

4. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

Теорема.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ – любая первообразная этой функции на $[a,b]$, то определенный интеграл от функции $f(x)$ на $[a,b]$ равен приращению первообразной на этом отрезке:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Доказательство:

Пусть функция $F(x)$ - некоторая первообразная функции $y=f(x)$. Тогда по теореме 2 предыдущего параграфа функция

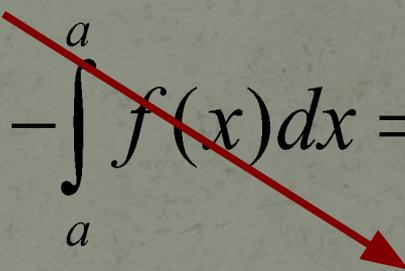
$$\Phi(x) = \int_a^x f(x)dx$$

тоже является первообразной для функции $y=f(x)$, и найдется такое число C , что

$$F(x) = \Phi(x) + C$$

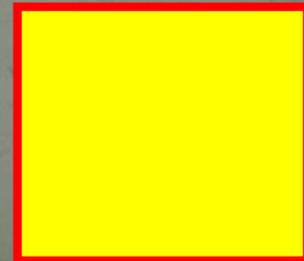
Тогда

$$F(b) - F(a) = (\Phi(b) + C) - (\Phi(a) + C) =$$

$$= \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^a f(x) dx =$$


0

$$= \int_a^b f(x) dx$$



Нахождение определенных интегралов с помощью формулы Ньютона-Лейбница осуществляется в два этапа:

1

Находится некоторая первообразная $F(x)$ подынтегральной функции $f(x)$.

2

Находится приращение первообразной, равное искомому интегралу.

Примеры.

1

Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^1 x^2 dx$$

Решение.

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

2

$$\int_1^2 2^{3x-5} dx$$

Решение.

$$\int_1^2 2^{3x-5} dx = \frac{1}{32} \int_1^2 2^{3x} dx = \frac{1}{32} \int_1^2 8^x dx = \frac{1}{32} \frac{8^x}{\ln 8} \Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{32} \left(\frac{8^2}{\ln 8} - \frac{8}{\ln 8} \right) = \frac{7}{12 \ln 2}$$