Анализ систем управления
Задача стабилизации

В целом можно выделить четыре основных требования:

- **точность** – в установившемся режиме система должна поддерживать заданное значение выхода системы, причем ошибка (разница между заданным и фактическим значением) не должна превышать допустимую;
- **устойчивость** – система должна оставаться устойчивой на всех режимах, не должна идти «вразнос» (корабль не должен идти по кругу при смене курса);
- **качество переходных процессов** – при смене заданного значения система должна переходить в нужное состояние по возможности быстро и плавно;
- **робастность** – система должна сохранять устойчивость и приемлемое качество даже в том случае, если динамика объекта и свойства внешних возмущений немного отличаются от тех, что использовались при проектировании.

Анализ систем управления
Процесс на выходе

При нулевых начальных условиях изображение выхода равно $Y(s) = W(s)\,X(s)$. Предположим, что $W(s)$ и $X(s)$ – рациональные функции, то есть их можно представить в виде отношения полиномов

$$W(s) = \frac{n_W(s)}{\Delta(s)}, \quad X(s) = \frac{n_X(s)}{d_X(s)}.$$

Для простоты будем считать, что полиномы $\Delta(s)$ и $d_X(s)$ имеют только простые вещественные корни, так что

$$\Delta(s) = (s-\alpha_1)(s-\alpha_2)...(s-\alpha_N), \quad d_X(s) = (s-\beta_1)(s-\beta_2)...(s-\beta_M),$$

причем общих корней у них нет'

Числа α_i $(i = 1,...N)$ и β_j $(j = 1,...M)$ называются *полюсами* функций $W(s)$ и $X(s)$ соответственно.

Анализ систем управления
Процесс на выходе

При этих условиях произведение $Y(s) = W(s)\,X(s)$ можно разложить на простые дроби

$$Y(s) = \frac{a_1}{s-\alpha_1} + \frac{a_2}{s-\alpha_2} + \ldots + \frac{a_N}{s-\alpha_N} + \frac{b_1}{s-\beta_1} + \frac{b_2}{s-\beta_2} + \ldots + \frac{b_M}{s-\beta_M}.$$

Здесь $a_i\ (i=1,\ldots N)$ и $b_j\ (j=1,\ldots M)$ – постоянные, которые в данном случае определяются

формулам:

$$a_i = W(s)X(s)(s-\alpha_i)\Big|_{s=\alpha_i}, \quad b_j = W(s)X(s)(s-\beta_j)\Big|_{s=\beta_j}.$$

Далее мы предположим, что произведение $W(s)\,X(s)$ несократимо. В этом случае все числа

и b_j не равны нулю.

Анализ систем управления
Процесс на выходе

Чтобы найти выход $y(t)$, нужно вычислить обратное преобразование Лапласа для $Y(s)$.

$$y(t) = a_1 e^{\alpha_1 t} + a_2 e^{\alpha_2 t} + \ldots + a_N e^{\alpha_N t} + b_1 e^{\beta_1 t} + b_2 e^{\beta_2 t} + \ldots + b_M e^{\beta_M t}. \qquad (44)$$

Вспомним, что функция $e^{\lambda t}$ при $t \to \infty$ стремится к нулю, если $\lambda < 0$; остается постоянной (равной 1) при $\lambda = 0$ и уходит в бесконечность при $\lambda > 0$. Поэтому выражение (44) позволяет сделать следующие выводы:

- сигнал на выходе системы зависит как от свойств передаточной функции системы, так и от входного сигнала;
- для того, чтобы переходный процесс затухал (функция $y(t)$ стремилась к нулю), все числа α_i ($i = 1,\ldots N$) и β_i ($i = 1,\ldots M$) должны быть отрицательными (иметь отрицательные вещественные части);
- если один из полюсов $W(s)$ или $X(s)$ равен нулю, $y(t)$ может иметь постоянную (незатухающую) составляющую;
- если хотя бы один из полюсов $W(s)$ или $X(s)$ больше нуля (имеет положительную вещественную часть), выход системы неограниченно растет.

Анализ систем управления Процесс на выходе

Еще раз отметим, что мы предполагали несократимость произведения $W(s)\,X(s)$, иначе некоторые коэффициенты a_i и/или b_j могут оказаться нулевыми и соответствующие экспоненты «исчезают» из формулы (44). Тогда, например, может оказаться, что выход не «уходит в бесконечность» даже если $W(s)$ или $X(s)$ имеет полюс с положительной вещественной частью (и он сократился в произведении $W(s)\,X(s)$).

Как следует из (44), часть показателей экспонент (числа α_i $(i=1,...N)$) полностью определяются свойствами системы – это корни полинома $\Delta(s)$. Если среди них есть числа с положительной вещественной частью, сигнал выхода будет неограниченно возрастать при *любом входе*, для которого произведение $W(s)\,X(s)$ несократимо. В этом случае говорят, что *система неустойчива*, а соответствующие полюса также называют неустойчивыми. Полином $\Delta(s)$ называется **характеристическим полиномом**, так как расположение его корней определяет устойчивость (или неустойчивость) системы

Анализ систем управления
Точность

Точность системы обычно оценивается для одного из эталонных входных сигналов. Это может быть, например, единичный скачок

$$x(t) = \mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}, \quad X(s) = \frac{1}{s}$$

или линейно возрастающий сигнал

$$x(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ t, t \geq 0 \end{cases}, \quad X(s) = \frac{1}{s^2}$$

или гармонический сигнал с частотой ω:

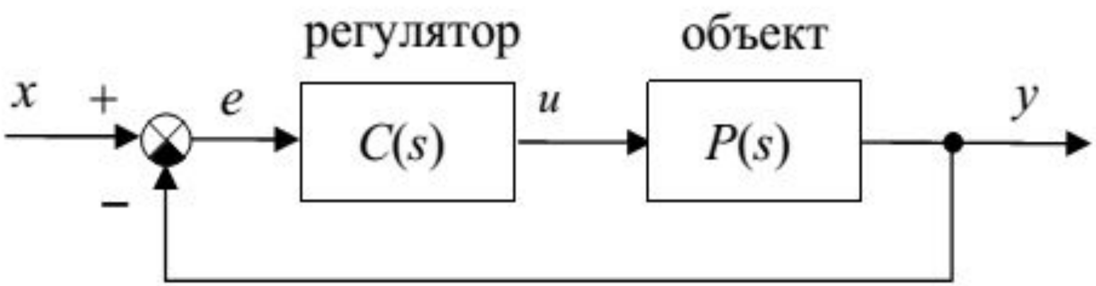
$$x(t) = \sin \omega t, \quad X(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Точность системы в установившемся режиме определяется ошибкой $e(t)$ или ее изображением $E(s)$. Для ее исследования используют *передаточную функцию по ошибке* $W_e(s)$, которая связывает изображения ошибки и входного сигнала:

$$E(s) = W_e(s)\, X(s).$$

Анализ систем управления
Точность

Рассмотрим контур управления, состоящий из регулятора и объекта:



Представим передаточные функции $C(s)$ и $P(s)$, а также изображение входа $X(s)$ в виде отношения полиномов

$$C(s) = \frac{n_C(s)}{d_C(s)}, \quad P(s) = \frac{n(s)}{d(s)}, \quad X(s) = \frac{n_X(s)}{d_X(s)}.$$

В данном случае передаточная функция по ошибке равна

$$W_e(s) = \frac{1}{1 + C(s)\,P(s)} = \frac{d_C(s)\,d(s)}{\Delta(s)},$$

где $\Delta(s) = d_C(s)\,d(s) + n_C(s)\,n(s)$ – *характеристический полином* замкнутой системы.

Анализ систем управления
Точность

Рассмотрим реакцию системы на единичный ступенчатый входной сигнал, изображение которого равно $X(s) = 1/s$.

сигнал ошибки определяется полюсами передаточной функции $W_e(s)$ (то есть корнями характеристического полинома $\Delta(s)$) и полюсами изображения $X(s)$. На практике все полюса $W_e(s)$ должны иметь отрицательные вещественные части, иначе система будет неустойчивой (подробнее см. в разд. 6.4). Поэтому нулевых полюсов у функции $W_e(s)$ быть не может. Тогда

$$W_e(s)X(s) = \frac{1}{1 + C(s)\,P(s)} \cdot \frac{1}{s} = Y_0(s) + \frac{b}{s}.$$

Здесь изображение $Y_0(s)$ имеет полюса только с отрицательной вещественной частью, а постоянная b рассчитывается по формуле разложения на простые дроби:

$$b = \frac{1}{1 + C(0)\,P(0)} = \frac{d_C(0)\,d(0)}{\Delta(0)}.$$

Анализ систем управления Точность

Заметим, что для того, чтобы сделать нулевой статическую ошибку, достаточно обеспечить $d_C(0)=0$ (то есть регулятор должен содержать интегратор) или $d(0)=0$ (объект содержит интегратор).

Этот результат можно обобщить для любых незатухающих входных сигналов, изображения которых имеют полюса на мнимой оси (в точке $s=0$ или в точках $s=\pm j\omega$). Для того, чтобы ошибка стремилась к нулю при $t\to\infty$ необходимо, чтобы эти полюса сократились в произведении

$$W_e(s)X(s)=\frac{d_C(s)\,d(s)}{\Delta(s)}\cdot\frac{n_X(s)}{d_X(s)}.$$

А это, в свою очередь, возможно только тогда, когда они являются корнями полинома $d_C(s)\,d(s)$, то есть, *внутри* системы есть модель входного сигнала. Этот принцип называется **принципом внутренней модели**.

Анализ систем управления
Точность

Например, для точного отслеживания ступенчатого сигнала нужно, чтобы объект или регулятор содержали интегрирующее звено (с передаточной функцией $1/s$). Тогда произведение $d_C(s)\,d(s)$ имеет сомножитель s, и полюс $X(s)$ в точке $s=0$ сократится в произведении $W_e(s)\,X(s)$. Таким образом, если передаточная функция разомкнутого контура $C(s)P(s)$ содержит множитель s в знаменателе, обеспечивается нулевая ошибка слежения за постоянным сигналом (нулевая статическая ошибка). Поэтому такую систему называют **астатической**.

Анализ систем управления
Точность

Для отслеживания *линейно возрастающего сигнала* в контуре должно быть уже два интегратора (нужно сократить двойной полюс $X(s)$ в точке $s=0$). Такая система обладает *астатизмом второго порядка*. В общем случае система, в которой

$$C(s)P(s)=\frac{1}{s^{\nu}}G(s),$$

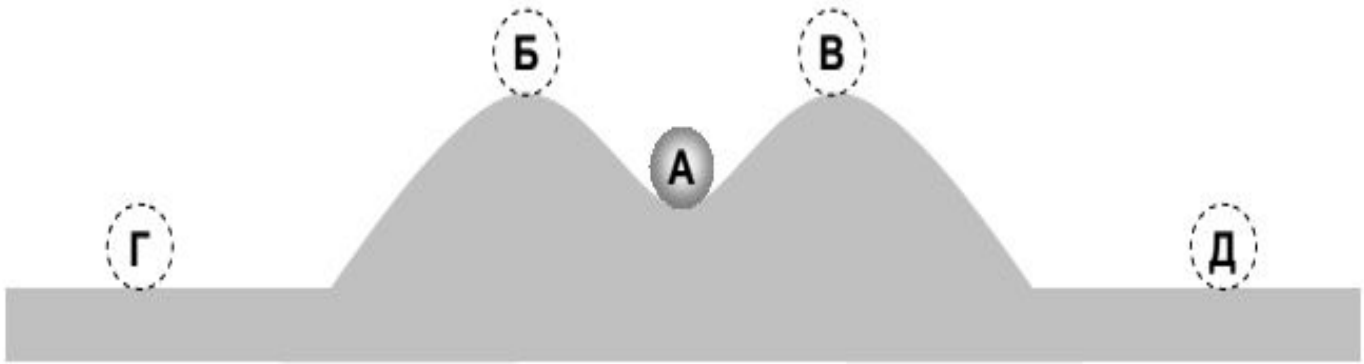
где $\nu>0$ – натуральное число и функция $G(s)$ не имеет нулей и полюсов в точке $s=0$, называется *астатической системой* ν*-ого порядка*. Такая система в установившемся режиме без ошибки отслеживает сигнал вида

$$x(t)=x_0+x_1t+x_2t^2+\ldots+x_{\nu-1}t^{\nu-1}$$

при любых значениях коэффициентов $x_i\,(i=0,\ldots\nu-1)$.

Анализ систем управления Устойчивость

Термин «устойчивость» используется в численных методах, механике, экономике, социологии, психологии. Во всех этих науках имеют в виду, что устойчивая система возвращается в состояние равновесия, если какая-то сила выведет ее из этого состояния. Шарик на рисунке находится в *устойчивом* равновесии в положении А – если немного сдвинуть его с места, он скатится обратно в ямку.



Однако мы можем заметить, что если шарик *сильно* отклонить от равновесия, он может свалиться через горку вбок, то есть устойчивость нарушится.

В положениях Б и В шарик также находится в положении равновесия, но оно *неустойчиво*, так как при малейшем сдвиге в сторону шарик скатывается с вершины.

В положениях Г и Д равновесие шарика *нейтральное* – при небольшом смещении он остается в новом положении. При этом говорят, что система *нейтрально устойчива*, то есть находится на границе устойчивости.

Можно показать, что система «шарик-горка» – **нелинейная**. Как мы увидели, для нее

- устойчивость – не свойство системы, а свойство некоторого положения равновесия;
- может быть несколько положений равновесия, из них некоторые – устойчивые, а некоторые – нет;
- положение равновесия может быть устойчиво при малых отклонениях (система устойчива «в малом») и неустойчиво при больших («в большом»).

Устойчивость «вход-выход»

Обычно для инженеров практиков в первую очередь важно, чтобы система не «пошла вразнос», то есть, чтобы управляемая величина не росла неограниченно при всех допустимых входных сигналах. Если это так, говорят, что система обладает *устойчивостью «вход-выход»* (при ограниченном входе выход также ограничен). Заметим, что при этом нас не интересует, как меняются внутренние переменные объекта, важен только вход и выход.

Рассмотрим ванну, которая наполняется водой из крана. Модель этой системы – интегрирующее звено. При постоянном (ограниченном по величине!) входном потоке уровень воды в ванне будет неограниченно увеличиваться (пока вода не польется через край), поэтому такая системе не обладает устойчивостью «вход-выход».

Техническая» устойчивость

В отличие от устойчивости «вход-выход», понятие «техническая устойчивость» относится к автономной системе, у которой все входные сигналы равны нулю.

Положением равновесия называют состояние системы, которая находится в покое, то есть, сигнал выхода $y(t)$ – постоянная величина, и все его производные равны нулю.

Систему выводят из положения равновесия и убирают все возмущения. Если при этом с течением времени (при $t \to \infty$) система возвращается в положение равновесия, она называется *устойчивой*. Если выходная координата остается ограниченной (не уходит в бесконечность), система называется *нейтрально устойчивой*, а если выход становится бесконечным – *неустойчивой*.

Если вернуться к примеру с ванной, становится понятно, что эта система – нейтрально устойчива, потому что уровень воды остается постоянным, когда мы перекроем кран. С одной стороны, уровень воды не возвращается к предыдущему значению, а с другой – не растет бесконечно (система не является неустойчивой).

Внутренняя устойчивость

Устойчивость определяется для некоторого положения равновесия. Для нелинейной системы может быть несколько положений равновесия, причем некоторые из них могут быть устойчивы, а некоторые – нет. В положении равновесия все производные равны нулю, то есть $f(x^*,t)=0$, где x^* – соответствующий вектор состояния

Нестрого говоря, *устойчивость* означает, что все движения $x(t)$, которые начинаются близко от положения равновесия x^*, при всех t остаются в некоторой окрестности x^*.

Лучше, конечно, если система не просто устойчива, а еще и возвращается в положение равновесия, то есть, $x(t)$ стремится к x^* при $t\to\infty$. В этом случае говорят об *асимптотической устойчивости*.

Анализ систем управления Устойчивость по Ляпунову

Формальное определение внутренней устойчивости было введено в работах А.М. Ляпунова[9], поэтому такое понятие устойчивости принято называть *устойчивостью по Ляпунову*.

Для простоты рассмотрим систему первого порядка, с одной переменной состояния $x(t)$. Система называется устойчивой по Ляпунову в положении равновесия x^*, если при начальном отклонении от положения равновесия x^* не более, чем на δ, траектория движения отклоняется от x^* не более, чем на ε, причем для каждого ε можно найти соответствующее ему $\delta(\varepsilon)$:

$$\left| x_0 - x^* \right| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| x(t) - x^* \right| < \varepsilon \text{ при всех } t > 0.$$

Фактически это означает, что чем меньше начальное отклонение, тем меньше траектория движения отклоняется от положения равновесия.

Если кроме того вектор состояния стремится к положению равновесия, то есть,

$$\left| x(t) - x^* \right| \to 0 \text{ при } t \to \infty,$$

система называется *асимптотически устойчивой* в положении равновесия x^*.

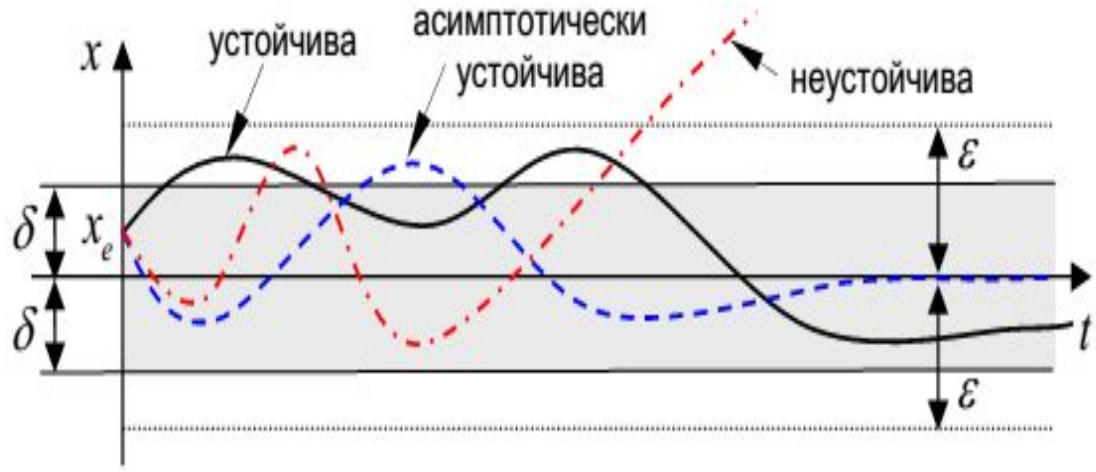
Анализ систем управления Устойчивость по Ляпунову

Очевидно, что асимптотическая устойчивость – более сильное требование. Положения равновесия, которые устойчивы по Ляпунову, но не асимптотически устойчивы, иногда называются *нейтрально устойчивыми* (маятник без трения, ванна с водой).

Положение равновесия *неустойчиво*, если для него не выполняется условие устойчивости Ляпунова. Это значит, что существует такое $\varepsilon > 0$, что траектория $x(t)$ выходит за границы области $\left| x(t) - x^* \right| < \varepsilon$ при сколь угодно малом отклонении начального состояния x_0 от положения равновесия x^*. Например, система переходит в *другое* положение равновесия, или $x(t)$ неограниченно возрастает.

Анализ систем управления Устойчивость по Ляпунову

На следующем рисунке показаны движения устойчивой, асимптотически устойчивой и неустойчивой систем первого порядка (с одной координатой $x(t)$).



Анализ систем управления
Фазовая плоскость

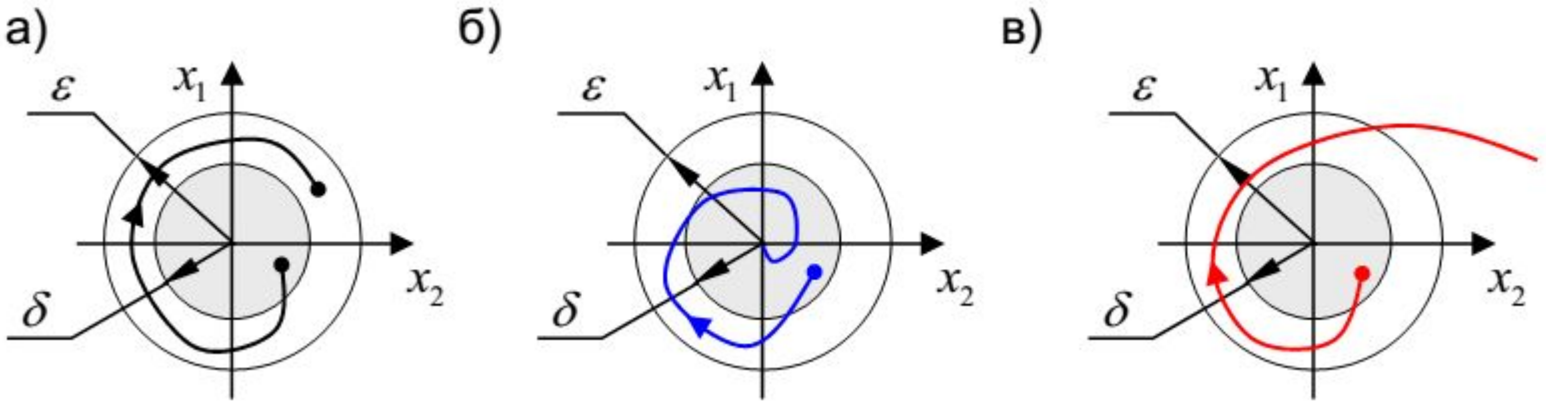
Если вектор состояния содержит несколько переменных, для оценки разности векторов $x_0 - x^*$ и $x(t) - x^*$ вместо модуля используют евклидову норму (корень из суммы квадратов отклонений по каждой координате). Например, для системы второго порядка

$$\left\| x(t) - x_e \right\| = \sqrt{(x_1(t) - x_1^*)^2 + (x_1(t) - x_2^*)^2} \,,$$

где x_1^* и x_2^* – компоненты вектора x^*.

Траекторию движения систем второго порядка обычно изображают на *фазовой плоскости*, где по одной оси откладывается $x_1(t)$, а по другой – $x_2(t)$. На следующем рисунке показаны движения устойчивой, асимптотически устойчивой и неустойчивой систем. Для простоты предполагается, что положение равновесия – это начало координат, где $x_1 = x_2 = 0$.

Анализ систем управления
Фазовая плоскость



устойчива

асимптотически устойчива

неустойчива

Анализ систем управления
Устойчивость линейных систем

- автономная линейная система (на которую не действуют внешние силы) может иметь единственное положение равновесия (в котором все сигналы равны нулю) или бесконечно много положений равновесия (шарик на плоской поверхности);
- устойчивость – это свойство линейной системы, а не отдельного положения равновесия: или все ее движения устойчивы (асимптотически устойчивы), или все неустойчивы;
- асимптотическая устойчивость линейной системы «в малом» сразу означает ее устойчивость «в целом», то есть, при любых отклонениях от положения равновесия;
- асимптотически устойчивая система также обладает устойчивостью «вход-выход», а просто устойчивая (нейтрально устойчивая, не асимптотически устойчивая) – нет.

Анализ систем управления Устойчивость линейных систем

Для того, чтобы получить условия устойчивости, рассмотрим уравнение движения линейной системы, на которую не действуют возмущения. Пусть $W(s)$ – ее передаточная функция. Будем считать, что она имеет только простые (не кратные) полюса $\alpha_i\ (i=1,\dots,N)$ (корни знаменателя):

$$W(s)=\frac{n_W(s)}{\Delta(s)}=\frac{n_W(s)}{(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\dots(s-\alpha_N)},$$

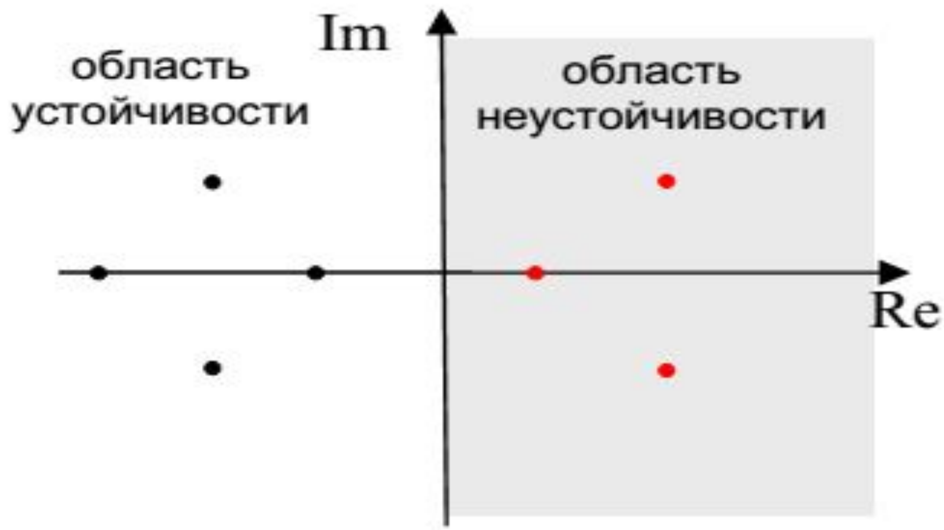
где $n_w(s)$ и $\Delta(s)$ – полиномы. Из теории линейных дифференциальных уравнений известно, что при отсутствии возмущений выход такой системы можно представить в виде:

$$y(t)=a_1e^{\alpha_1 t}+a_2e^{\alpha_2 t}+\dots+a_Ne^{\alpha_N t},$$

где $a_i\ (i=1,\dots,N)$ – постоянные, которые определяются начальными условиями. Таким образом, процесс $y(t)$ затухает при любых начальных условиях тогда и только тогда, когда все корни $\alpha_i\ (i=1,\dots,N)$ имеют *отрицательные вещественные части*. В этом случае система *асимптотически устойчива*.

Анализ систем управления
Устойчивость линейных систем

Поскольку устойчивость линейной системы определяют корни полинома $\Delta(s)$ – знаменателя передаточной функции $W(s)$, этот полином называется *характеристическим полиномом*



Так как все коэффициенты полинома $\Delta(s)$ – вещественные, комплексные корни всегда будут парными, то есть,

вместе с корнем $\alpha + j\beta$ всегда будет присутствовать $\alpha - j\beta$.

Критерии устойчивости

Итак, для исследования устойчивости линейной системы достаточно найти корни ее характеристического полинома. Если все корни имеют отрицательные вещественные части (находятся в левой полуплоскости, слева от мнимой оси), такой полином называется *устойчивым*, потому что соответствующая линейная система устойчива. Полиномы, имеющие хотя бы один корень с положительной вещественной частью (в правой полуплоскости) называются *неустойчивыми*.

На ранней стадии развития теории управления актуальной была задача определения устойчивости полинома без вычисления его корней. Конечно, сейчас легко найти корни характеристического полинома с помощью компьютерных программ, однако такой подход дает нам только количественные (а не качественные) результаты и не позволяет исследовать устойчивость теоретически, например, определять границы областей устойчивости.

Критерии Устойчивости Критерий Гурвица

Существует несколько алгоритмов, позволяющих проверить устойчивость полинома

$$\Delta(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n ,$$

не вычисляя его корни. Прежде всего, для устойчивости все коэффициенты $a_i \, (i = 0, \ldots, n)$ должны быть одного знака, обычно считают, что они положительные. Это *необходимое условие устойчивости полинома.* Однако при $n > 2$ это условие недостаточно, если полином имеет комплексно-сопряженные корни. Поэтому были разработаны *необходимые и достаточные* условия (критерии) устойчивости полиномов.

Критерии Устойчивости Критерий Гурвица

Один из самых известных критериев – **критерий Гурвица** – использует матрицу H_n размером $n \times n$, составленную из коэффициентов полинома $\Delta(s)$ следующим образом:

- первая строка содержит коэффициенты $a_1, a_3, a_5, \ldots$ (все с нечетными номерами), оставшиеся элементы заполняются нулями;
- вторая строка содержит коэффициенты $a_0, a_2, a_4, \ldots$ (все с четными номерами);
- третья и четвертая строка получаются сдвигом первой и второй строк на 1 позицию вправо, и т.д.

Критерии Устойчивости
Критерий Гурвица

Например, для полинома пятого порядка ($n = 5$) эта матрица имеет вид

$$H_5 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{bmatrix} \quad (a_0 > 0)$$

Критерий Гурвица. Все корни полинома $\Delta(s)$ имеют отрицательные вещественные части тогда и только тогда, когда все n главных миноров матрицы H_n (*определителей Гурвица*) положительны.

Критерии Устойчивости
Критерий Гурвица

Таким образом, условия устойчивости сводятся к нескольким неравенствам. Это очень удобно для систем низкого порядка. Например, для $n = 2$ необходимое и достаточное условие устойчивости – положительность всех коэффициентов полинома. Для $n = 3$ характеристический полином имеет вид $\Delta(s) = a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$, поэтому условия Гурвица определяются матрицей

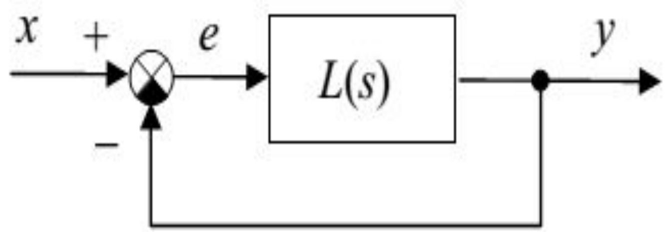
$$H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} \quad (a_0 > 0).$$

Полином устойчив, если все коэффициенты положительны и

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

Критерии устойчивости Критерий Найквиста

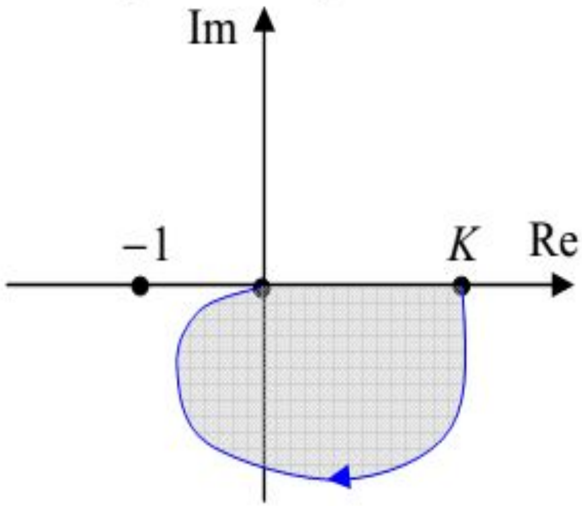
Критерий Найквиста позволяет определить устойчивость замкнутой системы, построив частотную характеристику *разомкнутой* системы. Пусть $L(s)$ – передаточная функция разомкнутой системы, а $L(j\omega)$ – ее частотная характеристика.

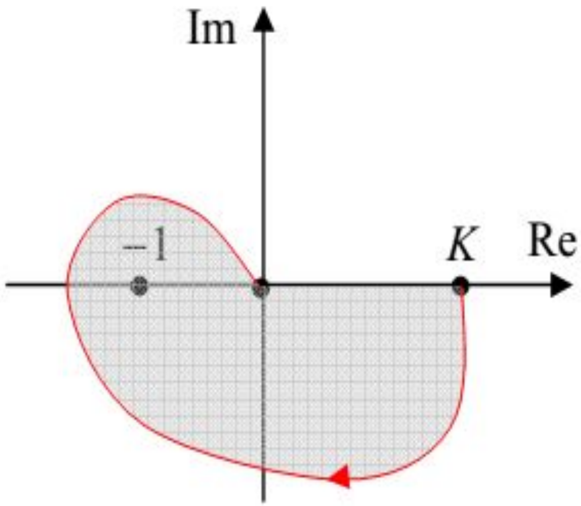


Для простоты сначала будем считать, что разомкнутая система устойчива и не содержит интегрирующих звеньев, то есть $L(0) = K \neq \infty$, где K – некоторое число.

Критерии устойчивости
Критерий Найквиста

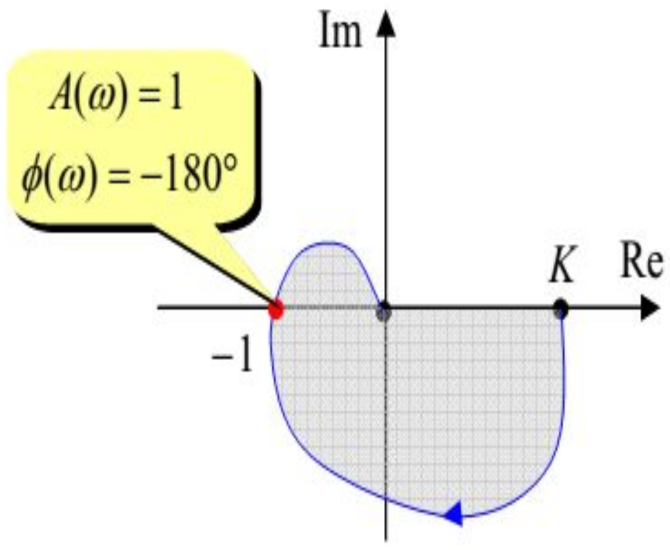
Для каждой частоты ω значение $L(j\omega)$ – это комплексное число, которое можно изобразить точкой на комплексной плоскости. При изменении частоты от 0 до ∞ из этих точек складывается *годограф Найквиста* – некоторая кривая, которая начинается в точке $(K;0)$ на вещественной оси и заканчивается в начале координат (если $L(s)$ – строго правильная функция, то есть степень ее числителя меньше степени знаменателя). Можно доказать, что система устойчива тогда и только тогда, когда годограф $L(j\omega)$ не охватывает точку $(-1;0)$. На рисунке слева годограф не охватывает эту точку (и замкнутая система устойчива), а на рисунке справа – охватывает (система неустойчива).





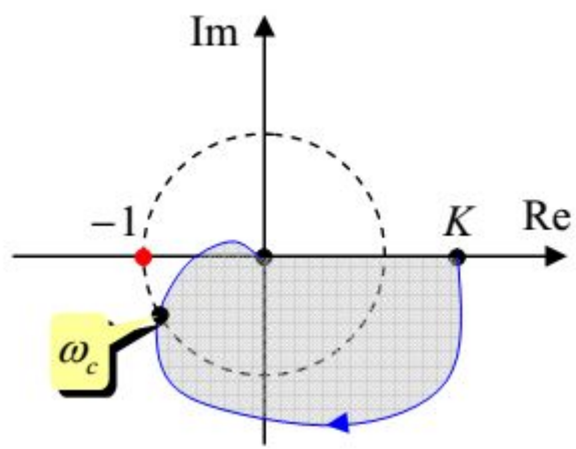
Критерии устойчивости
Критерий Найквиста

Выражение «система находится на границе устойчивости» означает, что частотная характеристика проходит через точку $(-1;0)$. В этом случае для некоторой частоты ω мы имеем $A(\omega)=1$ и $\phi(\omega)=-180°$. Это говорит о том, что после прохождения контура величина сигнала меняет знак, сохраняя абсолютную величину (энергию), то есть устанавливаются незатухающие колебания.



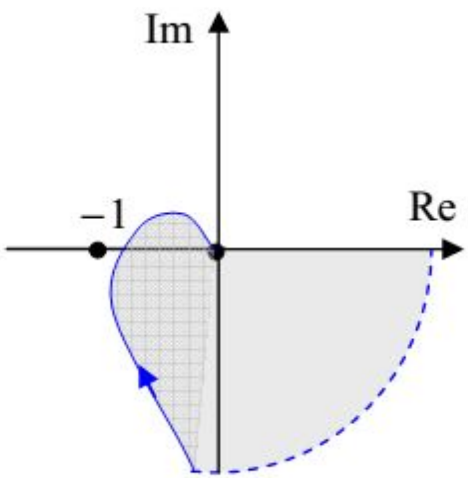
Критерии устойчивости Критерий Найквиста

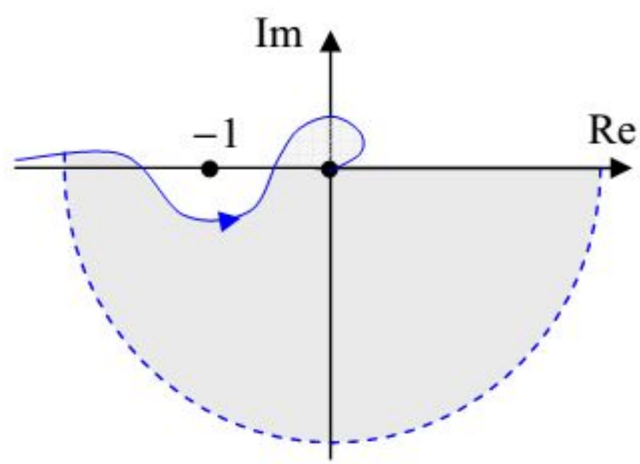
Частота ω_c, для которой $A(\omega_c) = 1$, называется **частотой среза**. Для устойчивой системы значение фазы на частоте среза должно быть больше, чем $-180°$; в этом случае годограф не охватит точку $(-1; 0)$.



Критерии устойчивости Критерий Найквиста

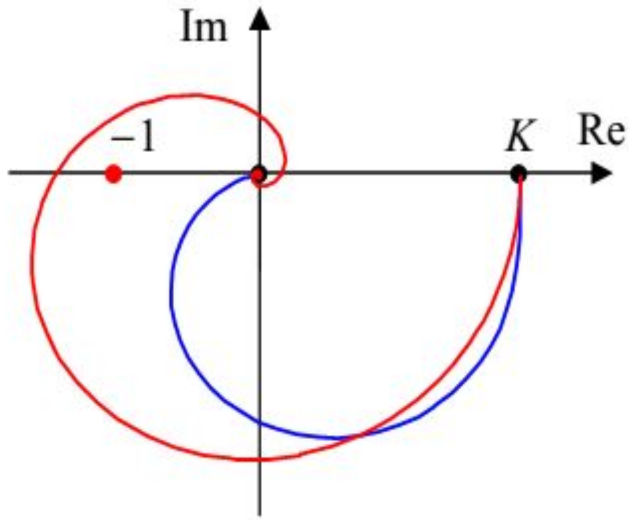
Если передаточная функция $L(s)$ имеет полюса в точке $s=0$ (то есть обращается в бесконечность в этой точке), ситуация усложняется. Теперь годограф начинается не на вещественной оси, а приходит из бесконечности. Тогда в контур необходимо включить не только полученную кривую, но и часть окружности бесконечного радиуса от вещественной оси до годографа в порядке обхода по часовой стрелке. Если функция $L(s)$ имеет k полюсов в точке $s=0$, нужно добавить k секторов по $90°$. На рисунках показаны годографы Найквиста устойчивых систем, в которых функция $L(s)$ имеет соответственно 1 и 2 полюса в точке $s=0$. Эти годографы не охватывают точку $(-1; 0)$.





Критерии устойчивости Критерий Найквиста

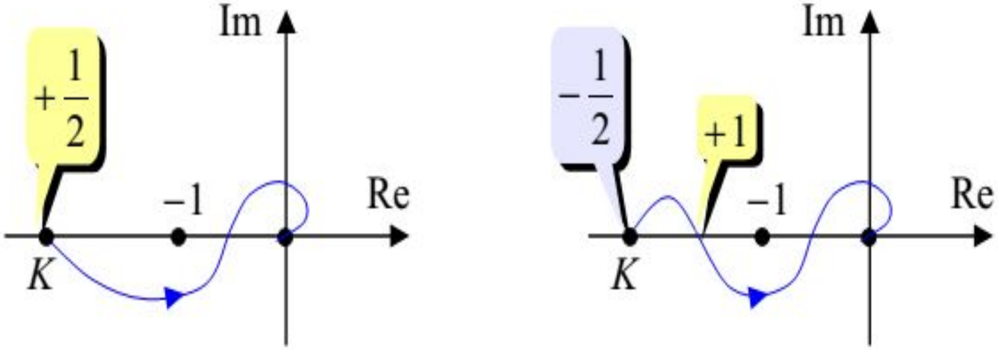
Если в системе есть запаздывание на время τ, на любой частоте появляется дополнительный сдвиг фазы на $-\tau\omega$ (без изменения амплитуды). Это значит, что каждая точка годографа поворачивается на некоторый угол против часовой стрелки.



На рисунке синяя линия – частотная характеристика системы без запаздывания, а красная – аналогичная характеристика для системы с запаздыванием. Видно, что запаздывание привело к неустойчивости системы (годограф охватил критическую точку $(-1; 0)$). Таким образом, система может потерять устойчивость из-за «медленного» датчика. Можно говорить о том, что *запаздывание всегда ухудшает устойчивость системы*, и этот факт важно учитывать при проектировании.

Критерии устойчивости
Критерий Найквиста

Для того, чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разница между числом положительных и отрицательных переходов была равна $\ell/2$, где ℓ – число неустойчивых полюсов функции $L(s)$. Начальная точка на оси абсцисс левее точки $(-1; 0)$ считается за половину перехода. На рисунке показаны годографы устойчивых систем для случая $\ell = 1$.



Частотная характеристика начинается на вещественной оси левее точки $(-1; 0)$. На рисунке слева годограф сначала идет вниз (половина положительного перехода) и больше нигде не пересекает ось абсцисс левее точки $(-1; 0)$, поэтому разница переходов равна $1/2 = \ell/2$ и замкнутая система устойчива.

На правом рисунке частотная характеристика сначала идет вверх (считаем это за половину отрицательного перехода), а затем переходит в нижнюю полуплоскость (положительный переход). Разница снова равна $1/2 = \ell/2$ и система устойчива.

$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s^1 + a_0 = 0$

Критерий устойчивости Михайлова

Пусть известно характеристическое уравнение

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s^1 + a_0 = 0$$

Составим полином Михайлова:

$$P(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s^1 + a_0$$

Произведем замену $s = j\omega$, получим

$$P(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_{\mathbf{1}}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(j\omega) + a_{\mathbf{0}}$$

После преобразований получим:

$$Y(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$$

Вектор, полученный изменением частоты ω называется годографом Михайлова,

$(0 < \omega < \infty)$

Критерий устойчивости Михайлова

- Сформулирован в 1938г.
- Формулировка критерия: **для того, чтобы САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы кривая (годограф) Михайлова при изменении частоты ω от нуля до бесконечности, начинаясь при ω=0 на вещественной положительной полуоси, обходила только против часовой стрелки последовательно n квадрантов координатной плоскости, нигде не проходя через начало координат. Здесь n – порядок характеристического уравнения системы.**