Линии второго порядка

1. Окружность.

Окружность есть множество точек плоскости, равноудаленных от фиксированной точки (центра) той же плоскости. Если центр находится в точке C (a, b), то уравнение окружности

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2, \qquad (1)$$

где R– радиус окружности, x и y – текущие координаты.

В частности, если центр окружности лежит в начале координат, т.е. $a=b=0$, то ее уравнение принимает простейший вид

$$x^2+y^2=R^2.$$

Общее алгебраическое уравнение 2-й степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

есть уравнение окружности, если $A = C \neq 0, B = 0.$

Следовательно, общее уравнение окружности имеет вид

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (2)$$

Разделив это уравнение на A и выделив полные квадраты по x и y по, приведем его к виду (1), где

$$a = -\frac{D}{A},\ b = -\frac{E}{A},\ R^2 = \frac{D^2 + E^2 - AF}{A}.$$

Замечание. Для вещественной окружности $D^2 + E^2 - AF > 0$

Пример 1.

Привести к виду (1) общее уравнение окружности

$$2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y + 2 = 0.$$

Решение: Разделим все члены уравнения на 2:

$$x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + 2y + 1 = 0.$$

Сгруппируем члены, содержащие только x и только y, и доводим их до полных квадратов:

$$x^2 - \frac{3}{2}x = x^2 - 2 * \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16},$$

$y^2 + 2y = y^2 + 2y + 1 - 1 = (y+1)^2 - 1,$ $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + (y+1)^2 - 1 + 1 = 0,$

Откуда $$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{9}{16}.$$

Таким образом, уравнение окружности приведено к каноническому виду. Ее центр находится в точке $C\left(\frac{3}{4}; -1\right)$, а радиус $R = \frac{3}{4}$.

2. Эллипс.

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек F_1 *и* F_2 *(фокусов) той же плоскости есть величина постоянная.* Эту постоянную обозначают $2a$, расстояние между фокусами обозначают $2c$, при этом $a > c$. Если выбрать систему координат так, чтобы ось Ox проходила через фокусы, а начало координат лежало посередине между ними, то уравнение эллипса примет канонический вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ b^2=a^2-c^2,\quad a>b.$$

В этом случае фокусы эллипса имеют координаты $F_1(-c,0),\quad F_2(c,0)$.

Начало координат O – *центр симметрии* эллипса (или просто его центр), а оси координат – *оси симметрии* эллипса. Точки $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ называются *вершинами* эллипса, а длины

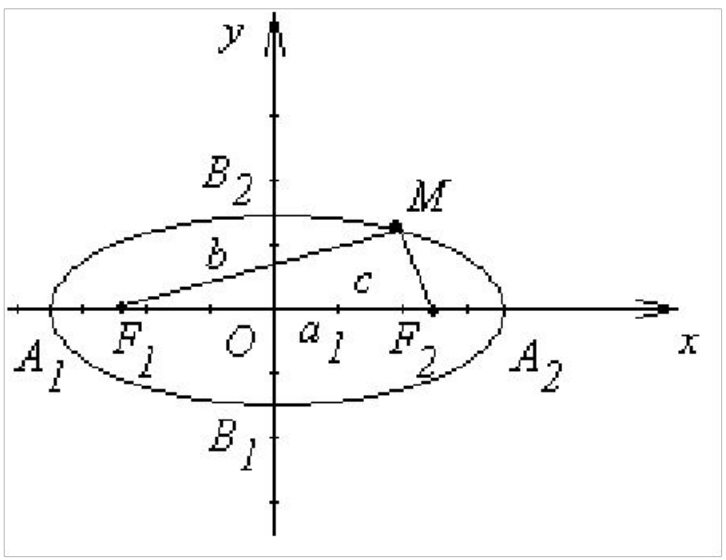


Рис.1

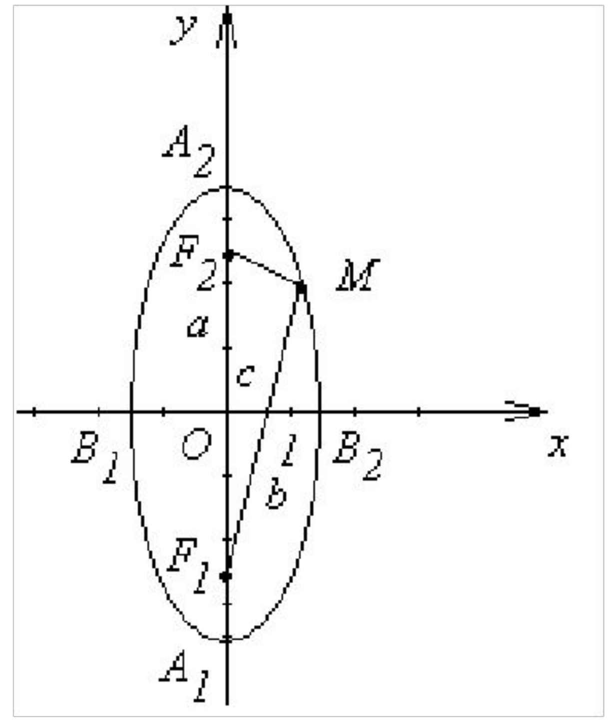


Рис.2

отрезков $a = OA_2$ и $b = OB_2$ – большой и малой *полуосями*.

Величина

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$$

называется *эксцентриситетом* эллипса. Эксцентриситет характеризует вытянутость эллипса, так как выражается через отношение его полуосей:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Окружность можно считать частным случаем эллипса, у которого $a = b$, т.е. $\varepsilon = 0$.

Если фокусы эллипса лежат на оси Oy, то его уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \ (a > b).$$

В этом случае координаты вершин $A_1(0,-a)$, $A_2(0,a)$, $B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$ и фокусов $F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$ (рис.2).

Пример .

Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $9x^2 + 4y^2 = 36$.

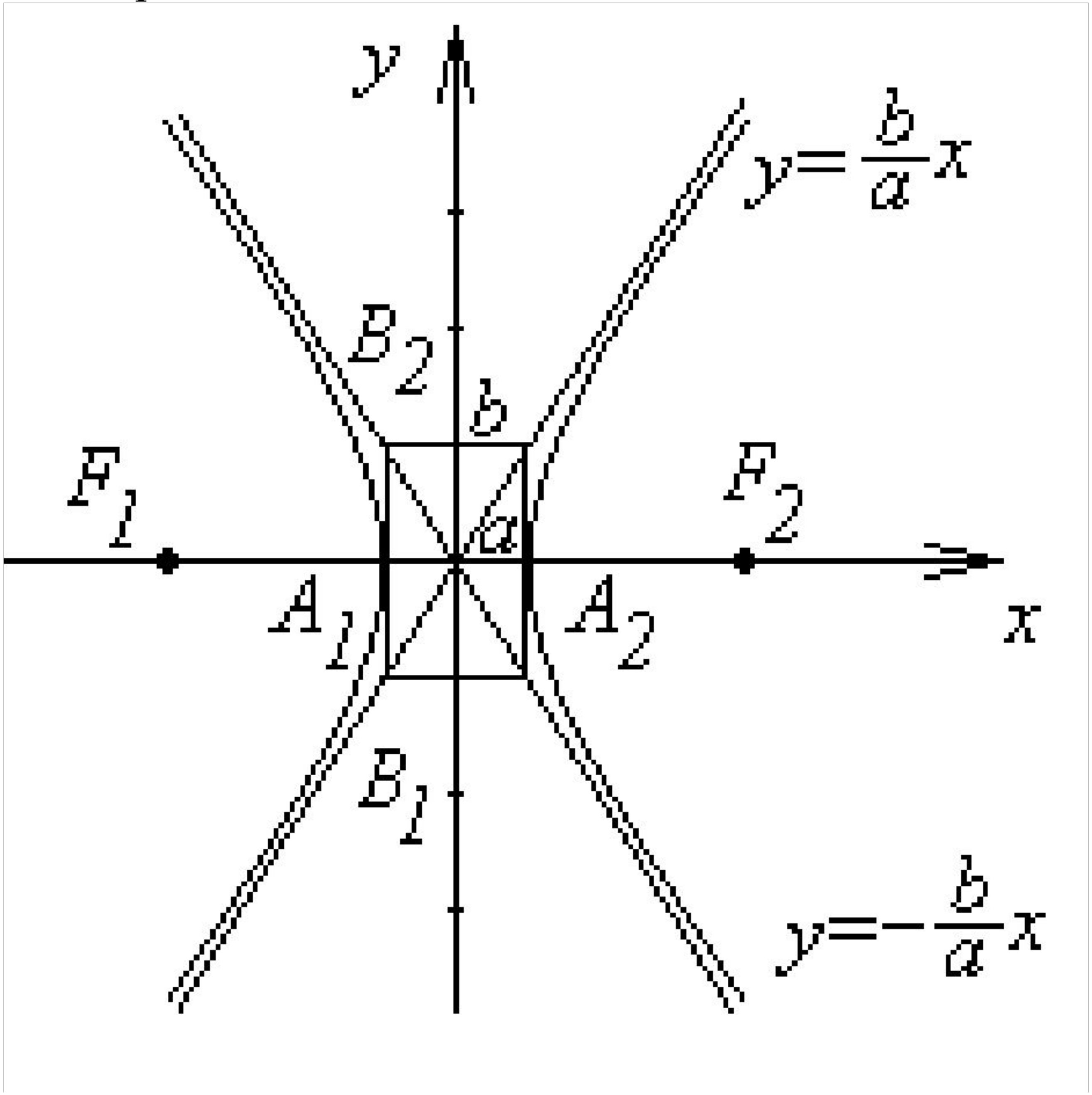
Решение: Разделив на 36, приведем данное уравнение к виду $$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1..$$

Отсюда следует, что большая полуось эллипса $a = 3$, а малая полуось $b = 2$. При этом большая ось эллипса и его фокусы расположены на оси Oy (рис. 2).

Найдем c по формуле $c = \sqrt{a^2 - b^2}$:, $c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$.

Следовательно, координаты фокусов $F_1(0; -\sqrt{5})$ и $F_2(0; \sqrt{5})$, а его эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}..$

3. Гипербола.



3. Гипербола.

Гиперболой называется множество точек плоскости, абсолютной значение разности расстояний которых до двух данных точек F_1 *и* F_2 *(фокусов) есть величина постоянная, обозначаемая* $2a$. Расстояние F_1F_2 обозначается $2c$, причем $c > a$. Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \left(b^2 = c^2 - a^2\right). \qquad (3)$$

При этом ось Ox проходит через фокусы гиперболы, а начало координат находится посредине отрезка F_1F_2, так что c есть расстояние от фокуса до начала координат O. Фокусы имеют координаты $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$. Оси координат являются осями симметрии гиперболы, а точка O – ее центром симметрии. Гипербола пересекает ось абсцисс в точках $A_1(-a,0)$ и $A_2(a,0)$, которые называются ее действительными вершинами, а величина $a = OA_2$ – действительной полуосью гиперболы.

Точки $B_1(0,-b)$ и $B_2(0,b)$ называются мнимыми вершинами гиперболы, а величина $b = OB_2 -$ мнимой полуосью (рис.3). Прямоугольник с центром в начале координат и со сторонами, параллельными координатным осям и проходящими через вершины гиперболы, называется основным прямоугольником гиперболы. Его диагонали

$$y = \pm \frac{b}{a} x \qquad (4)$$

являются асимптотами гиперболы, т.е., прямыми, к которым неограниченно приближаются ветви гиперболы.

Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1.$

Его можно выразить через полуоси гиперболы:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

Так что эксцентриситет характеризует вытянутость основного прямоугольника гиперболы.

Если $a = b$, то гипербола называется равносторонней. В таком случае основной прямоугольник превращается в квадрат, а эксцентриситет равен $\sqrt{2}$.

Если фокусы гиперболы расположены на оси Oy (рис.4), то ее уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \tag{5}$$

В этом случае асимптоты гиперболы

$$x = \pm \frac{b}{a} y,$$

где a и b, как и выше, действительная и мнимая полуоси. Вершины гиперболы (5): $A_1(0,-a)$, $A_2(0,a)$, $B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$, фокусы $F_1(0,-c)$ и $F_2(0,c)$, где $c^2 = a^2 + b^2$.

Пример 3. Начертить гиперболу $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.

Определить ее фокусы, вершины, эксцентриситет, асимптоты.

Решение: Полуоси данной гиперболы (рис.3) $a=2, b=3$, следовательно, ее вершины $A_1(-2{,}0)$, $A_2(2{,}0)$, $B_1(0{,}-3)$, $B_2(0{,}3)$. Через них проводим стороны основного прямоугольника. Его диагонали $y=\pm\frac{3}{2}x$ являются асимптотами гиперболы. Построим их. Затем через вершины A_1 и A_2 гиперболы проводим ее ветви, приближая их к асимптотам. По формуле $c=\sqrt{a^2+b^2}$ находим величину c

$c=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}(\approx 3{,}6)$. Отсюда следует, что $F_1(-\sqrt{13},0)$ и $F_2(\sqrt{13},0)$

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{13}}{2}(\approx 1{,}8).$$

4. Парабола.

Парабола есть множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (фокуса) и от данной прямой, не проходящей через данную точку (директрисы), расположенных в той же плоскости (рис.4).

Каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px \quad (p > 0)$$

где p – расстояние от фокуса до директрисы.

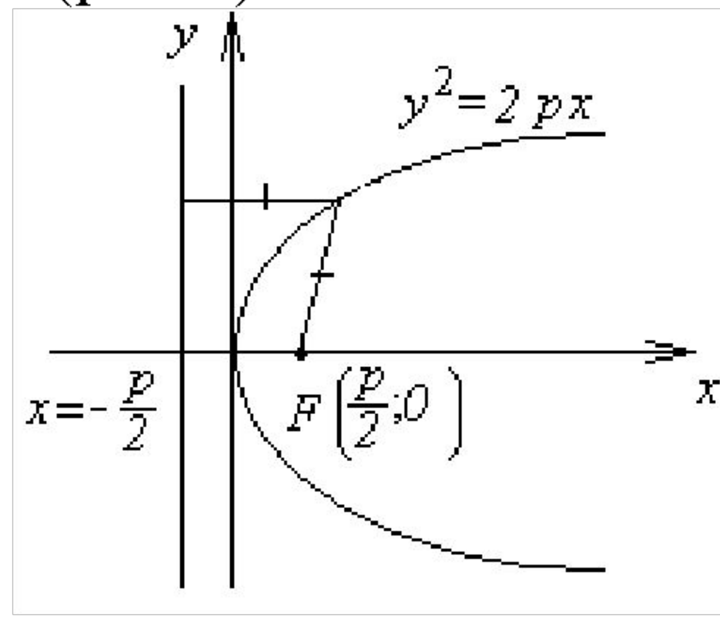


Рис.4

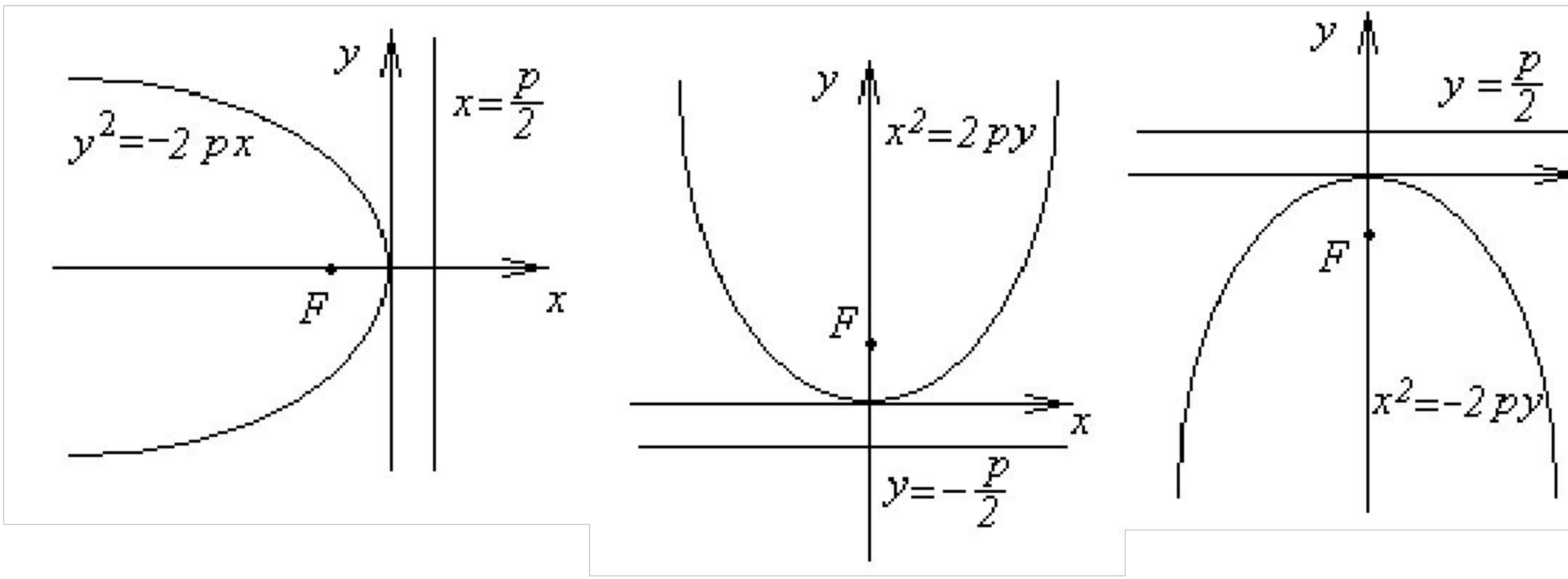
При этом система координат выбрана так, что ось Ox проходит перпендикулярно директрисе через фокус, положительное ее направление выбрано от директрисы в сторону фокуса. Ось ординат проходит параллельно директрисе, посередине между директрисой и фокусом, откуда уравнение директрисы $x=-\frac{p}{2}$, координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2};0\right)$. Начало координат является вершиной параболы, а ось абсцисс – ее осью симметрии. Эксцентриситет параболы $\varepsilon=1$.

В ряде случаев рассматриваются параболы, заданные уравнениями

а) $y^2 = -2px$;

б) $x^2 = 2py$; (для всех случаев $p > 0$)

в) $x^2 = -2py$.



а) б) в)

Рис.5

В случае а) парабола симметрична относительно оси Ox и направлена в ее отрицательную сторону (рис.5).

В случаях б) и в) осью симметрии является ось Oy (рис.5). Координаты фокусов для этих случаев:

а) $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ б) $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$ в) $F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$

.

Уравнения директрис:

а) $x=\frac{p}{2}$ б) $y=-\frac{p}{2}$ в) $y=\frac{p}{2}$.

Пример 4. Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку $A(2;4)$ и симметрична относительно оси Ox. Написать ее уравнение.

Решение:

Так как парабола симметрична относительно оси Ox и проходит через точку A с положительной абсциссой, то она имеет вид, представленный на рис.4.

Подставляя координаты точки A в уравнение такой параболы $y^2 = 2px$, получим $16 = 2p \cdot 2$, т.е. $p = 4$.

Следовательно, искомое уравнение

$$y^2 = 8x,$$

фокус этой параболы $F(2;0)$, уравнение директрисы $x = -2$.