Теория вероятности

Независимые повторные испытания

Содержание презентации

Независимые повторные испытания.

- Если производится несколько испытаний, причем вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют независимыми повторными испытаниями.

- В разных независимых испытаниях событие A может иметь либо различные вероятности, либо одну и ту же вероятность. Будем далее рассматривать лишь такие независимые испытания, в которых событие A имеет одну и ту же вероятность.

Независимые повторные испытания.

Примеры:

1. Подбрасываем игральный кубик n раз. Выпадение числа очков от 1 до 6 происходит с вероятностью 1/6 в каждом из испытаний;
2. Приобретаем n лотерейных билетов. Для каждого из лотерейных билетов вероятность выигрыша есть величина постоянная;
3. Подбрасывается n раз монета. Выпадение орла или решки происходит с вероятностью ½ в каждом испытании.

Пример 1 и примеры 2,3 отличаются друг от друга тем, что в первом примере возможно появление 6-ти событий, а во втором и третьем – появление только 2-х событий: выиграл - не выиграл, орел – решка, т.е. условно можно назвать такие исходы «успех – неуспех». Такие испытания называются **испытаниями Бернулли**.

Независимые повторные испытания.

Независимые повторные испытания, в каждом из которых возможно появление события А (успех) с постоянной вероятностью p или непоявление события А (неуспех) с постоянной вероятностью q=1-p, называются **испытаниями Бернулли** или **схемой Бернулли.**

Швейцарский математик
Якоб Бернулли (1654-1705).

Независимые повторные испытания

Формула Бернулли

Формула Бернулли.

Пусть производится n испытаний Бернулли. Вероятность того, что в этих испытаниях событие А произойдет ровно m раз можно найти по **формуле Бернулли:**

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

n – число испытаний

p – вероятность появления события А в одном испытании

q - вероятность непоявления события А в одном испытании

$P_n(m)$ – вероятность того, что событие А появится ровно m раз в n испытаниях

Формула Бернулли.

Пример. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжении суток не превысит установленной нормы, равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшую неделю расход электроэнергии в течении четырех суток не превысит норму.

Решение. Обозначим А- расход не превысит норму.

По условию n = 7, m = 4, p = P(A) = 0.75.

По формуле Бернулли: $$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

$$P_7(4) = C_7^4 \cdot p^4 \cdot q^{7-4} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} \cdot 0{,}75^4 \cdot 0{,}25^3 = 35 \cdot 0{,}316 \cdot 0{,}0156 \approx 0{,}172$$

Ответ: вероятность того, что в ближайшую неделю расход электроэнергии в течении четырех суток не превысит норму равна 0,1969

Формула Бернулли

Пример. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть одному из них 2 партии из 4-х или 3 партии из 6-ти?

Решение.

1) Найдем вероятность выиграть одному из них 2 партии из 4-х: n=4, m=2, p=1/2, q=1/2. По формуле Бернулли:

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^{4-2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

2) Найдем вероятность выиграть одному из них 3 партии из 6-ти: n=6, m=4, p=1/2, q=1/2. По формуле Бернулли:

$$P_6(3) = C_6^3 \cdot p^3 \cdot q^{6-3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 20 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{16}$$

Сравним полученные результаты: т.к. 3/8 > 5/16, то вероятнее выиграть одному из них 2 партии из 4-х.

Формула Бернулли

Пример. Исследование инкубации яиц яичного кросса Беларусь-9 показало, что цыплята выводятся в среднем из 70% заложенных в инкубатор яиц. Из общего количества заложенных в инкубатор яиц случайным образом отобраны и помечены 6. Найти вероятность того, что из помеченных яиц выведутся:

a) менее трех цыплят $P_6(m < 3)$; (0,07047)

b) более трех цыплят $P_6(m > 3)$; (0,74431)

c) не менее трех цыплят $P_6(m \geq 3)$; (0,92953)

d) не более трех цыплят $P_6(m \leq 3)$; (0,25569)

Независимые повторные испытания.

Локальная теорема Лапласа.

Локальная теорема Лапласа.

Пользоваться формулой Бернулли при больших значениях n достаточно трудно, так как формула требует выполнения действий над громадными числами. Например, если

n = 50, m = 30, p=0,1, то для отыскания вероятности $P_{30}(50)$ надо вычислить выражение

$$P_{50}(30) = C_{50}^{30} \cdot 0{,}1^{30} \cdot 0{,}9^{20}$$

Нельзя ли вычислить интересующую нас вероятность, не прибегая к формуле Бернулли? Оказывается, можно. **Локальная теорема Лапласа** и дает асимптотическую формулу, которая позволяет приближенно найти вероятность появления события ровно m раз в n испытаниях, если число испытаний достаточно велико.

Локальная теорема Лапласа.

Лаплас Пьер Симон

(23.03.1749 - 05.03.1827), Нормандия

"То, что мы знаем, так ничтожно по сравнению с тем, что мы не знаем".

Локальная теорема Лапласа.

Локальная теорема Лапласа. Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно m раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n)

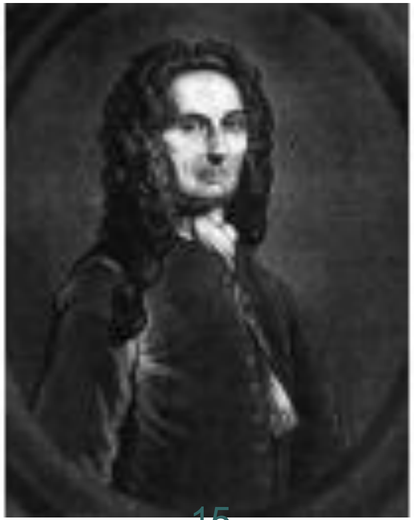
$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}},$$ где

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, \qquad x = \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

Локальная теорема Лапласа.

Замечание. Для частного случая, а именно для $p=1/2$, асимптотическая формула была найдена в 1730 г. Муавром.

В 1783 г. Лаплас обобщил формулу Муавра для произвольного p, отличного от 0 и 1. Поэтому теорему, о которой здесь идет речь, иногда называют теоремой Муавра—Лапласа.



Абрахам де Муавр

(26.05.1667 – 27.11.1754), Франция.

По легенде, Муавр точно предсказал день собственной смерти. Обнаружив, что продолжительность его сна стала увеличиваться в арифметической прогрессии, он легко вычислил, когда она достигнет 24 часов, и, как всегда, не ошибся.

Локальная теорема Лапласа.

Для упрощения расчетов, связанных с применением формулы

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}},$$

составлена таблица значений функции $\varphi(x)$.

Пользуясь этой таблицей, необходимо иметь в виду **свойства функции** $\varphi(x)$:

1. Функция $\varphi(x)$ является четной, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$
2. Функция $\varphi(x)$ — монотонно убывающая при положительных значениях x, причем при $x \to \infty,\ \varphi(x) \to 0.$

(Практически можно считать, что уже при x > 5 $\varphi(x) \approx 0$).

Теорему Муавра-Лапласа применяют при n·p·q ≥ 10.

Локальная теорема Лапласа. Алгоритм решения

1. Находим n·p·q. Если n·p·q ≥ 10, то можно применять теорему Муавра-Лапласа.
2. Вычисляем x по формуле $$x = \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$
3. По таблице находим $$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}},$$
4. Вычисляем вероятность $$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}},$$

Локальная теорема Лапласа.

Пример. Вероятность выхода из строя кодового замка в течение месяца равна 2%. Какова вероятность того, что в партии из 600 замков, установленных фирмой, 20 замков выйдут из строя в течение месяца.

Решение. По условию n=600, m=20, p=0.02, q=0.98. Нужно найти $P_{600}(20)$. n·p·q=600·0.02·0.98=11.76, следовательно, локальную теорему Лапласа можно применять.

1. $\sqrt{npq} = \sqrt{11.76} \approx 3.43$;

2. $x = \dfrac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \dfrac{20 - 600 \cdot 0{,}02}{3{,}43} \approx 2{,}33$;

3. $\varphi(x) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$, $\Rightarrow$ по таблице найдем $\varphi(2{,}33) \approx 0{,}026$;

4. $P_{600}(20) = \dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} \approx \dfrac{0.026}{3.43} \approx 0.00758$.

Локальная теорема Лапласа.

Задача. Найти вероятность того, что событие А наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

(*npq*=64, *x*=0, *φ*(0) ≈ 0,3989, $P_{400}(80)=\dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}\approx\dfrac{0{,}3989}{8}\approx 0.04986$)

Задача. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле p = 0,75. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах стрелок поразит мишень 8 раз.

(*npq*=1.875, *x*=0.36, *φ*(0.36) ≈ 0,3739, $P_{10}(8)=\dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}\approx\dfrac{0{,}3739}{1.37}\approx 0.2729$)

Если решать эту задачу с помощью формулы Бернулли, то результат будет несколько иным: $P_{10}(8)\approx 0{,}282$. Такое расхождение ответов объясняется тем, что в настоящем примере n имеет малое значение (формула Лапласа дает достаточно хорошие приближения лишь при достаточно больших значениях n).

Локальная теорема Лапласа.

Пример. В некоторой местности из каждых 100 семей 80 имеют холодильники. Найти вероятность того, что из 400 семей 300 имеют холодильники.

Решение. Вероятность того, что семья имеет холодильник, равна $p = 80/100 = 0,8$; $n = 400$, $m = 300$, $q = 0,2$.

1. $npq = 400 \cdot 0,8 \cdot (1—0,8) = 64 > 10$, следовательно можно применять локальную формулу Муавра—Лапласа.
2. $\sqrt{npq} = \sqrt{64} = 8$;
3. $x = \dfrac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \dfrac{300 - 400 \cdot 0,8}{8} \approx -2,5$;
4. По таблице найдем $\varphi(-2,5) = \varphi(2,5) \approx 0,0175$;
5. $P_{400}(300) = \dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} \approx \dfrac{0,0175}{8} \approx 0.0022$.

Локальная теорема Лапласа.

Пусть в условиях предыдущего примера необходимо найти вероятность того, что от 300 до 360 семей (включительно) имеют холодильники. В этом случае по теореме сложения вероятность искомого события:

$$P_{400}(300 \le m \le 360) = P_{400}(300) + P_{400}(301) + \cdots + P_{400}(360)$$

В принципе вычислить каждое слагаемое можно по локальной формуле Муавра—Лапласа, но большое количество слагаемых делает расчет весьма громоздким. В таких случаях используется **интегральная теорема Лапласа**.

Независимые повторные испытания.

Формула Пуассона.

Формула Пуассона.

- Если число независимых испытаний *n* достаточно велико, а вероятность появления события в каждом испытании отлична от 0 и 1 и мала (p – близка к 0), так что $n \cdot p \le 10$, то для вычисления вероятности появления события *k* раз применяют **формулу Пуассона.**

Пуассон Симеон
(21.06.1781 - 25.04.1840)
Французский учёный, член Парижской АН, почётный член Петербургской АН.
Труды Пуассона относятся к теоретической и небесной механике, математике и математической физике.

Формула Пуассона.

Теорема. Если вероятность p наступления события А в каждом испытании постоянно близка к нулю, число независимых испытаний n достаточно велико, то вероятность того, что в n независимых испытаниях событие А наступит m раз приближенно равна

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}, \quad \text{где} \quad \lambda = n \cdot p$$

Формулу Пуассона можно применять при $\lambda \leq 10$.

Существуют статистико-математические таблицы для распределения Пуассона.

Формула Пуассона.

Пример. На факультете насчитывается 1825 студентов. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно четырех студентов факультета?

Решение. Вероятность того, что день рождения студента 1 сентября, равна p = 1/365. Так как p = 1/365 — мала, n = 1825 — велико и

λ = np = 1825 • (1/365) = 5 < 10, то применяем формулу Пуассона:

$$P_{1825}(4) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{5^4}{4!} \cdot e^{-5} = \frac{625}{24 \cdot e^5} = \frac{625}{24 \cdot 2.7^5} \approx \frac{625}{3443.7377} \approx 0.18$$

По таблицам можно точнее и быстрее найти P(m,λ). Так для данного примера $P_{1825}(4) = P(m, \lambda) = P(4,5) \approx 0.17547$.

Ответ: вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно четырех студентов факультета равна 0,17547.

Независимые повторные испытания. Решение задач.

Задача 3. По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое второе малое предприятие региона имеет нарушение финансовой дисциплины. Найти вероятность того, что из 1000 зарегистрированных в регионе малых предприятий имеют нарушения финансовой дисциплины:
а) 480 предприятий; б) наивероятнейшее число предприятий;
в) не менее 480; г) от 480 до 520.

Задача 4. Вероятность малому предприятию быть банкротом за время t равна 0,2. Найти вероятность того, что из шести малых предприятий за время t сохранятся: а) два; б) более двух.

Задача 5. В банк отправлено 4000 пакетов денежных знаков. Вероятность того, что пакет содержит недостаточное или избыточное число денежных знаков, равна 0,0001. Найти вероятность того, что при проверке будет обнаружено: а) три ошибочно укомплектованных пакета; б) не более трех пакетов.

Домашняя работа

1) С помощью зенитной установки обстреливают мишень. Вероятность попадания в цель составляет 0,7. Какова вероятность того, что из 80 произведенных на штабных учениях выстрелов достиг нут цели: а) 75 выстрелов; б) не менее 75 выстрелов; в) менее 75 выстрелов; г) не более 75 выстрелов; д) более 75 выстрелов; е) все выстрелы?
2) Известно, что вероятность выпуска сверла повышенной хруп кости (брак) равна 0,02. Сверла укладывают в коробки по 100 штук. Какое наименьшее количество сверл нужно класть в коробку для того, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, в ней было не ме нее 1000 исправных?
3) Сколько изюма в среднем должны содержать калорийные булочки для того, чтобы вероятность иметь в булочке хотя бы одну изюмину была не менее 0,99?