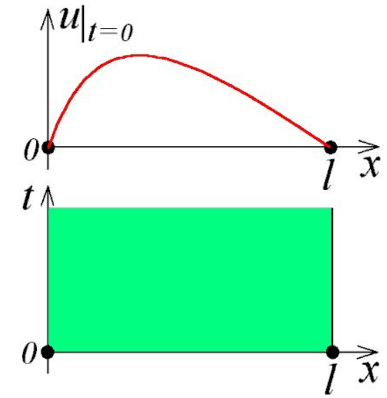
Начально-краевая задача для линейного уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}; & u = u(t,x) \\ u(t,x)|_{t=0} = \varphi_0(x); & 0 \le t \le T \\ u(t,x)|_{x=0} = \psi_0(t); & \\ u(t,x)|_{x=\ell} = \psi_1(t); & 0 \le x \le \ell \end{cases} \qquad (1)$$



$\varphi_0(x)$ – заданное начальное распределение температуры;

$\psi_0(t); \psi_1(t)$ – заданные значения температуры на краях.

Теорема. *Начально-краевая задача (1) поставлена корректно, т.е. у нее существует единственное решение, которое при "малых" изменениях входных данных задачи изменяется "не сильно".*

Условие теплоизоляции, например, при $x = 0$: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0.$

Начально-краевая задача с условиями теплоизоляции на обоих краях или на одном из краев поставлена **корректно**.

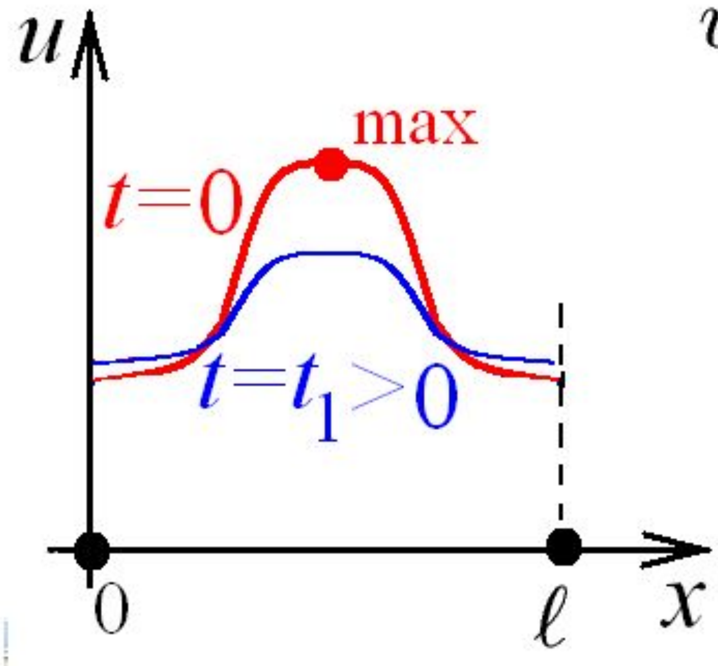
Принцип максимального значения

Рассматривается начально-краевая задача при $0\le t\le T$, $0\le x\le \ell$.

Теорема. Максимальное значение температуры достигается или в начальный момент времени, или на границах $x = 0$, $x = \ell$.

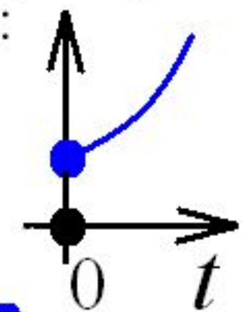
Тепло на отрезке $0 \le x \le \ell$ переходит от теплого к холодному и если нет внешних источников тепла, то температура выравнивается, но не превосходит температуры на границе, если там максимальное значение.

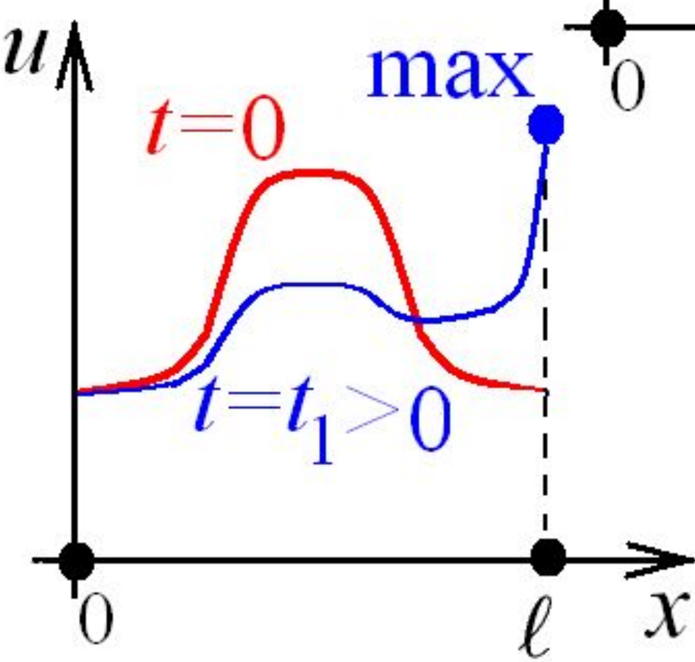
На краях теплоизоляция:



Тепло поступает через край, например, правый:

$$u(t,x)|_{x=\ell} = \psi_1(t)$$





Начально-краевая задача в частном случае:

нулевые краевые условия.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}; & u = u(t,x) \\ u(t,x)|_{t=0} = \varphi_0(x); & 0 \le t \le T \\ u(t,x)|_{x=0} = 0; & \\ u(t,x)|_{x=\ell} = 0; & 0 \le x \le \ell \end{cases} \qquad (2)$$

Метод разделения переменных

$$u(t,x) = T(t)\cdot X(x)\ ;\ \ u_t(t,x) = T_t'(t)\cdot X(x)$$

$$u_x(t,x) = T(t)\cdot X_x'(x)\ ;\ \ u_{xx}(t,x) = T(t)\cdot X_{xx}''(x)$$

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

$$T_t'(t)\cdot X(x) = a^2 T(t)\cdot X_{xx}''(x);$$

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Функции от разных независимых переменных равны друг другу только, когда они константы!

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \mathrm{const}$$

Обозначим эту константу λ:

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \lambda;\quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

$$T'(t) = \lambda a^2 T(t); \;\; X''(x) = \lambda X(x)$$

Из нулевых краевых условий при $x = 0, x = \ell$ следует

$$X(0) = X(\ell) = 0\,;$$

У поставленной для $X(x)$ задачи есть только единственное решение при

$$\lambda_n = -\frac{\pi^2}{\ell^2}n^2 < 0; \;\; n = 1, 2, ...$$

$$\boxed{X(x) = X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi}{\ell}nx\right)\;; \;\; X_n(0) = X_n(\ell) = 0; \;\; n = 1, 2, ...}$$

Тогда

$$\boxed{T'(t) = -\frac{\pi^2}{\ell^2}n^2 a^2 T(t)\;; \;\; T_n(t) = A_n e^{-\pi^2 n^2 a^2 t/\ell^2}; \;\; A_n = \mathrm{const}}$$

Получили много решений

$$\boxed{u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = A_n e^{-\pi^2 n^2 a^2 t/\ell^2} \sin\left(\frac{\pi}{\ell}nx\right); \;\; n = 1, 2, ...}$$

Сумма решений линейных дифференциальных уравнений снова является решением.

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\pi^2 n^2 a^2 t/\ell^2} \sin\left(\frac{\pi}{\ell} nx\right) \quad (3)}$$

$u(t,x)$ удовлетворяет:
уравнению: $u_t = a^2 u_{xx}$
обоим краевым условиям: $u|_{x=0} = u|_{x=\ell} = 0.$
Осталось удовлетворить начальному условию:

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi_0(x)$$

Если в ряд (3) подставить $t = 0$, то поскольку $e^0 = 1$, то вместо начального условия получится равенство

$$u(t,x)|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi}{\ell} nx\right) = \varphi_0(x)$$

Следовательно, A_n есть коэффициенты разложения функции $\varphi_0(x)$ в ряд Фурье по синусам на промежутке $[0, \ell]$, т.е. определяются однозначно и начальное условие удовлетворено.

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\pi^2 n^2 a^2 t/\ell^2} \sin\left(\frac{\pi}{\ell} n x\right) \quad (4)$$

$$-\pi^2 n^2 a^2 t/\ell^2 < 0, \text{ при } t > 0$$

$$A_n e^{-\pi^2 n^2 a^2 t/\ell^2} \to 0, \text{ при } t \to +\infty$$

Доказано, что тригонометрический ряд, задающий решение, сходится при $t \geq 0$, а также при $t \geq 0$, сходятся тригонометрические ряды для производных:

$$u_t(t,x); \;\; u_x(t,x); \;\; u_{xx}(t,x)$$

Но тригонометрический ряд для производной $u_{xx}(t,x)$ в общем случае **расходится!**

Начально-краевая задача для неоднородного уравнения теплопроводности при нулевых краевых условиях

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + \underline{f(t,x)}; & \\ u(t,x)|_{t=0} = \varphi_0(x); & 0 \le t \le T \\ u(t,x)|_{x=0} = 0; & \\ u(t,x)|_{x=\ell} = 0; & 0 \le x \le \ell \end{cases}$$

Разложим заданные функции $\varphi_0(x)$ и $f(t,x)$ в тригонометрические ряды по синусам:

$$\varphi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi}{\ell} n x\right)$$

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{\pi}{\ell} n x\right)$$

где

$$f_n(t) = \frac{2}{\ell} \int\limits_0^{\ell} f(t,x) \sin\left(\frac{\pi}{\ell} n x\right) dx$$

и получим следующую задачу

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{\pi}{\ell} n x\right) \\ u(t,x)|_{t=0} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi}{\ell} n x\right) \\ u(t,x)|_{x=0} = 0 \\ u(t,x)|_{x=\ell} = 0 \end{cases}$$

Решение поставленной задачи ищется в виде:

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{\pi}{\ell} n x\right)}$$

Тогда нулевые краевые условия при $x = 0, x = \ell$ будут удовлетворены.

Начальные условия запишутся в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi}{\ell} n x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin\left(\frac{\pi}{\ell} n x\right)$$

и отсюда

$$T_n(0) = A_n; \;\; n = 1, 2, \ldots$$

Подстановка решения в уравнение приводит к равенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underline{T'_n(t)} \sin\left(\frac{\pi}{\ell} n x\right) =$$

$$= \underline{a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)(-1)\left(\frac{\pi^2}{\ell^2} n^2\right)} \sin\left(\frac{\pi}{\ell} n x\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \underline{f_n(t)} \sin\left(\frac{\pi}{\ell} n x\right)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых

$$\sin\left(\frac{\pi}{\ell} n x\right)$$

получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для $T_n(t)$

$$T_n'(t) = -a^2\left(\frac{\pi^2}{\ell^2}n^2\right)T_n(t) + f_n(t)$$

которые при заданных начальных условиях

$$T_n(0) = A_n;\ \ n = 1, 2, ...$$

имеют единственные решения.

Доказано, что тригонометрический ряд, задающий решение неоднородного линейного уравнения теплопроводности при нулевых краевых условиях, сходится при $t \geq 0$, а также при $t \geq 0$, сходятся тригонометрические ряды для производных:

$$u_t(t,x);\ \ u_x(t,x);\ \ u_{xx}(t,x)$$

Начально-краевая задача для неоднородного уравнения теплопроводности при ненулевых краевых условиях

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(t,x); & \\ u(t,x)|_{t=0} = \varphi_0(x); & 0 \le t \le T \\ u(t,x)|_{x=0} = \psi_1(t); & \\ u(t,x)|_{x=\ell} = \psi_2(t); & 0 \le x \le \ell \end{cases}$$

Задача сводится к предыдущей для вновь введенной функции

$$v(t,x) = u(t,x) - \psi_1(t) - \frac{x}{\ell}\left[\psi_2(t) - \psi_1(t)\right]$$

то есть

$$u(t,x) = v(t,x) + \psi_1(t) + \frac{x}{\ell}\left[\psi_2(t) - \psi_1(t)\right]$$

$$u(t,x) = v(t,x) + \psi_1(t) + \frac{x}{\ell}\left[\psi_2(t) - \psi_1(t)\right]$$

При этом

$$u_t(t,x) = v_t(t,x) + \psi_1'(t) + \frac{x}{\ell}\left[\psi_2'(t) - \psi_1'(t)\right]$$

$$u_x(t,x) = v_x(t,x) + \frac{1}{\ell}\left[\psi_2(t) - \psi_1(t)\right]$$

$$u_{xx}(t,x) = v_{xx}(t,x)$$

Подстановка в исходное уравнение:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(t,x)$$

$$v_t(t,x) + \psi_1'(t) + \frac{x}{\ell}\left[\psi_2'(t) - \psi_1'(t)\right] = a^2 v_{xx} + f(t,x)$$

то есть

$$\boxed{v_t(t,x) = a^2 v_{xx} + f_1(t,x)}$$

где

$$f_1(t,x) = f(t,x) - \psi_1'(t) - \frac{x}{\ell}\left[\psi_2'(t) - \psi_1'(t)\right]$$

Подстановка в начальное условие:

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi_0(x)$$

$$v(t,x)|_{t=0} + \psi_1(0) + \frac{x}{\ell}[\psi_2(0) - \psi_1(0)] = \varphi_0(x)$$

то есть

$$\boxed{v(t,x)|_{t=0} = \varphi_1(x)}$$

где

$$\varphi_1(x) = \varphi_0(x) - \psi_1(0) - \frac{x}{\ell}[\psi_2(0) - \psi_1(0)]$$

Подстановка в первое краевое условие:

$$u(t,x)|_{x=0} = \psi_1(t)$$

$$v(t,x)|_{x=0} + \psi_1(t) + 0 = \psi_1(t)$$

то есть

$$\boxed{v(t,x)|_{x=0} = 0}$$

Подстановка во второе условие:

$$u(t,x)|_{x=\ell} = \psi_2(t)$$

$$v(t,x)|_{x=\ell} + \psi_1(t) + \frac{\ell}{\ell}\left[\psi_2(t) - \psi_1(t)\right] = \psi_2(t)$$

то есть

$$\boxed{v(t,x)|_{x=\ell} = 0}$$

$$\boxed{v_t(t,x) = a^2 v_{xx} + f_1(t,x)}$$

$$\boxed{v(t,x)|_{t=0} = \varphi_1(x)}$$

$$\boxed{v(t,x)|_{x=0} = 0}$$

$$\boxed{v(t,x)|_{x=\ell} = 0}$$

Задача сведена к решенной ранее!