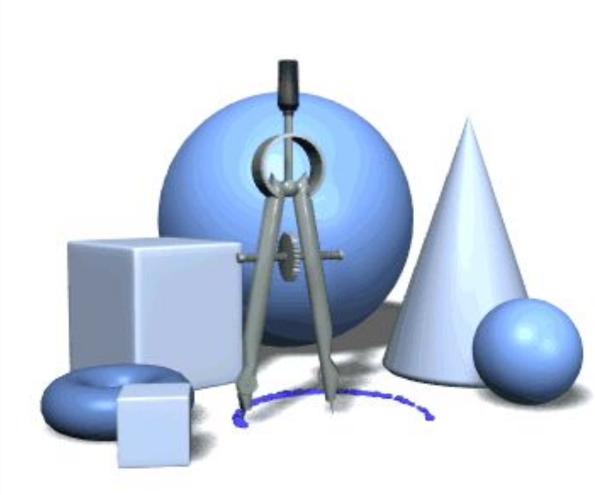


Шар. Сфера.

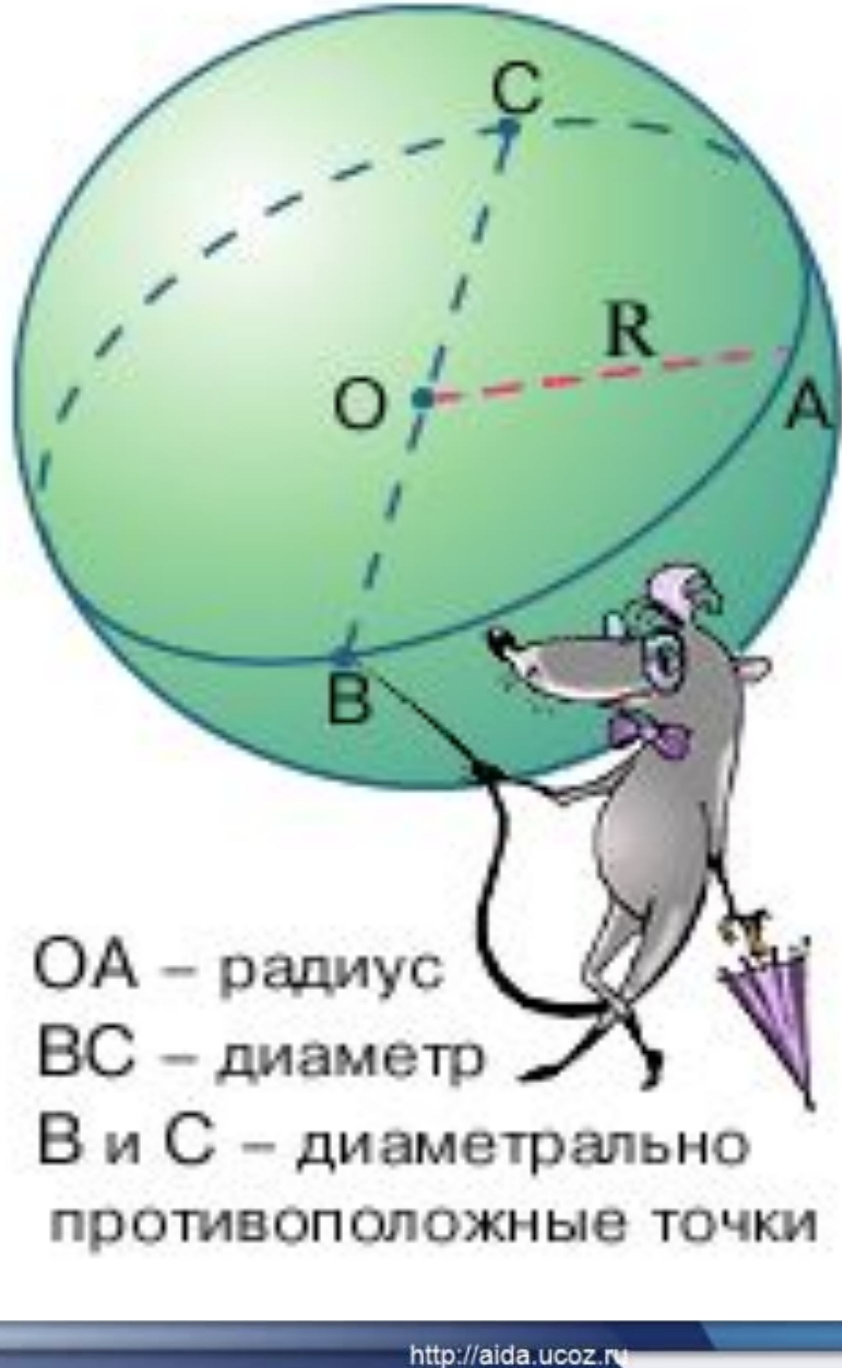
Основные вопросы:

- **Определение *шаровой поверхности* или *сферы*.**
- **Определение *шара, центра шара, радиуса шара*.**
- **Уравнение сферы.**
- **Взаимное расположение сферы и плоскости.**
- **Касательная плоскость к сфере. Сечения шара и сферы плоскостями.**
- **Площадь сферы.**

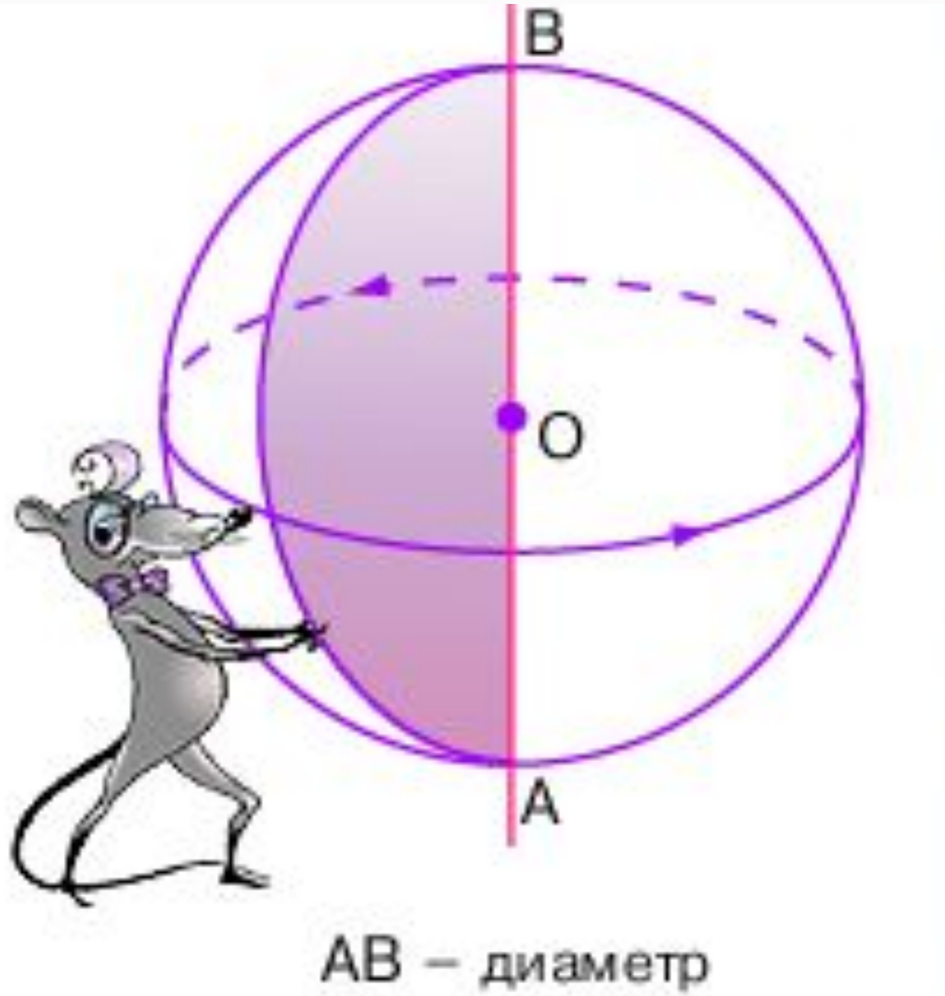
Шар или сфера?

ω (*O*, *R*)

- **Сферой** ***называется поверхность, которая состоит из всех точек пространства, находящихся на заданном расстоянии от данной точки.*** **Эта точка называется центром O, а заданное расстояние – радиусом сферы R, или шара – тела, ограниченного сферой.**
- **Шар** ***состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии не более заданного от данной точки.***



- Отрезок, соединяющий центр шара с точкой на его поверхности, называется ***радиусом шара***.
- Отрезок, соединяющий две точки на поверхности шара и проходящий через центр, называется ***диаметром шара***, а концы этого отрезка – ***диаметрально противоположными точками шара***.



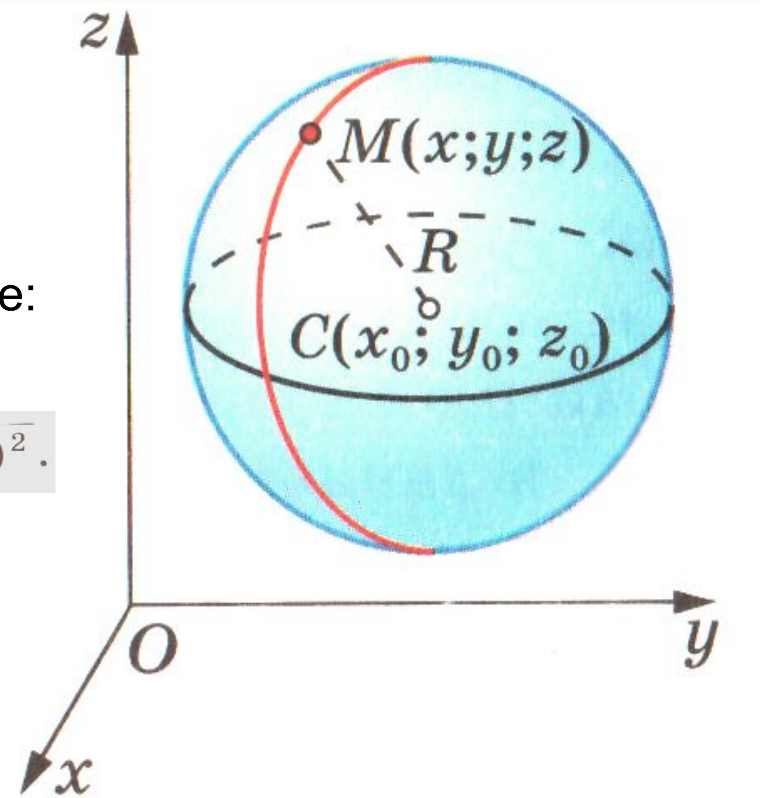
Шар можно рассматривать как тело, полученное от ***вращения полукруга вокруг диаметра как оси*****.**

Уравнение сферы.

- Выведем уравнение сферы радиуса ***R*** с центром **C** ***(x₀; y₀; z₀)***

- Расстояние от произвольной точки ***M (x; y; z)*** до точки ***C*** вычисляется по формуле:

$$MC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$



- **В прямоугольной системе координат уравнение сферы радиуса *R* с центром C *(x₀; y₀; z₀)* имеет вид:**

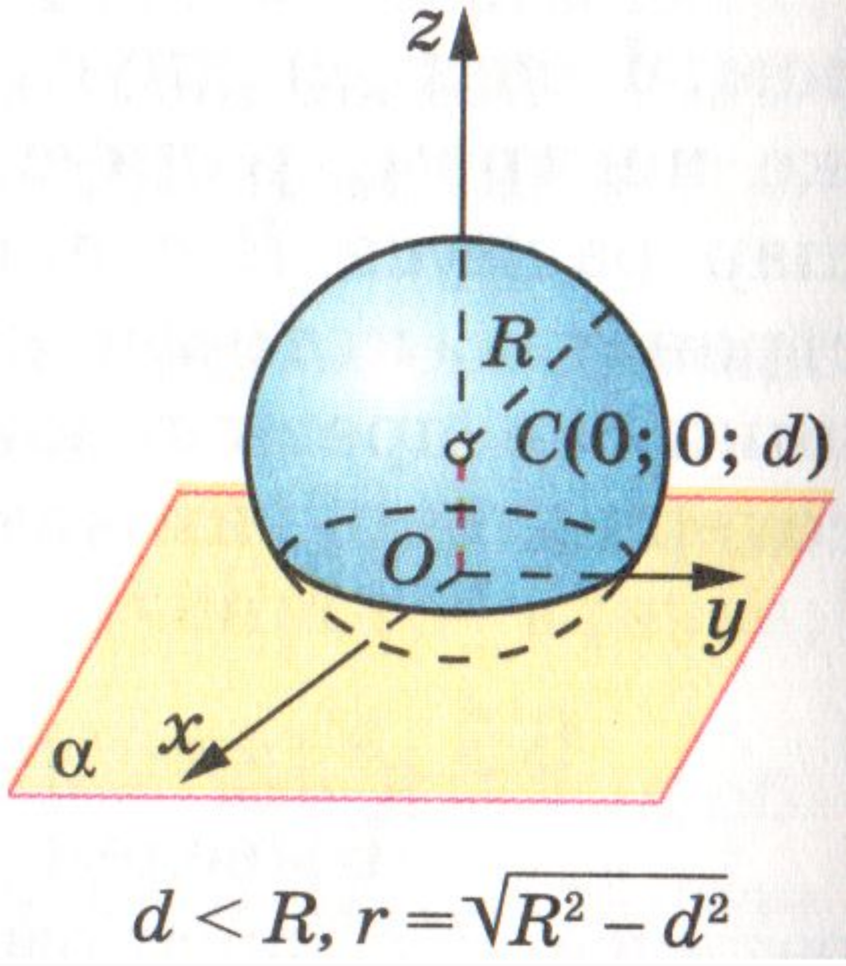
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Уравнение сферы	Центр	r
$(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=16$	C(3;2;1)	$r=4$
$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+5)^2=4$	C(1;-2;-5)	$r=2$
$(x+5)^2+(y-3)^2+z^2=25$	C(-5;3;0)	$r=5$
$(x-1)^2+y^2+z^2=8$	C(1;0;0)	$r=\sqrt{8}$
$x^2+(y+2)^2+(z+8)^2=2$	C(0;-2;-8)	$r=\sqrt{2}$
$x^2+y^2+z^2=9$	C(0;0;0)	$r=3$
$(x-3)^2+(y-2)^2+z^2=0{,}09$	C(3; 2;0)	$r=0{,}3$
$(x+7)^2+(y-5)^2+(z+1)^2=2{,}5$	C(-7; 5;-1)	$r=\sqrt{2{,}5}$
$x^2+(y+4)^2+(z+4)^2=6\frac{1}{4}$	C(0;-4;9)	$r=\frac{5}{2}$

Взаимное расположение сферы и плоскости

- ***Если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы, то сечение сферы плоскостью есть окружность.***

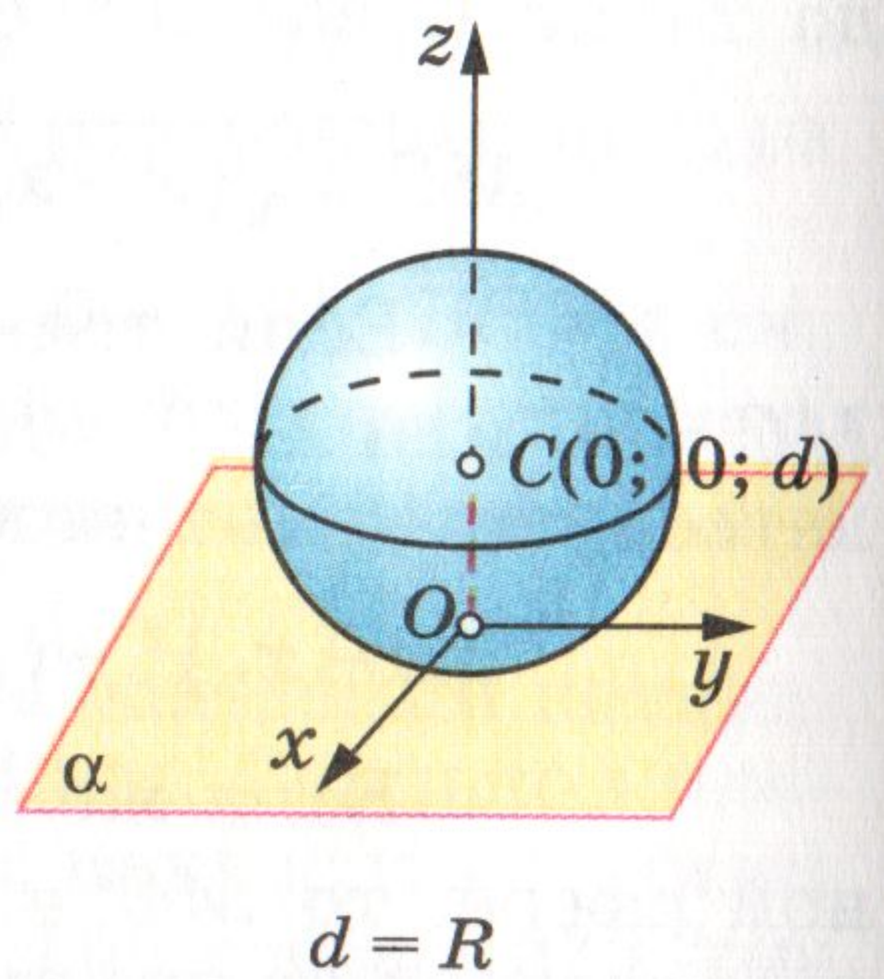
d<R



Взаимное расположение сферы и плоскости

- *Если расстояние от центра сферы до плоскости **равно радиусу сферы,** то сфера и плоскость **имеют только одну общую точку.***

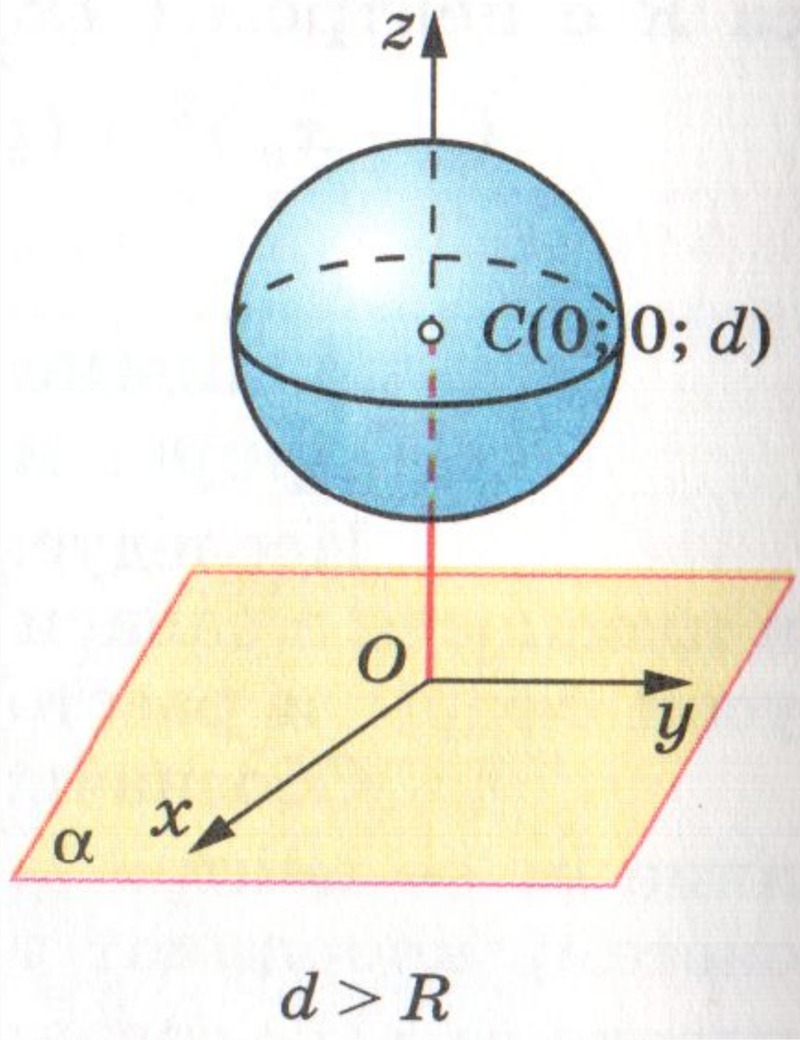
d=R



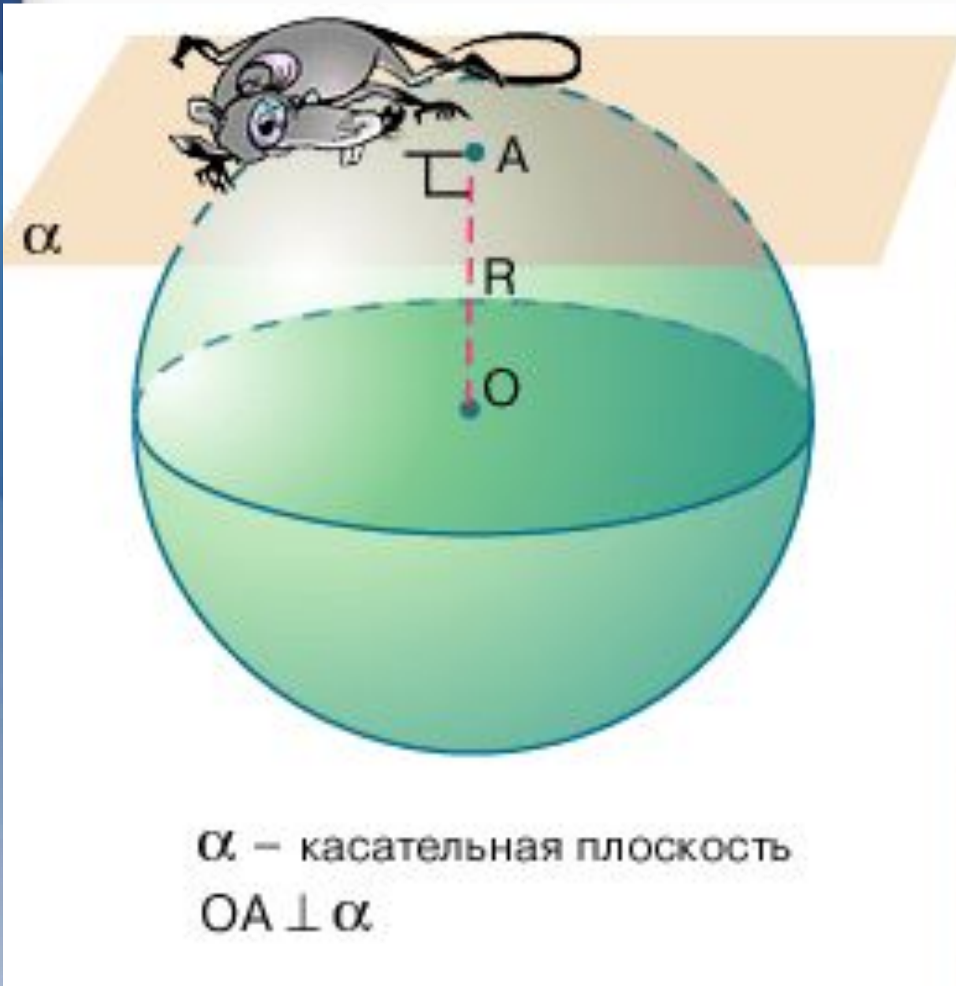
Взаимное расположение сферы и плоскости

- *Если расстояние от центра сферы до плоскости* ***больше радиуса сферы,*** *то сфера и плоскость* ***не имеют общих точек.***

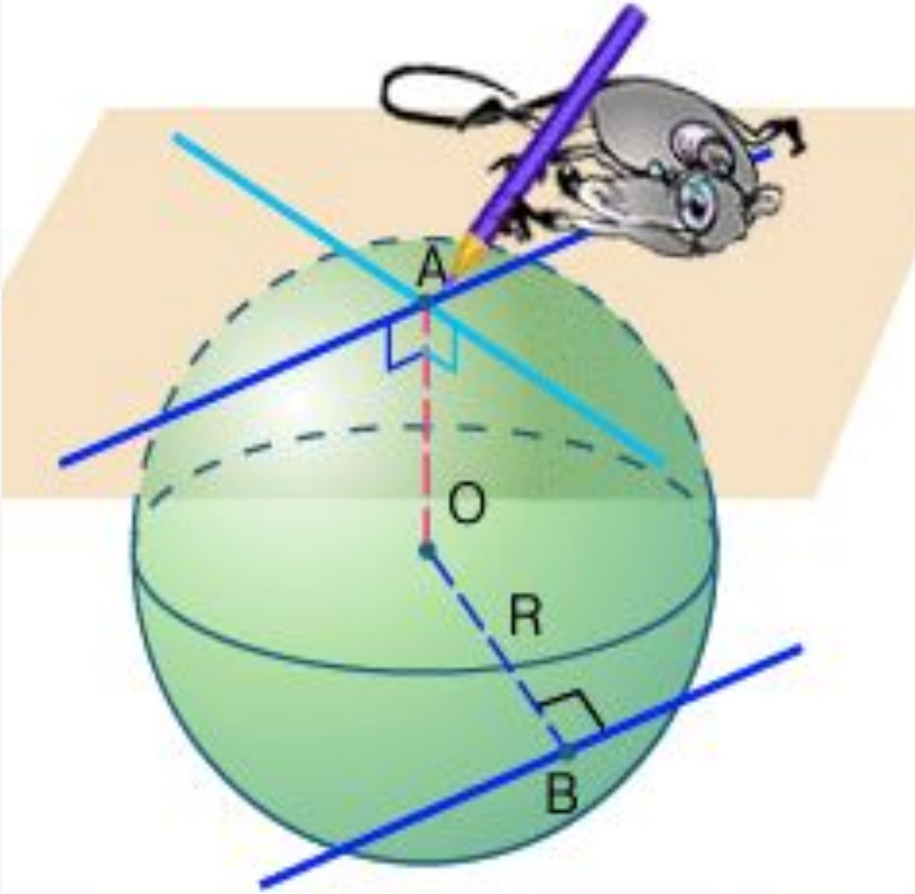
d>R



Плоскость и прямая, касательные к сфере.

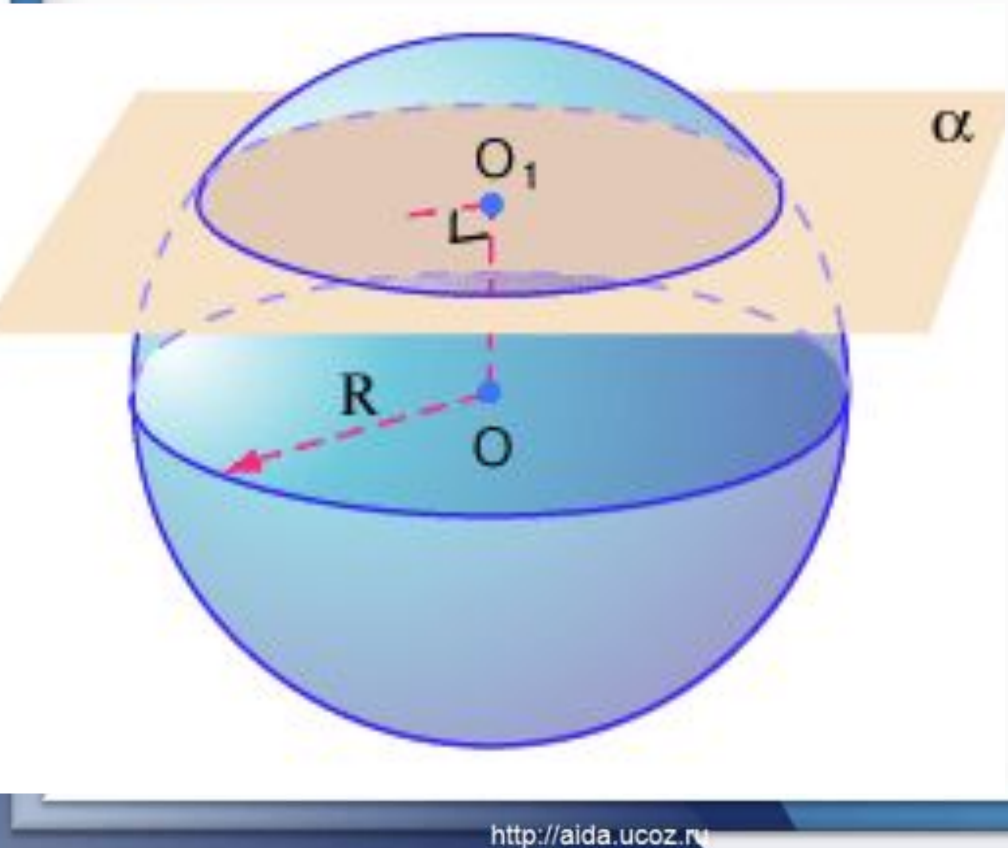


Плоскость, ***имеющая со сферой только одну общую точку***, называется **касательной плоскостью**. ***Касательная плоскость*** **перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.**



- **Прямая называется касательной, если она имеет со сферой ровно *одну общую точку*. Такая прямая перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.**
- **Через любую точку сферы можно провести *бесчисленное множество касательных прямых*.**

Теорема. ***Любое сечение шара плоскостью есть круг. Перпендикуляр, опущенный из центра шара на секущую плоскость, попадает в центр этого круга.***



Дано:

$шар\left(O,R\right)$

α – секущая плоскость

$OO_1 \perp \alpha$

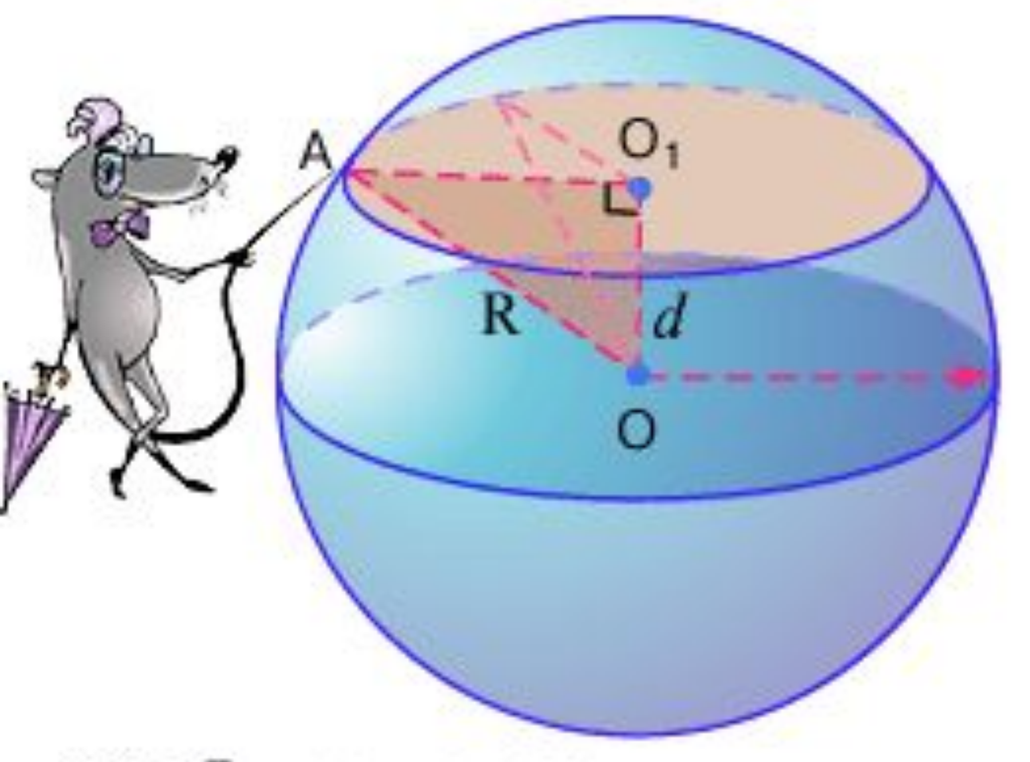
Доказать:

сечение – круг

O_1 – центр круга

Доказательство:

Рассмотрим прямоугольный треугольник, вершинами которого являются центр шара, основание перпендикуляра, опущенного из центра на плоскость, и произвольная точка сечения.



$$OA = R \qquad OO_1 = d$$

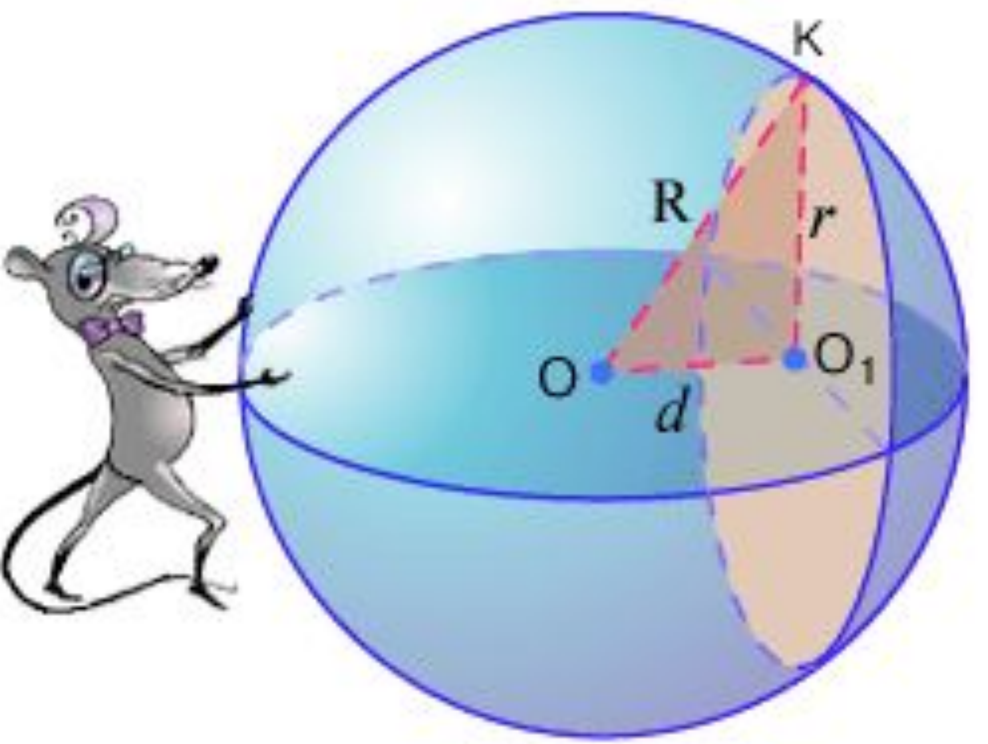
$$AO^2 = OO_1^{\,2} + AO_1^{\,2}$$

$$R^2 = d^2 + AO_1^2$$

$$AO_1 = \sqrt{R^2 - d^2}$$

$$AO_1 = const$$

Следствие. ***Если известны радиус шара и расстояние от центра шара до плоскости сечения, то радиус сечения вычисляется по теореме Пифагора.***

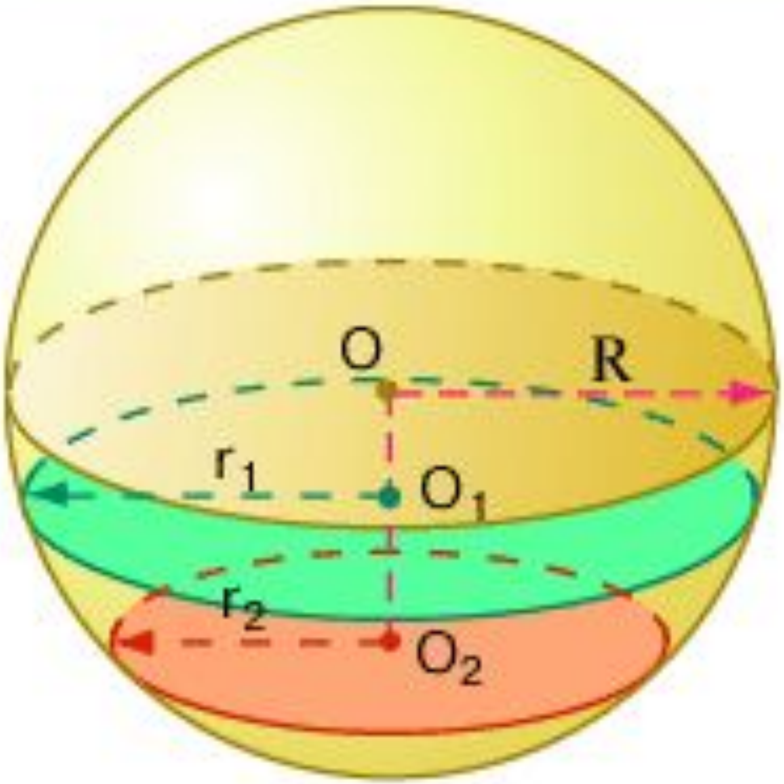


$$O_1K^2 + d^2 = R^2$$

$$O_1K = \sqrt{R^2 - d^2} = r$$

r – радиус сечения

Чем меньше расстояние от центра шара до плоскости, тем больше радиус сечения.

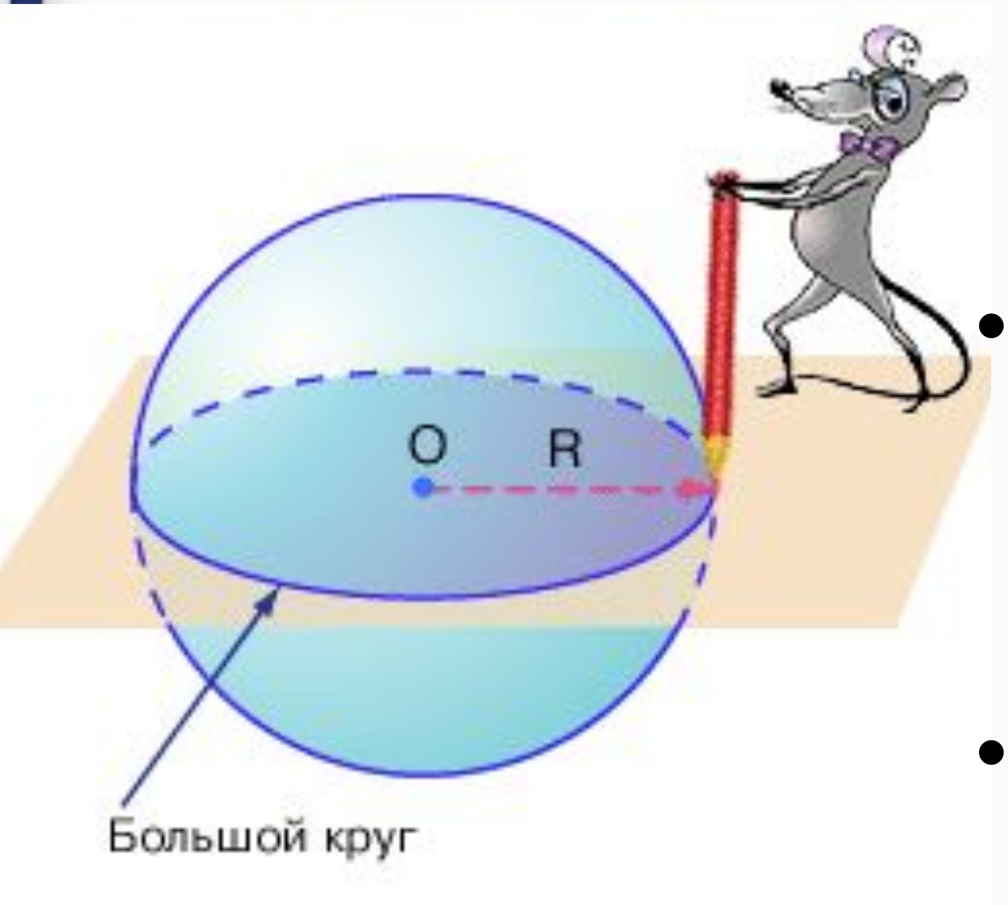


$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

$$d_1 = OO_1$$

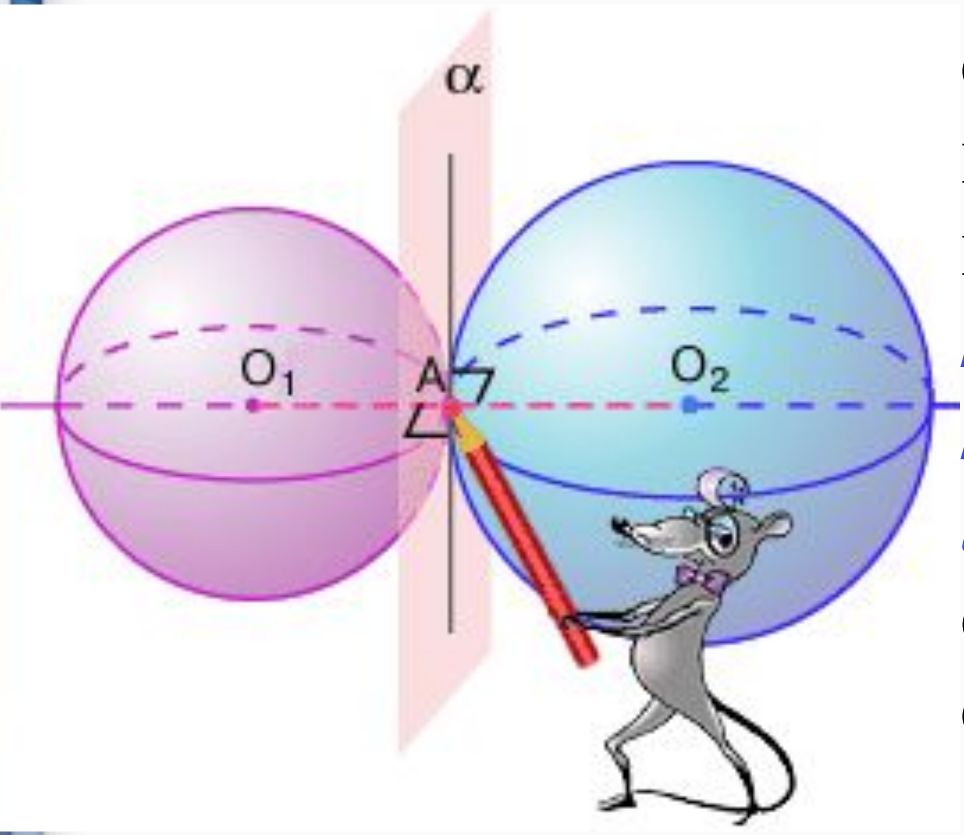
$$d_2 = OO_2$$

$$r_1 > r_2 \Rightarrow d_1 < d_2$$

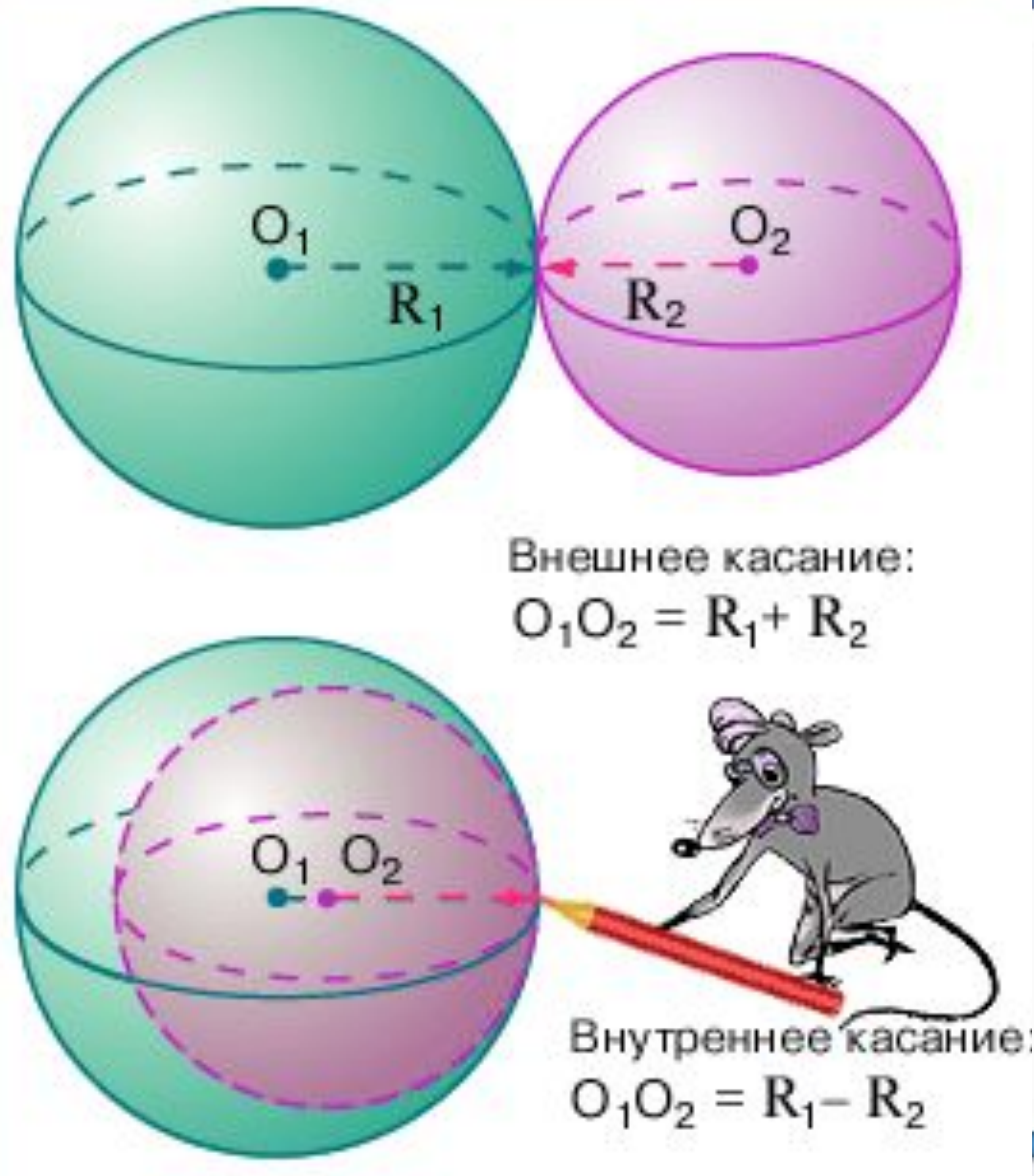


- ***Наибольший радиус сечения*** **получается, когда плоскость проходит через *центр шара*.**
- **Круг, получаемый в этом случае, называется большим кругом.**
- **Большой круг делит шар на два полушара.**

Взаимное расположение двух шаров.



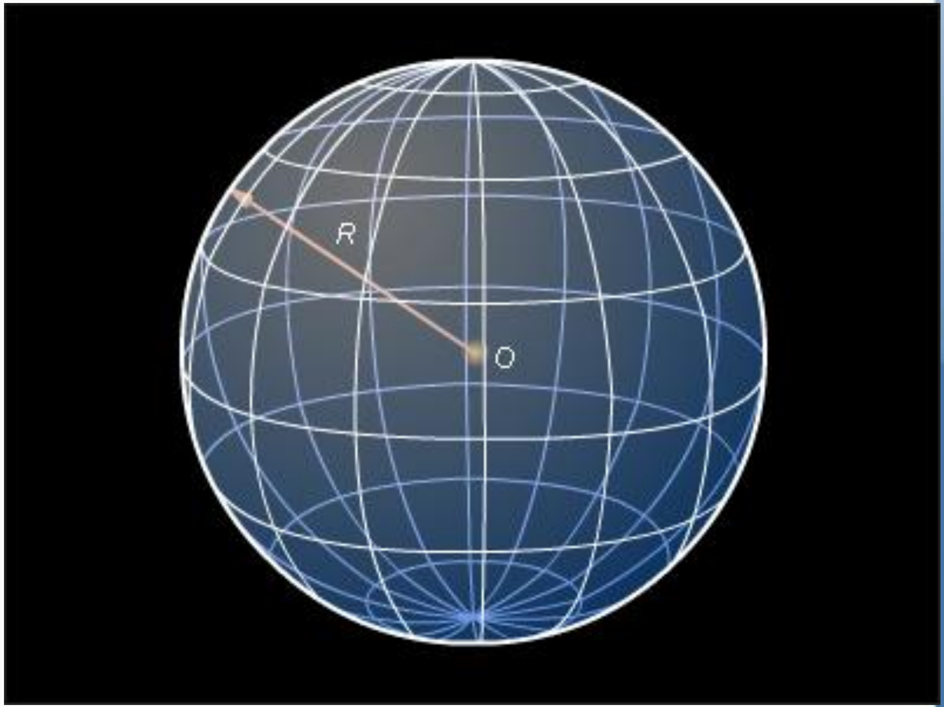
Если два шара или сферы имеют только одну общую точку, то говорят, что они касаются. *Их общая касательная плоскость перпендикулярна линии центров* (прямой, соединяющей центры обоих шаров).



Касание шаров может быть *внутренним* и *внешним*.

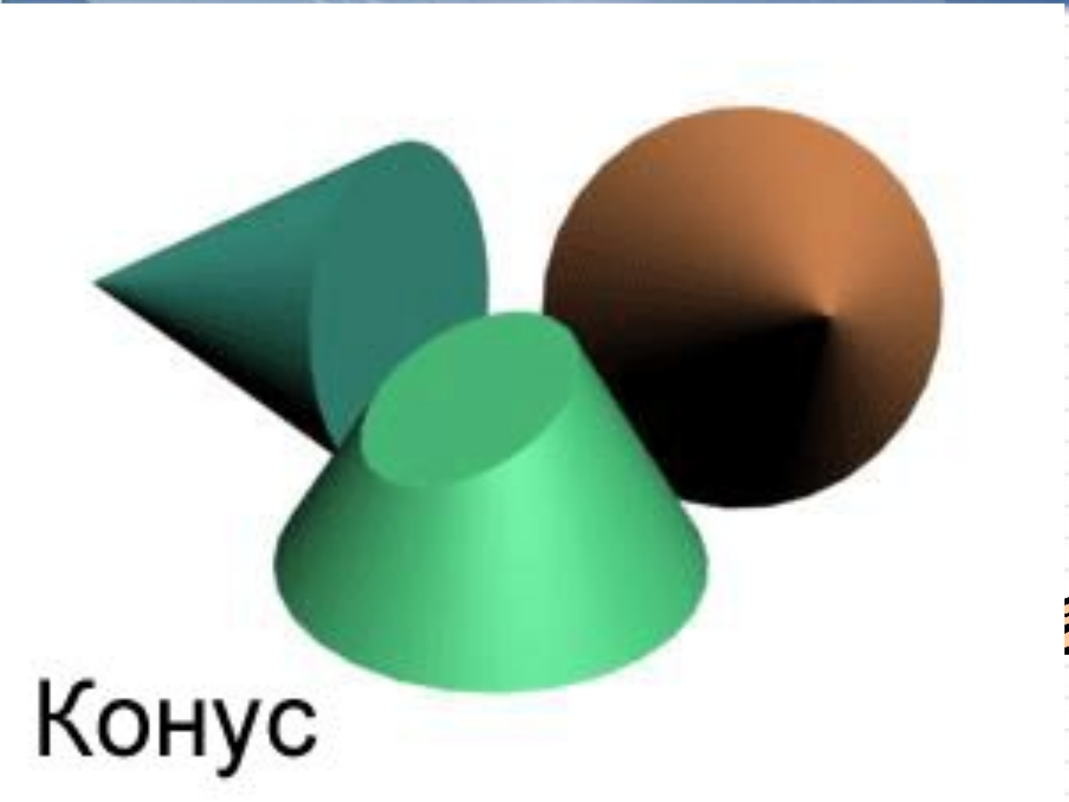
Площадь сферы

- ***Площадь S сферы радиуса* R *вычисляется по формуле:***



$$S = 4\pi R^2$$

Решение задач



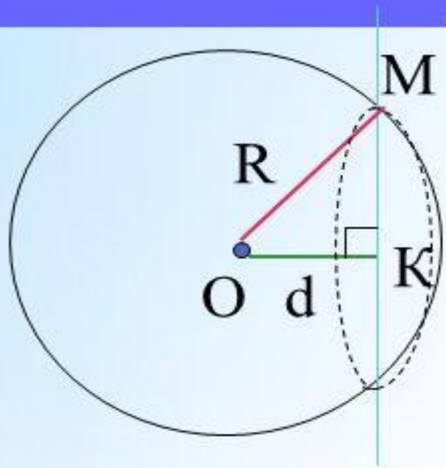
Задача 1.
Зная координаты центра С(2;-3;0) и радиус сферы R=5, записать уравнение сферы.

Решение:

так как уравнение сферы с радиусом R и центром в точке $C(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2=R^2$, а координаты центра данной сферы С(2;-3;0) и радиус R=5, то уравнение данной сферы $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2=25$

Ответ: $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2=25$

Задача 2.
Шар радиусом 41 дм пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 9 дм от центра. Найти радиус сечения.



Дано:
Шар с центром в т.О
R=41 дм
α - секущая плоскость
d = 9 дм

Найти: $r_{сеч} = ?$

Решение:

Рассмотрим ΔOMK – прямоугольный

OM = 41 дм; OK = 9 дм; MK = r, $r^2 = R^2 - d^2$

по теореме Пифагора: $MK^2 = r^2 = 41^2 - 9^2 = 1681 - 81 = 1600$,
отсюда $r_{сеч} = 40$ дм

Ответ: $r_{сеч} = 40$ дм

Задача 3.
Найти площадь поверхности сферы, радиус которой равен 6 см.

Дано:

сфера

R = 6 см

Найти:

Sсф = ?

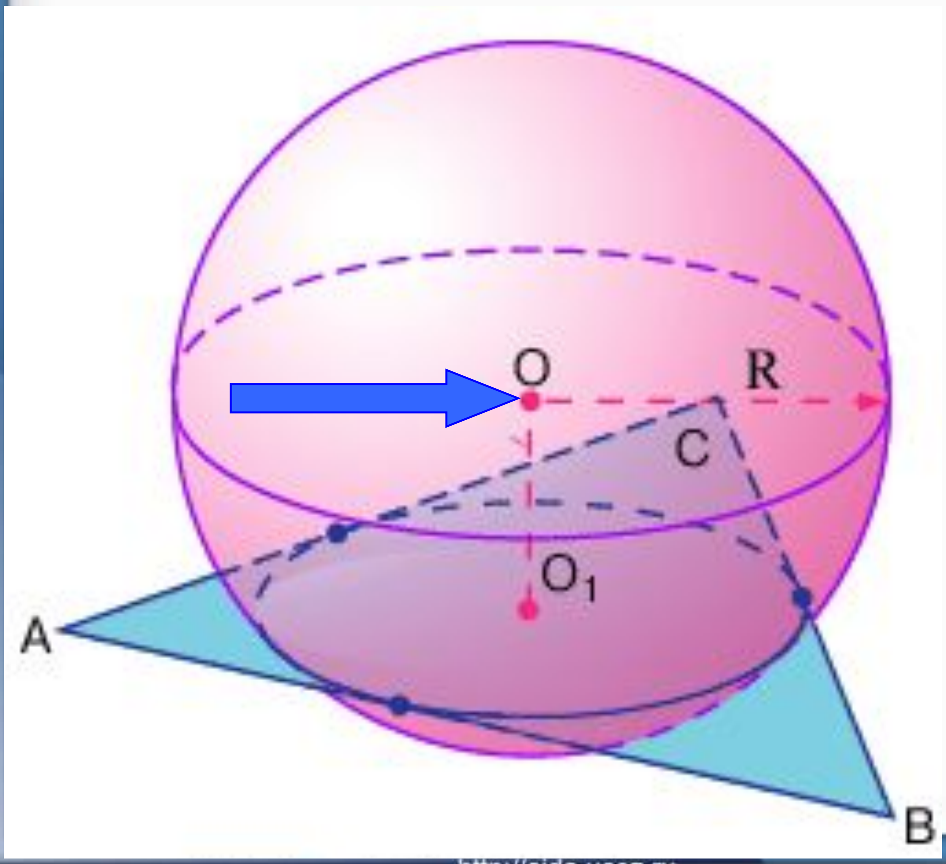
Решение:

1. Sсф = 4πR2
2. Sсф = 4π 62 = 144π см2

Ответ: Sсф = 144π см2

Задача.

Стороны треугольника 13см, 14см и 15см. Найти расстояние от плоскости треугольника до центра шара, касающегося сторон треугольника. Радиус шара равен 5 см.



Дано:

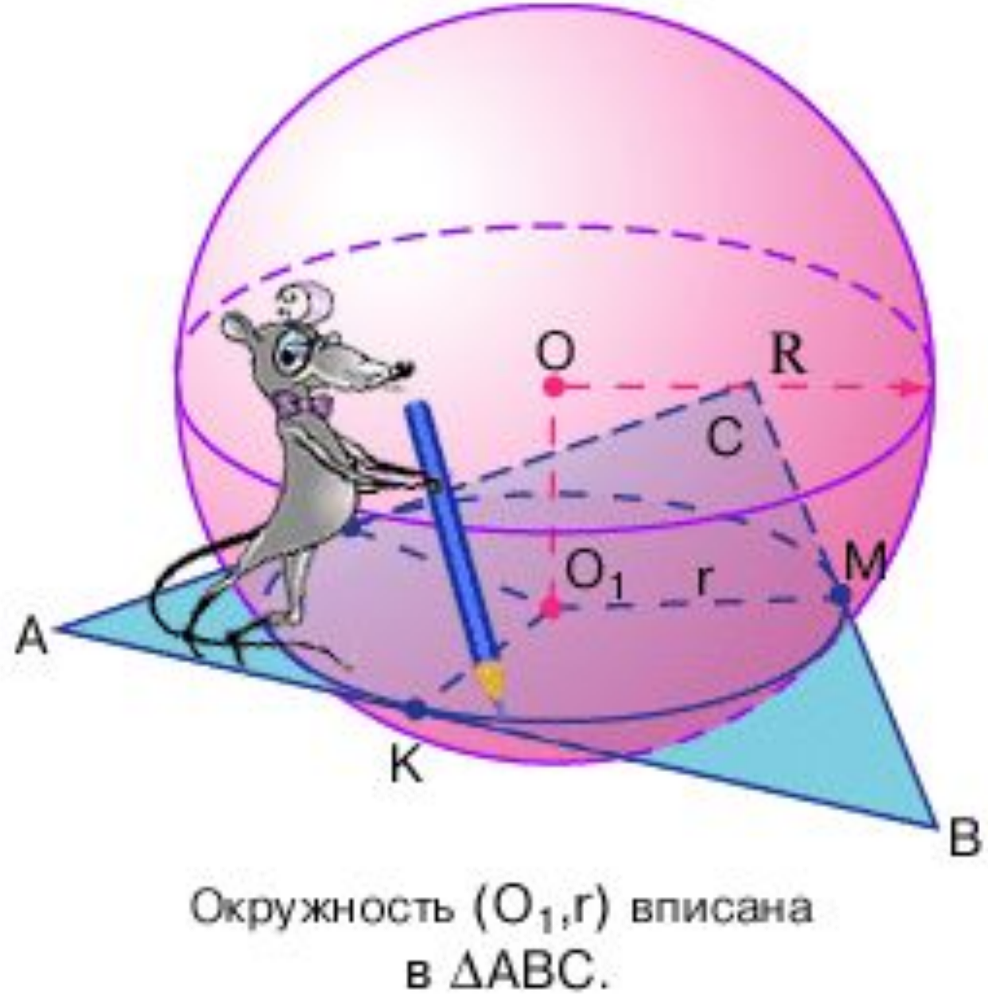
$$AB = 15 см$$

$$AC = 14 см$$

$$BC = 13 см$$

Найти:

$$d(O, FDC)$$

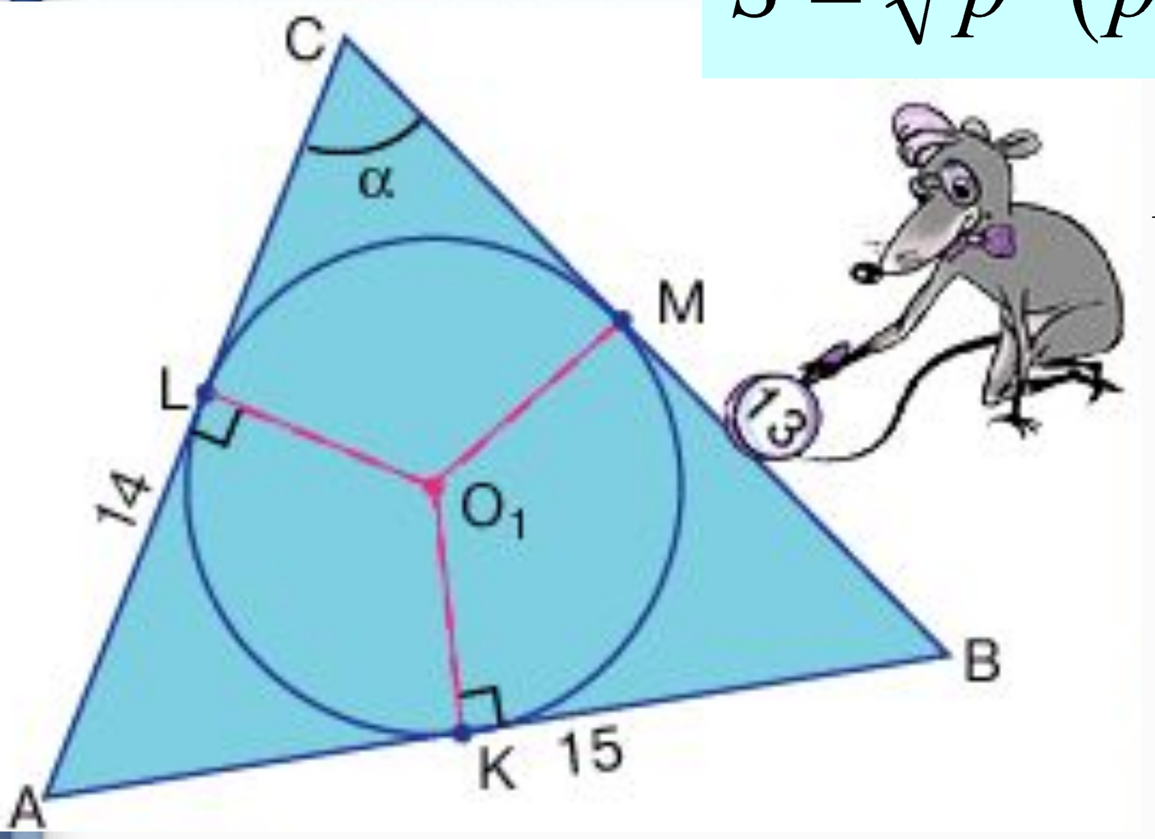


Решение:

Сечение сферы, проходящее через точки касания, - это вписанная в треугольник ABC окружность.

Решение:

Вычислим радиус окружности, вписанной в треугольник.



$$S=\sqrt{p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p=\frac{14+15+13}{2}=21$$

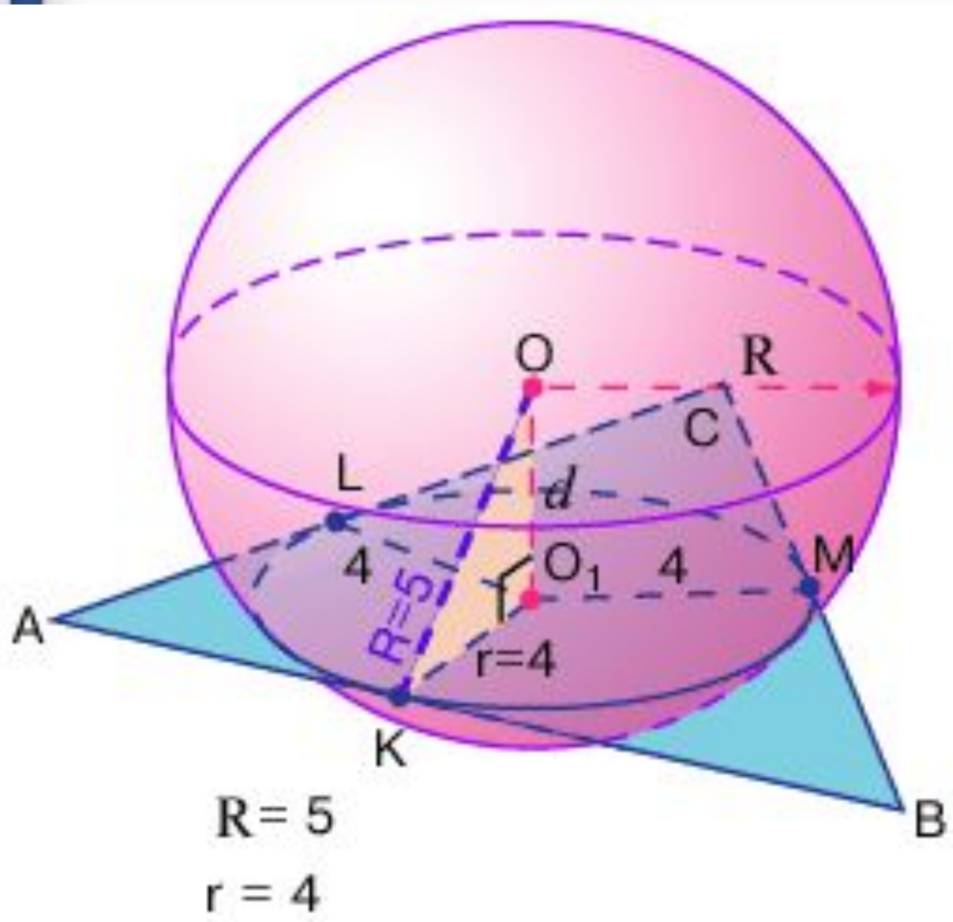
$$S=84$$

$$S=r\cdot p$$

$$r=\frac{S}{p}=\frac{84}{21}=4$$

Решение:

Зная радиус сечения и радиус шара, найдем искомое расстояние.



$$Из\ \Delta OO_1K:$$

$$R^2 = r^2 + d^2$$

$$d = \sqrt{R^2 - r^2} = 3$$

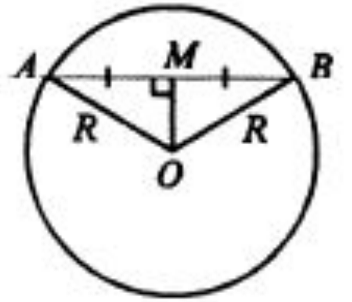
$$d(O, ABC) = 3см$$

Задача

574 Точка M — середина отрезка AB, концы которого лежат на сфере радиуса R с центром O. Найдите: а) OM, если $R = 50$ см, $AB = 40$ см; б) OM, если $R = 15$ мм, $AB = 18$ мм; в) AB, если $R = 10$ дм, $OM = 60$ см; г) AM, если $R = a$, $OM = b$.

Решение:

574. Проведем секущую плоскость через точки A, B и O. Сечение серы этой плоскостью будет окружностью радиуса R с центром в точке O. OM — медиана в равнобедренном ΔAOB, поэтому $OM \perp AB$.



а) R=50 см, AB=40 см.

$$AM = \frac{1}{2} AB = 20 \text{ см.}$$

$$\text{Из } \Delta AOM\text{: } OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{R^2 - AM^2} = \sqrt{50^2 - 20^2} =$$

$$OM = \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2} AB\right)^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ мм;}$$

в) R=10 дм, OM=60 см, найти AB. OM=60 см=6 дм.

$$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ дм, } AB = 2AM = 16 \text{ дм;}$$

г) R=a, OM=b.

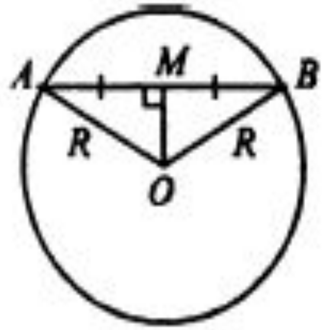
$$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - OM^2} = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Задача

575 Точки A и B лежат на сфере радиуса R. Найдите расстояние от центра сферы до прямой AB, если $AB = m$.

Решение:

575. Проведем плоскость через точки А, В и точку О — центр сферы. В сечении получим окружность радиуса R, проходящая через центр сферы. В равнобедренном ΔOAB проведем $OM \perp AB$. OM — высота в равнобедренном треугольнике, таким образом, OM — медиана, $MA = MB = \frac{m}{2}$. OM — искомое расстояние.



$$OM = \sqrt{OA^2 - MA^2} = \sqrt{R^2 - \frac{m^2}{4}} = \frac{\sqrt{4R^2 - m^2}}{2}.$$

Задача

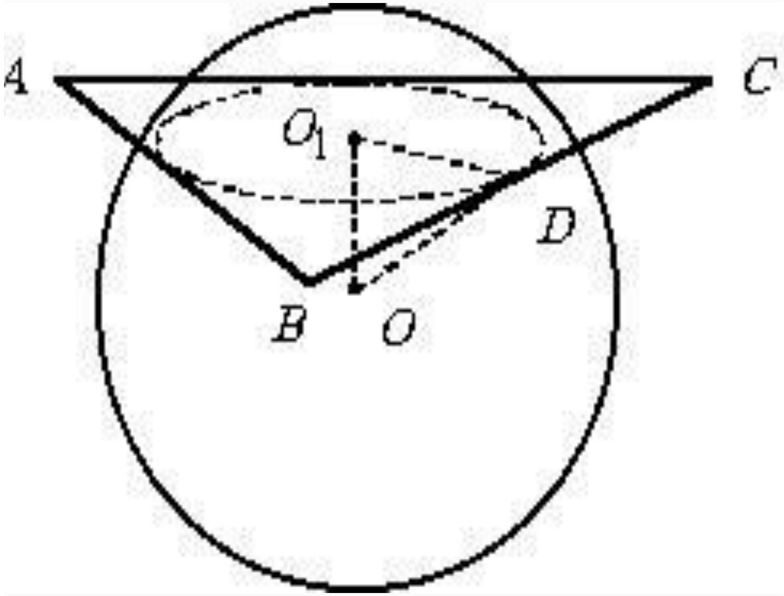
Стороны треугольника *13* см, *14* см, *15* см. Найти расстояние от плоскости треугольника до центра шара, касательного к сторонам треугольника. Радиус шара *5* см.

Решение:

Плоскость треугольника ABC пересекает поверхность шара по окружности, вписанной в треугольник ABC. Искомое расстояние – это расстояние между центром этой окружности O_1 и центром шара O. Найдем радиус этой окружности O_1D по формуле

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p},$$

где $p = \frac{AB + BC + AC}{2} = 21$ (см), $r = \frac{\sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}}{21} = 4$ (см).



Решение:

Треугольник O_1DO – прямоугольный, так как OO_1 перпендикулярно плоскости треугольника ABC, следовательно и любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Тогда $OO_1 = \sqrt{OD^2 - O_1D^2}$, где OD – радиус шара. $OO_1 = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см).

Ответ: 3 см.

Задача

578 Найдите координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением: а) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$; б) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 2$.

Решение:

578. а) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$.

$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = R^2$, где R — радиус сферы, $(x_o; y_o; z_o)$ — координаты точки С, центра сферы. В нашем случае $x - x_o = x$; $y - y_o = y$; $z - z_o = z$, поэтому $x_o = 0$; $y_o = 0$; $z_o = 0$,

а $R = \sqrt{49} = 7$. Координаты центра (0;0;0), радиус: 7.

б) $(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + z^2 = 2$.

$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = R^2$, $x - 3 = x - x_o$, $x_o = 3$;

$y + 2 = y - y_o$, $y_o = -2$; $z - z_o = z$, $z_o = 0$; $2 = R^2$, $R = \sqrt{2}$.

Координаты центра: (3;–2;0), радиус: $\sqrt{2}$.

Задача

579 Докажите, что каждое из следующих уравнений является уравнением сферы. Найдите координаты центра и радиус этой сферы: а) $x^2 - 4x + y^2 + z^2 = 0$; б) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 24$; в) $x^2 + 2x + y^2 + z^2 = 3$; г) $x^2 - x + y^2 + 3y + z^2 - 2z = 2{,}5$.

Решение:

579. а) $x^2 - 4x + y^2 + z^2 = 0$,

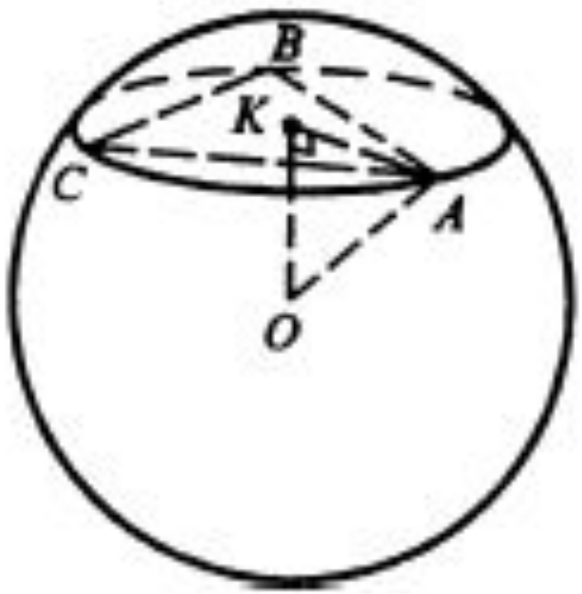
$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4 = (x^2 - 4x + 4) + y^2 + z^2 - 4 = 0,$$

$(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2^2$ – уравнение сферы.

Координаты центра (2; 0; 0), радиус: 2;

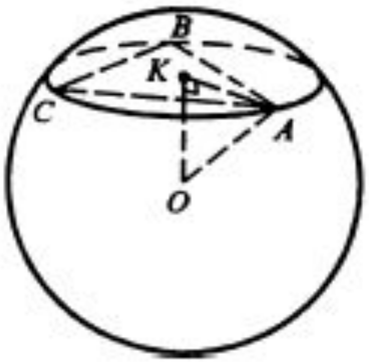
Задача

581 Вершины треугольника ABC лежат на сфере радиуса 13 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $AC = 10$ см.



Решение:

581. Плоскость треугольника ABC пересекает сферу с центром в точке О по окружности, которая описана около ΔABC. Из точки О проведем ОК перпендикулярно плоскости ABC, ОК — искомое расстояние, точка К — центр описанной около ΔABC окружности. Соединим точку К с одной из вершин ΔABC, например, с А, проведем радиус в точку А.



ΔОКА — прямоугольный, тогда по теореме Пифагора:

$$OK = \sqrt{OA^2 - KA^2} = \sqrt{13^2 - AK^2}.$$

Найдем длину АК.

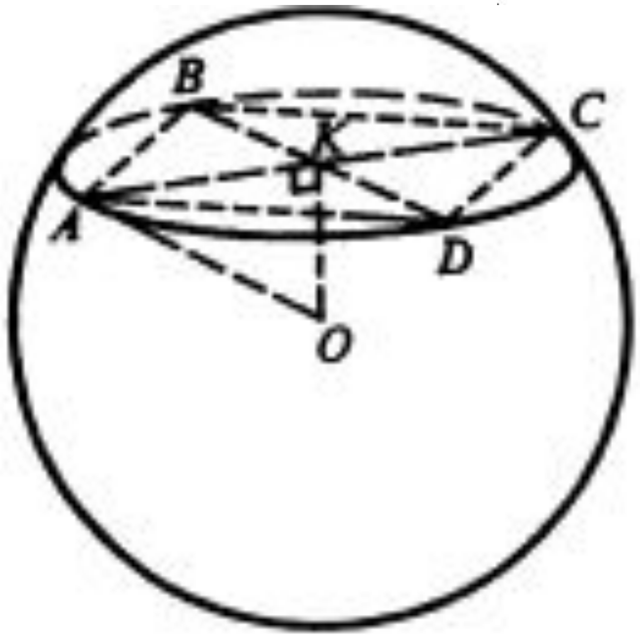
$$AK = \frac{AB \cdot CB \cdot CA}{4 \cdot S_{\Delta ABC}},\ S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - CA)},$$

$$p = \frac{6+8+10}{2} = 12,\ S = \sqrt{12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = \sqrt{6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = 6 \cdot 2 \cdot 2 = 24 \text{ см}^2,$$

$$AK = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{4 \cdot 24} = \frac{24 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5}{24 \cdot 4} = 5 \text{ см},\ OK = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ см}.$$

Задача

582 Вершины прямоугольника лежат на сфере радиуса 10 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости прямоугольника, если его диагональ равна 16 см.



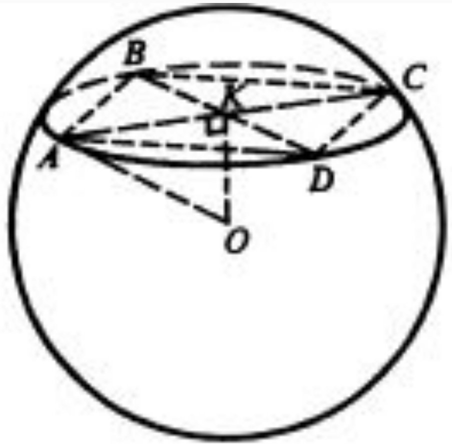
Решение:

582. Плоскость прямоугольника пересекает сферу по окружности, которая будет описанной около прямоугольника ABCD. Центр окружности находится в точке пересечения диагоналей прямоугольника. Пусть O — центр сферы, следовательно OK ⊥ плоскости ABCD, OK — искомое расстояние.

Из прямоугольного ΔOKA вычислим OK:

$$OK = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{R^2 - AK^2}.$$

$$AK = \frac{16}{2} = 8\text{ см},\ OK = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = 6\text{ см}.$$



ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ:

- ***Учебник Геометрия /Атанасян/***

  гл.6 §3 (п.58 – 60, 62) ,вопросы: 7 – 10 (стр.135 - 136)
- Написать конспект с выполненными чертежами. Выучить определения всех основных понятий данного занятия.
- Все разобранные задачи в конспект.
- Решить прилагаемые задачи

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ СТУДЕНТАМИ:

№	***Решите следующие задачи***
1.	Радиус сферы равен 2,6 дм. ***Найдите длину линии пересечения сферы плоскостью***, находящейся на расстоянии 2,4 дм от ее центра.
2.	Сфера проходит через точку А (-3; 4; -2), а её центр находится в начале координат. ***Составьте уравнение сферы***.
3.	Радиус шара 10 см. На расстоянии 8 см от его центра проведена плоскость. Вычислите площадь фигуры, являющейся их пересечением.