдограф
4. Дополнение графа
5. Изолированные вершины
6. Матрица инцидентности
7. Цепь
8. Эксцентриситет
9. Простой цикл
10. Радиус графа



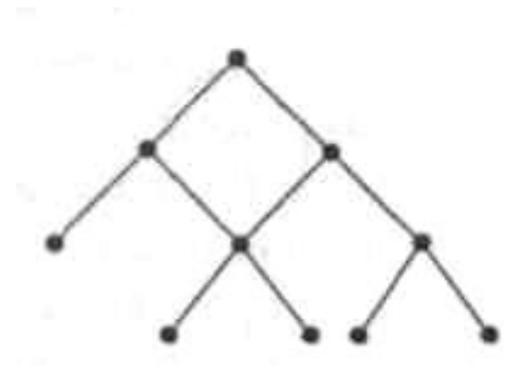
ДЕРЕВЬЯ. ЛЕС. БИНАРНЫЕ ДЕРЕВЬЯ

Неориентированное дерево

Неориентированным **деревом** (или просто деревом) называют конечный связный граф, не имеющий ЦИКЛОВ



Пример дерева

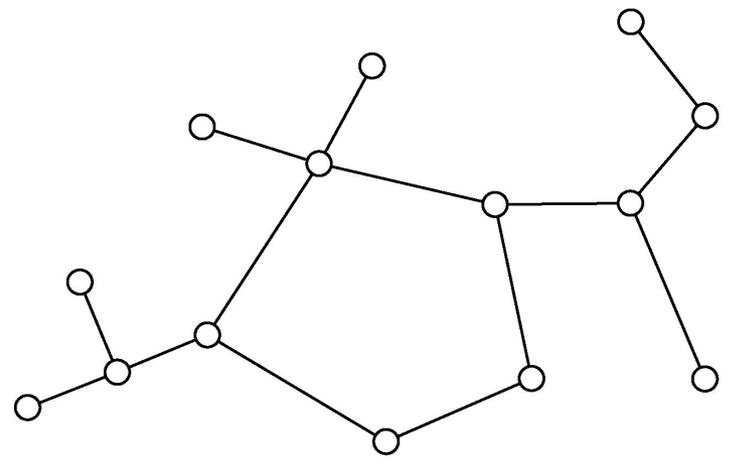
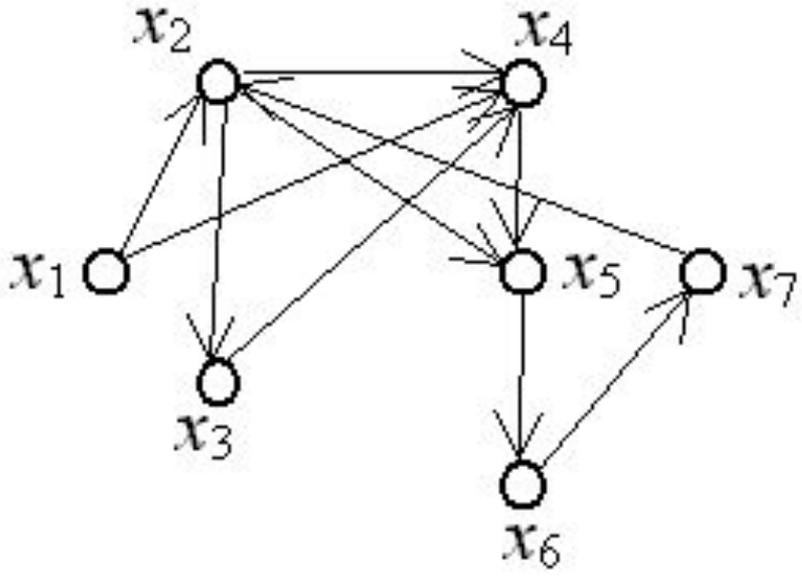
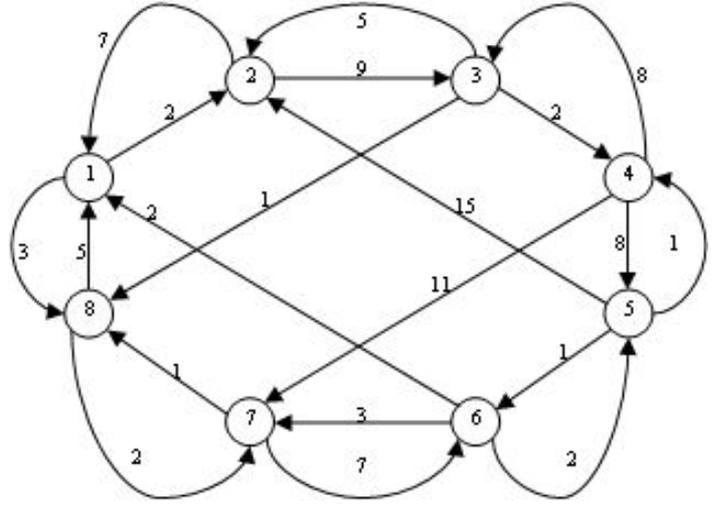
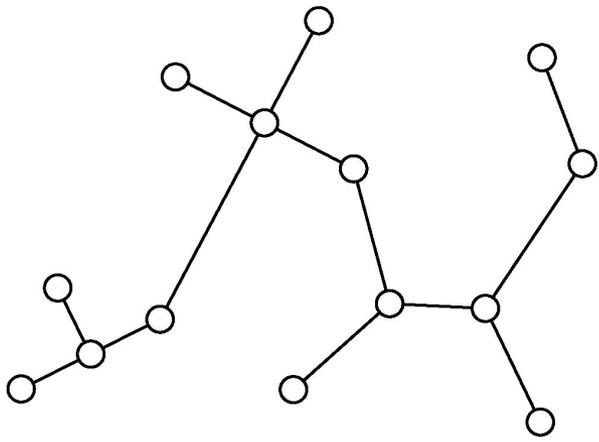


Граф не является деревом

Характерные свойства деревьев

Теорема. Граф $G(V, X)$ ($|V| = n > 1$) является деревом тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий:

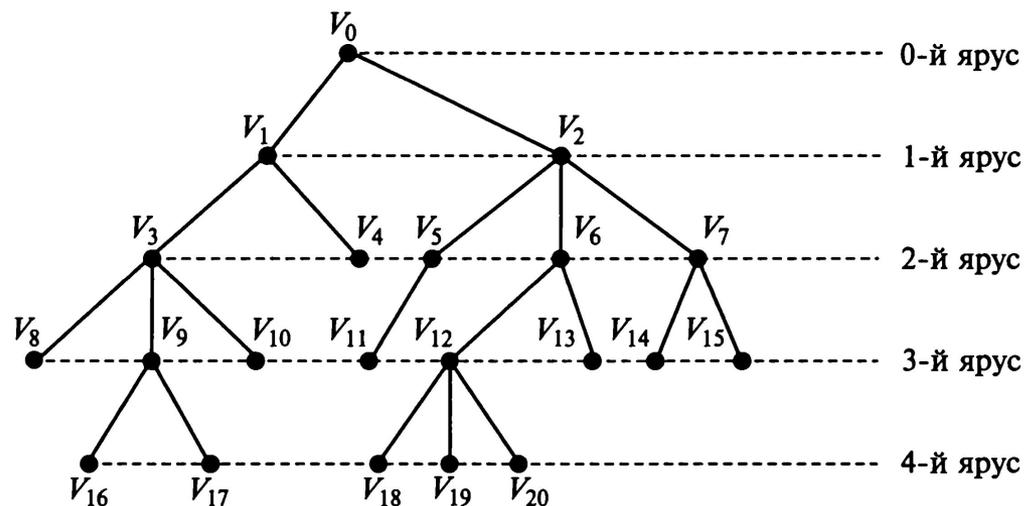
- граф $G(V, X)$ связан и не содержит циклов;
- граф $G(V, X)$ не содержит циклов и имеет $n-1$ ребро;
- граф $G(V, X)$ связан и имеет $n-1$ ребро;
- граф $G(V, X)$ не содержит циклов, но добавление ребра между несмежными вершинами приводит к появлению одного и только одного элементарного цикла;
- граф $G(V, X)$ связный, но утрачивает это свойство после удаления любого ребра;
- в графе $G(V, X)$ всякая пара вершин соединена цепью, и только одной.



Ярус вершины

Для каждой пары вершин дерева — узлов — существует единственный маршрут, поэтому вершины удобно классифицировать по степени удаленности от корневой вершины.

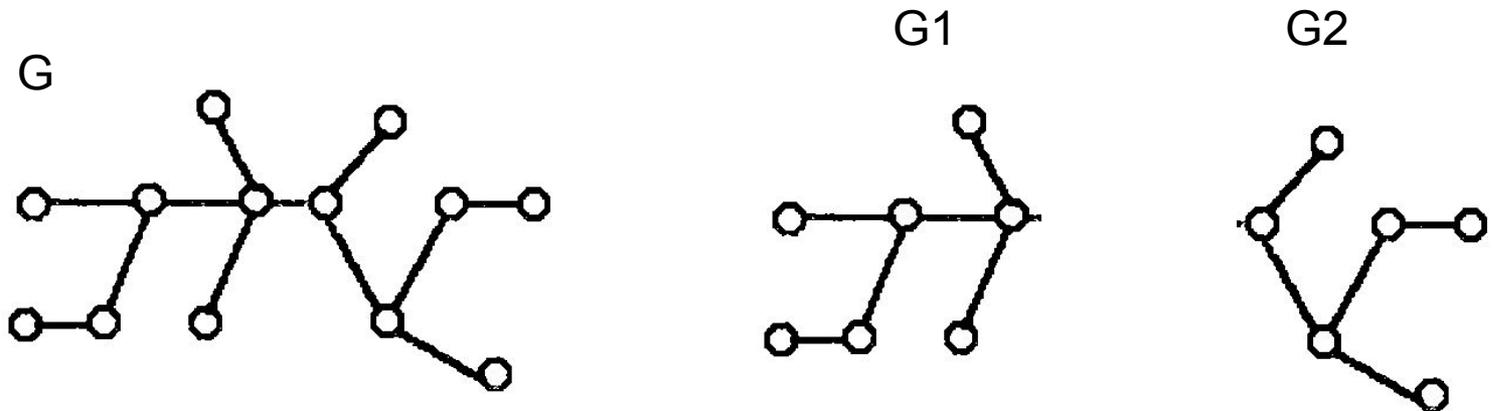
Расстояние до корневой вершины V_0 называется **ярусом s вершины**, $s = d(V_0, V)$.



Висячие вершины, за исключением корней, называются **листьями**.

Дерево с n вершинами имеет $n-1$ ребро, поэтому оно будет **минимальным связным графом**.

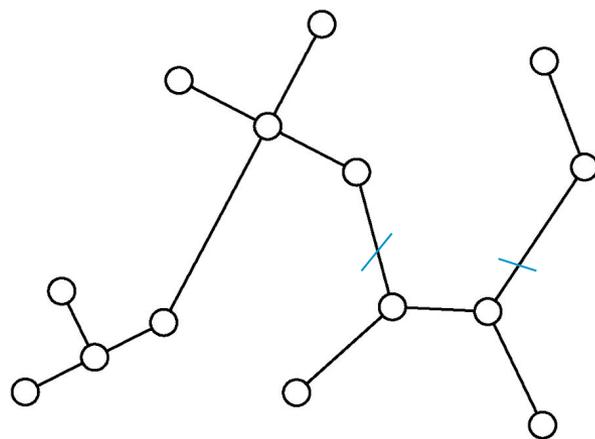
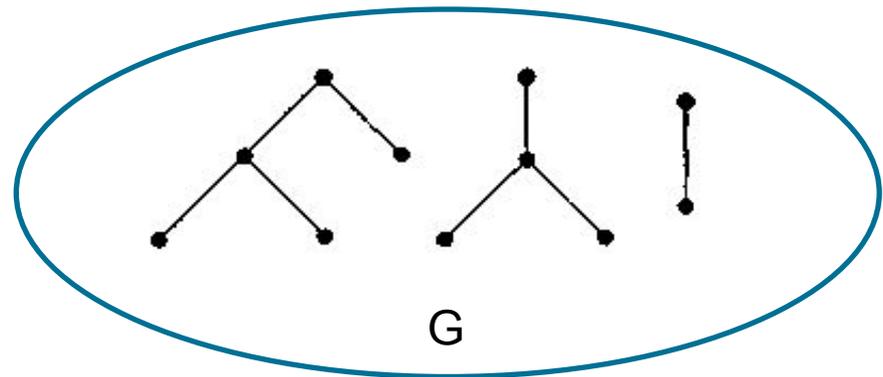
Так как в дереве маршрут между двумя вершинами **единственный**, то каждое его ребро является **МОСТОМ**.



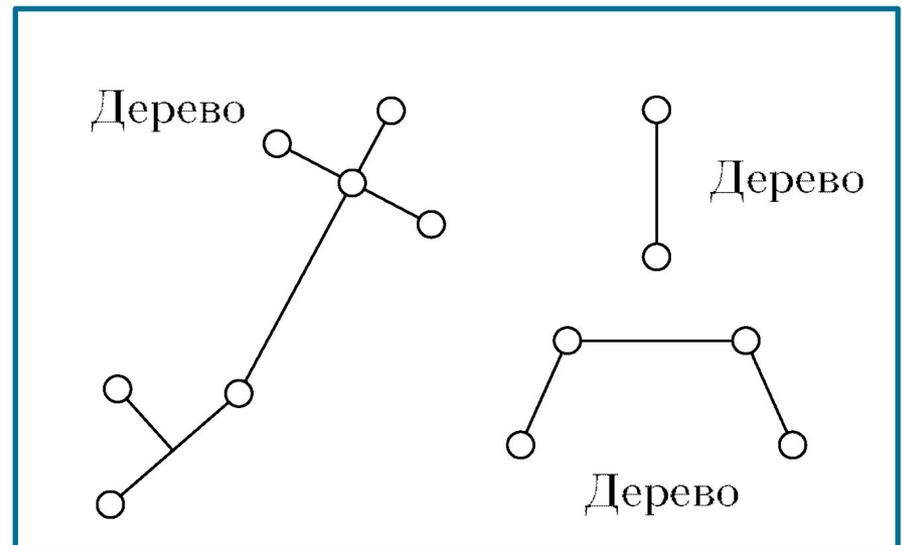
При удалении ребра этот единственный маршрут прерывается. Тогда граф распадается на два подграфа. В одном из них остается корневая вершина, и этот граф G1 тоже будет являться деревом. В другом графе G2 выделим вершину, инцидентную удаленному мосту. Тогда второй подграф также будет являться деревом.

Лес

Лес – это граф, компоненты связности которого являются деревьями.



Дерево



Дерево

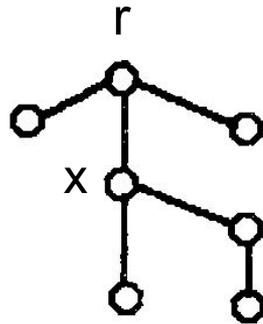
Дерево

Дерево

Лес

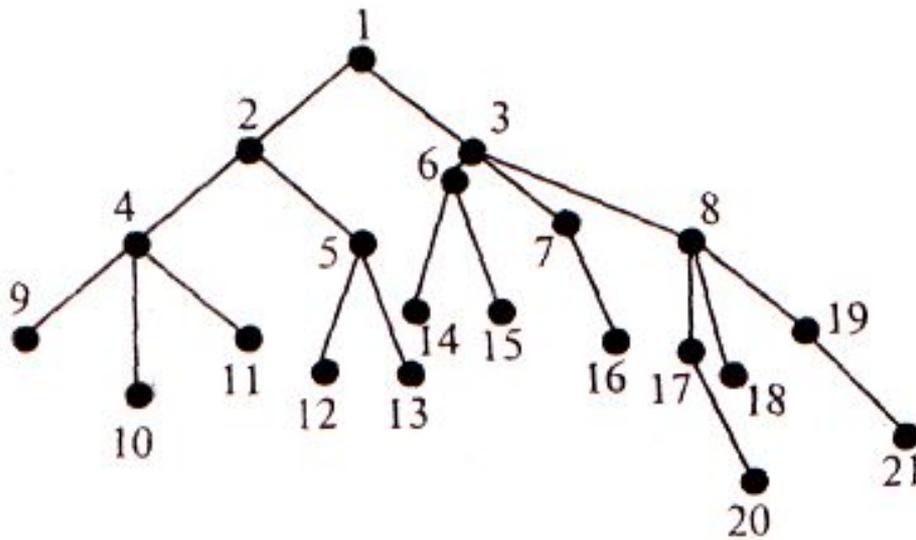
Предки и потомки

- Пусть x — произвольная вершина корневого дерева с корнем r .
- Существует единственный путь из корня r в вершину x ; все вершины, находящиеся на этом пути, мы назовем предками вершины x .
- Если вершина u является предком вершины x , то вершина x называется потомком u .
- Каждую вершину мы считаем своим предком и потомком.
- Предки и потомки вершины x , не совпадающие с этой вершиной, называются собственными предками и собственными потомками вершины x .



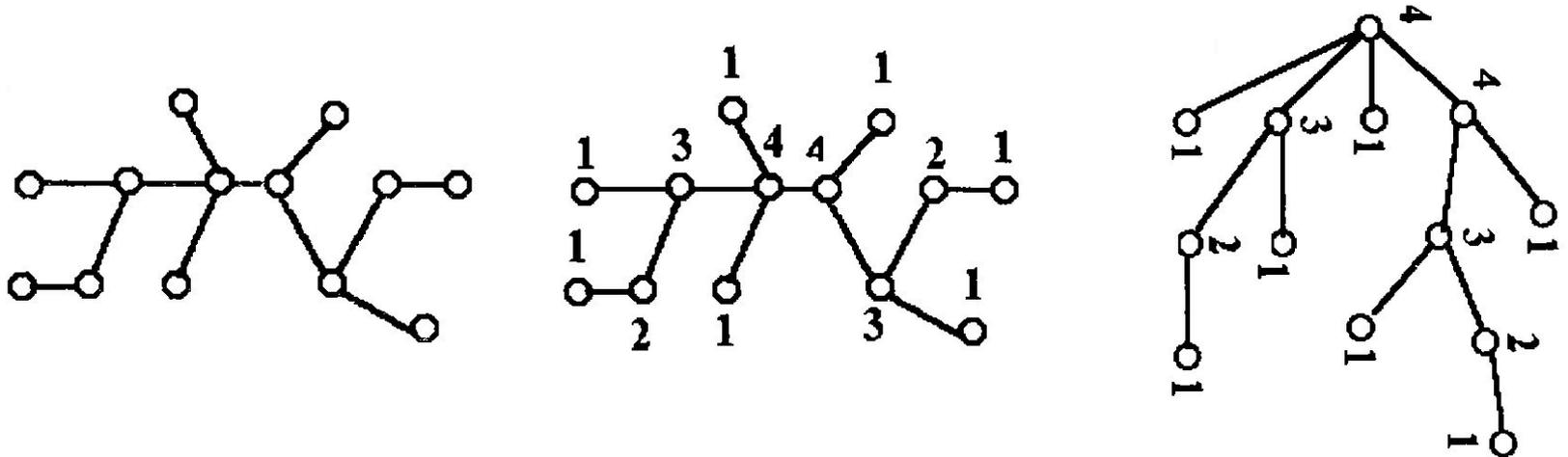
Высота дерева

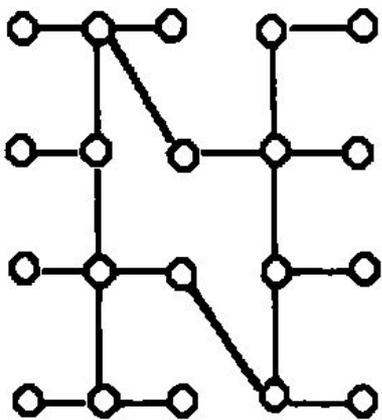
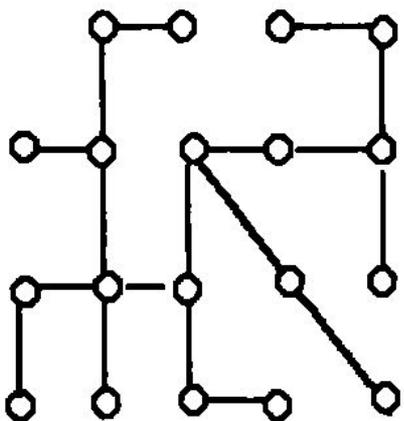
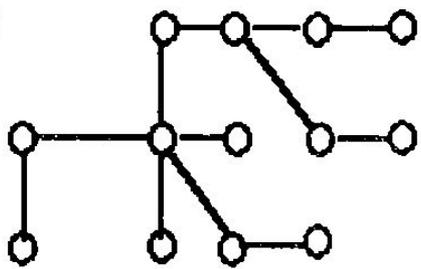
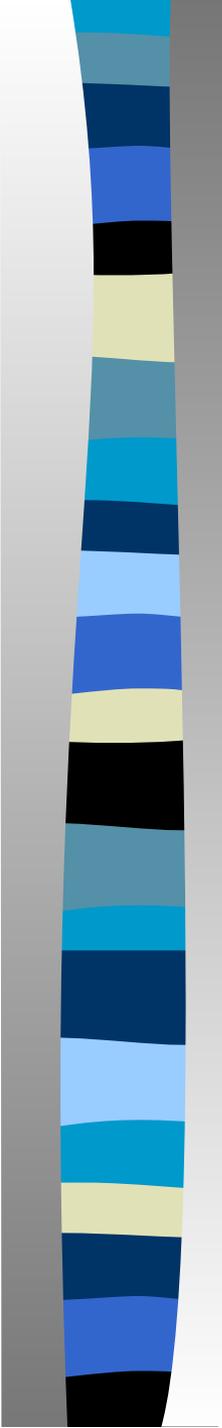
- Глубина вершины (узла) в дереве – это длина пути из корня в этот узел (ярус) .
- Высота узла в дереве – это длина самого длинного пути из этого узла в какой-нибудь лист.
- Высотой дерева называется высота его корня.



Выделение корня

Пусть дано конечное дерево G . Вершинами типа 1 называют его концевые вершины. Если из дерева G удалить все вершины типа 1 и инцидентные им концевые ребра, то в оставшемся дереве G' концевые вершины называют *вершинами типа 2* в дереве G . Аналогично определяются вершины типов 3, 4 и т.д. Конечное дерево имеет вершины лишь конечного числа типов, причем число *вершин максимального типа* равно единице или двум.





Цикломатическое число графа.

Пусть задан неориентированный граф G . **Цикломатическим числом** графа называется число

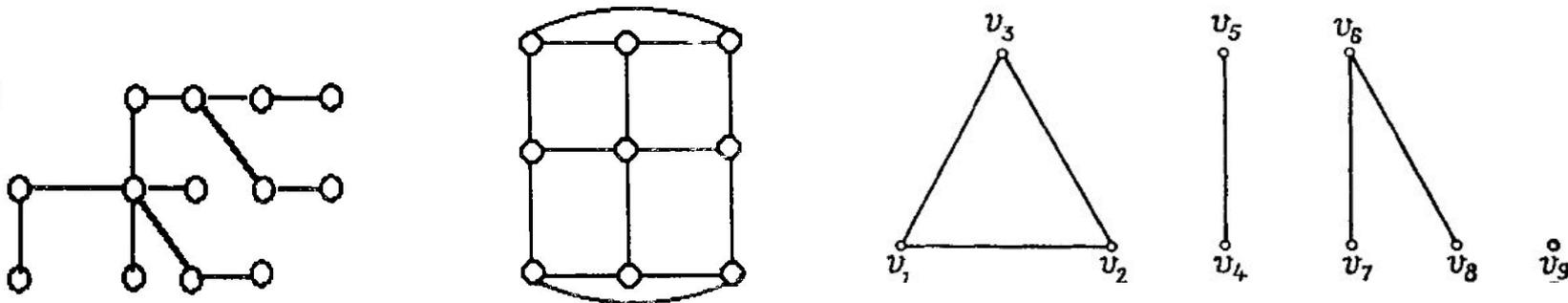
$$\nu(G) = m(G) + c(G) - n(G),$$

где $m(G)$ — число его ребер; $c(G)$ — число связных компонент графа; $n(G)$ — число вершин.

Цикломатическое число дерева равно **нулю**.

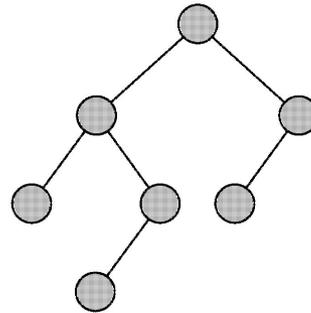
Цикломатическое число леса равно сумме цикломатических чисел составных связных компонент — деревьев и, следовательно, тоже равно **нулю**.

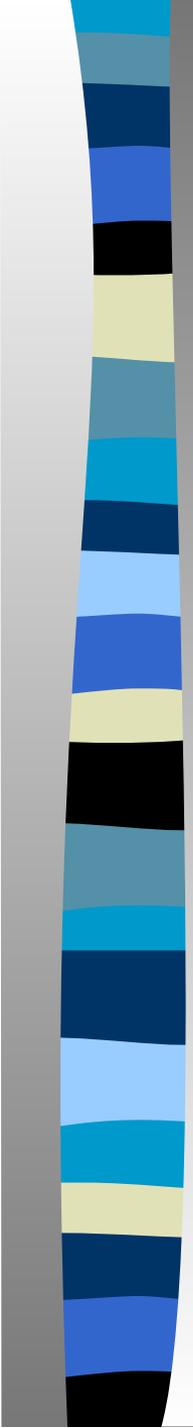
Для остальных графов цикломатические числа — **положительные**.



Двоичное дерево

- Двоичное (бинарное) дерево – дерево, в котором каждый родительский узел имеет не более двух потомков.





Двоичное дерево

Бинарным деревом называется конечный набор вершин, который:

- либо пуст (не содержит вершин);
- либо разбит на три непересекающиеся части:
 - вершину, называемую корнем,
 - бинарное дерево, называемое левым поддеревом корня,
 - бинарное дерево, называемое правым поддеревом корня.

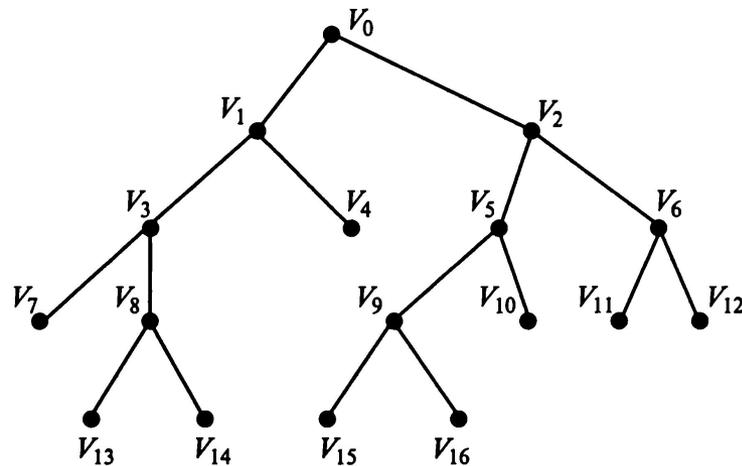
Бинарное дерево, не содержащее вершин, называется **пустым**.

Иногда оно обозначается как NIL.

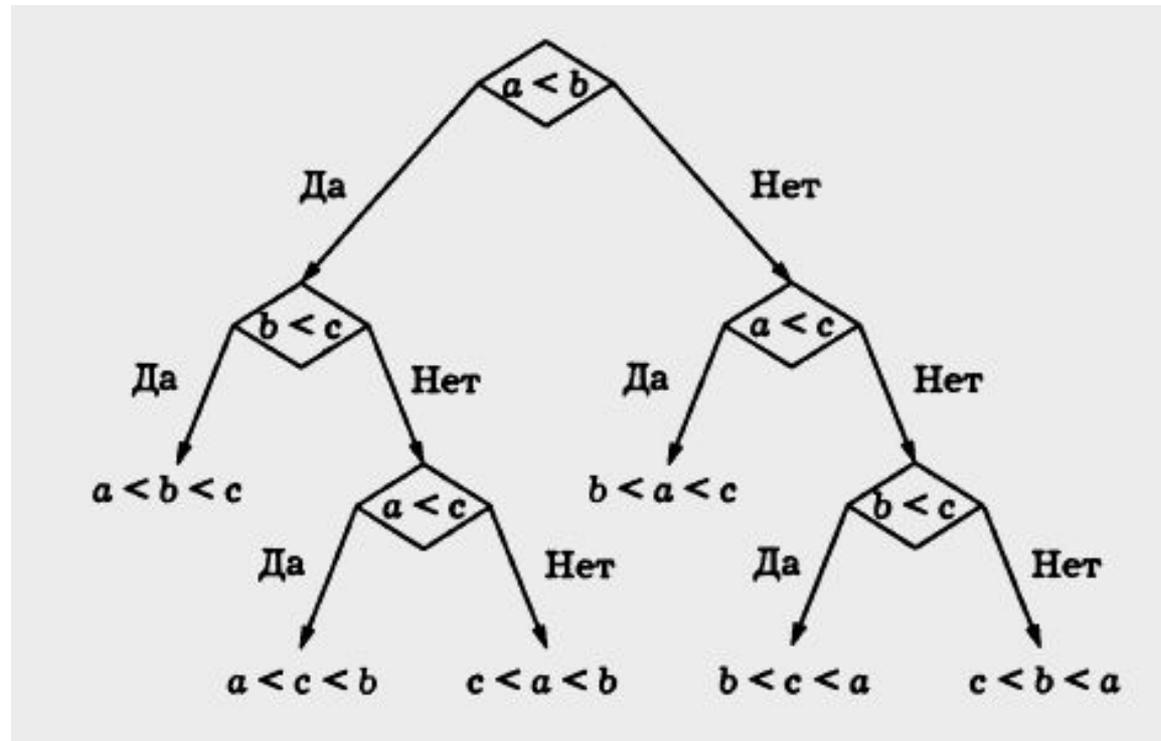
Если левое поддерево не пусто, то его корень называется **левым ребенком** корня всего дерева; правый ребенок определяется аналогично.

Двоичное дерево

- Строго бинарным деревом называется такой граф, у которого каждый узел, не являющийся листом, содержит два и только два поддерева — левое и правое.

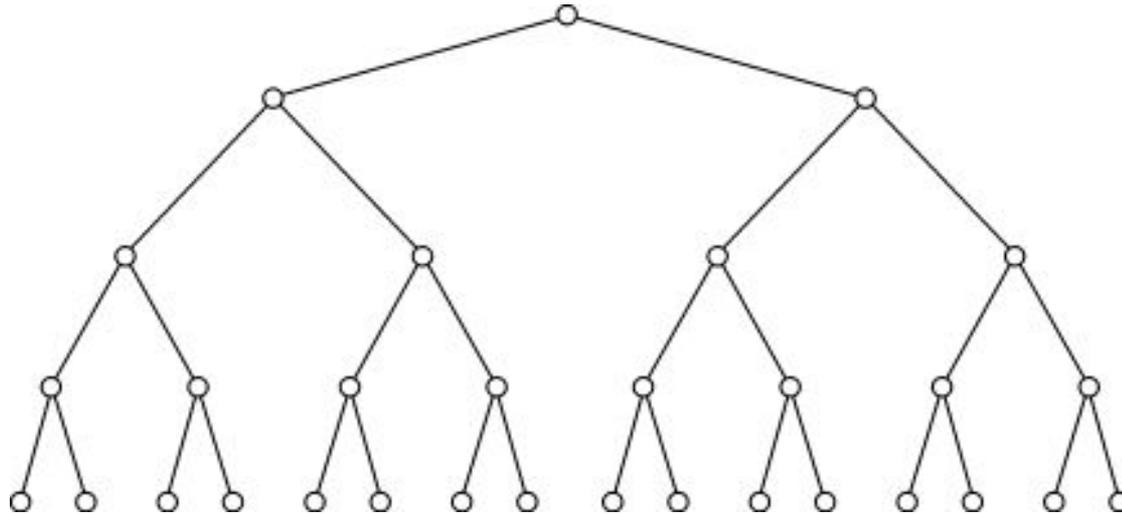


Пример строгого бинарного дерева



Полное двоичное дерево

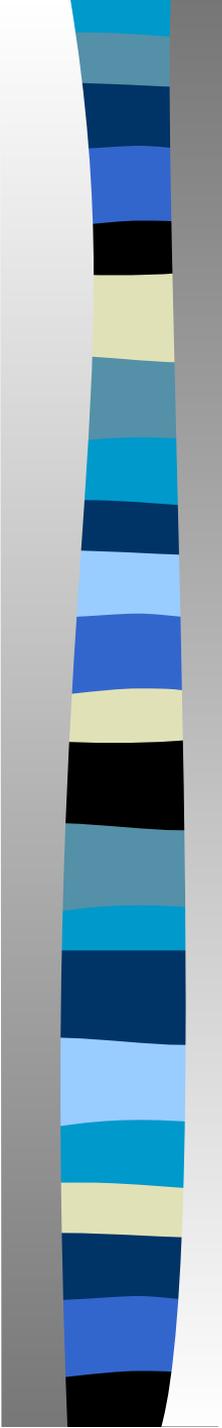
- Бинарное дерево уровня n называется полным, если каждый его узел уровня n является листом, а каждый узел уровня меньше, чем n , имеет непустое левое и правое поддеревья.



Пример полного бинарного дерева



Бинарное дерево для представления розыгрыша Кубка мира по футболу 2002 г.



Полное двоичное дерево

Полное двоичное дерево высоты h имеет 2^h листьев и число внутренних вершин равно

$$\frac{2^h - 1}{2 - 1}$$

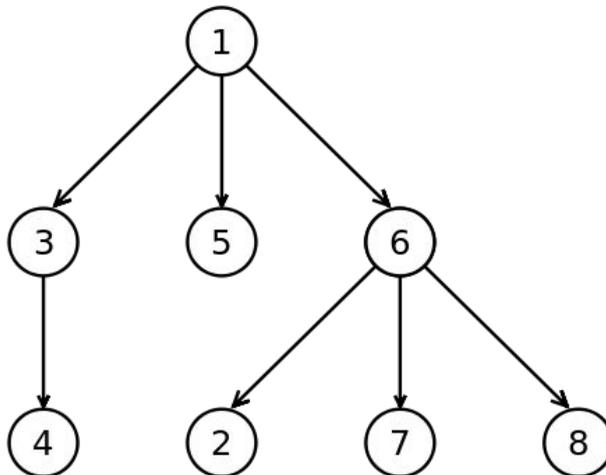
И наоборот, высоту полного двоичного дерева с n листьями можно найти как $\log_2 n$ (такое дерево существует, только если этот логарифм является целым числом).

Ориентированное дерево

Ориентированный_граф $G=(V,E)$

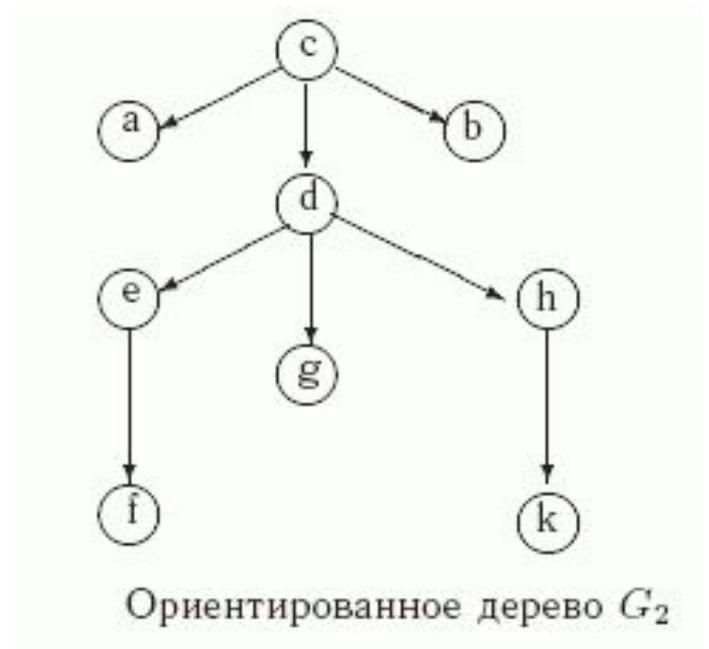
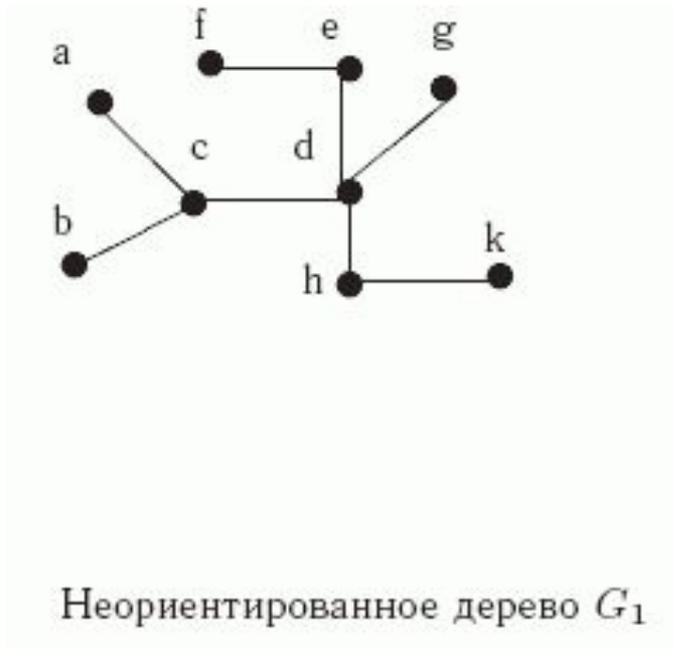
называется **(ориентированным) деревом**, если

- в нем есть одна вершина в которую не входят ребра; она называется **корнем** дерева;
- в каждую из остальных вершин входит ровно по одному ребру; все вершины достижимы из *корня*.



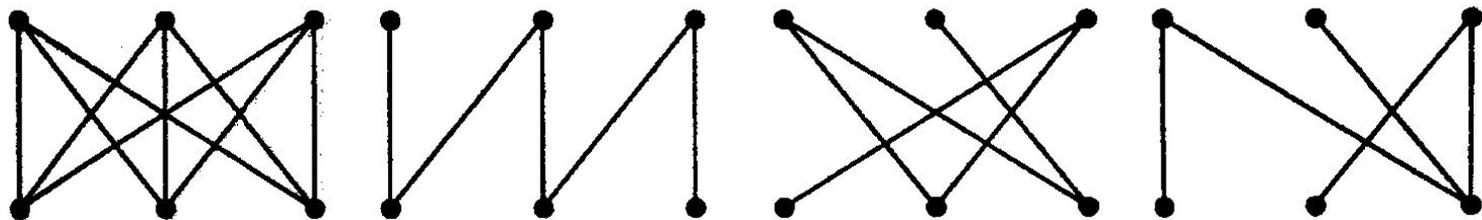
Ориентированное дерево

- примеры неориентированного дерева G_1 и ориентированного дерева G_2 , которое получено из G_1 с помощью выбора вершины c в качестве корня и ориентации всех ребер в направлении "от корня".



Остов связного графа

Остовом (каркасом) связного графа G называется любой его подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом (говорят: «покрывающим его деревом»).



Различные остовы графа $K_{3,3}$

