

Логические основы компьютеров

Логические ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРОВ

Логика и компьютер

Логика, высказывания

Логика (др.греч. *λογικός*) – это наука о том, как правильно рассуждать, делать выводы, доказывать утверждения.

Формальная логика отвлекается от конкретного содержания, изучает только истинность и ложность высказываний.



Аристотель
(384-322 до н.э.)

Логическое высказывание – это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Высказывание или нет?

✓ Сейчас идет дождь.

✓ Жирафы летят на север.

~~История – интересный предмет.~~

✓ У квадрата – 10 сторон и все разные.

Красиво!

В городе N живут 2 миллиона человек.

Который час?

Логика и компьютер

Двоичное кодирование – все виды информации кодируются с помощью 0 и 1.

Задача – разработать оптимальные правила обработки таких данных.

Почему «логика»?

Результат выполнения операции можно представить как истинность (1) или ложность (0) некоторого высказывания.

Джордж Буль разработал основы алгебры, в которой используются только 0 и 1 (алгебра логики, булева алгебра).



Логические ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРОВ

Логические операции

Обозначение высказываний

A – Сейчас идет дождь. }
B – Форточка открыта. }

простые высказывания
(элементарные)



Любое высказывание может быть ложно (0) или истинно (1).

Составные высказывания строятся из простых с помощью логических связок (операций) «и», «или», «не», «если ... то», «тогда и только тогда» и др.

A и B Сейчас идет дождь и открыта форточка.

A или не B Сейчас идет дождь или форточка закрыта.

если A, то B Если сейчас идет дождь, то форточка открыта.

A тогда и только тогда, когда B Дождь идет тогда и только тогда, когда открыта форточка.

Операция НЕ (инверсия)

Если высказывание **A** истинно, то «**не A**» ложно, и наоборот.

A	не A
0	1
1	0

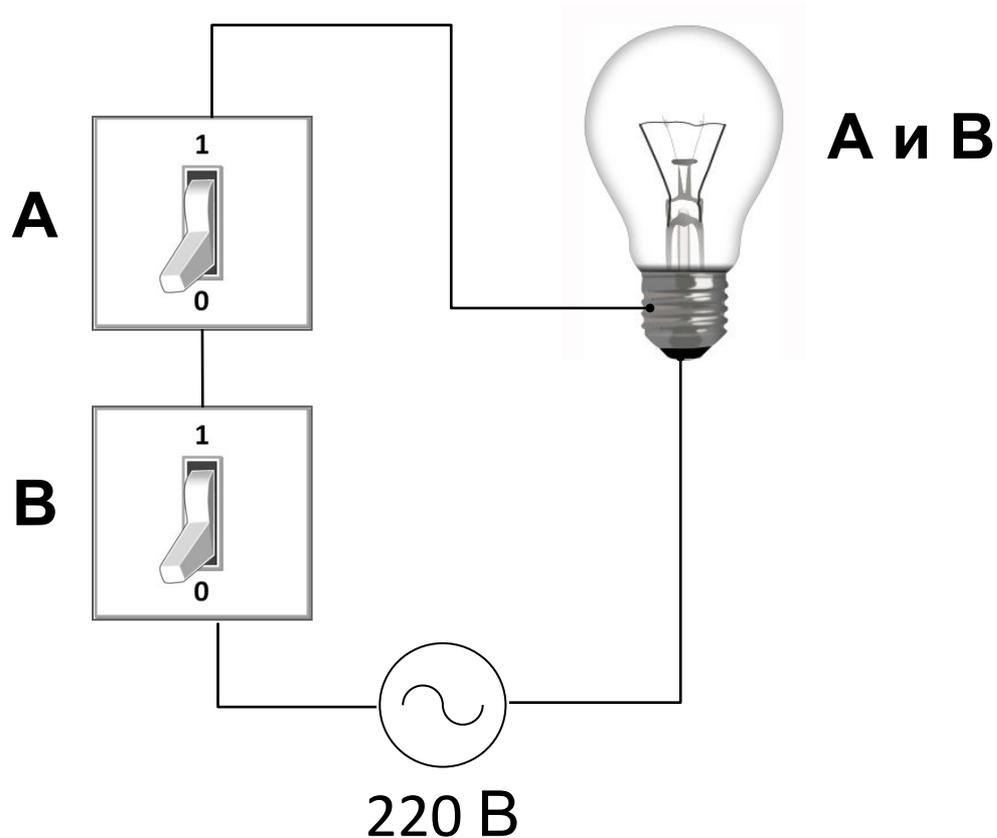
также \bar{A} , $\neg A$,
not A (Паскаль),
! A (Си)

таблица
истинности
операции НЕ

Таблица истинности логического выражения X – это таблица, где в левой части записываются все возможные комбинации значений исходных данных, а в правой – значение выражения X для каждой комбинации.

Операция И

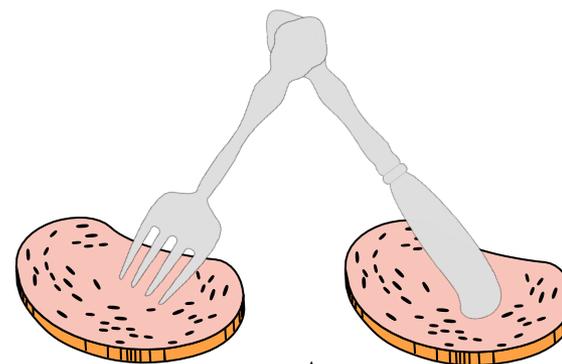
Высказывание «**A и B**» истинно тогда и только тогда, когда **A** и **B** истинны одновременно.



Операция И (логическое умножение, конъюнкция)

	A	B	A и B
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

также: $A \cdot B$, $A \wedge B$,
 A and B (Паскаль),
 A && B (Си)

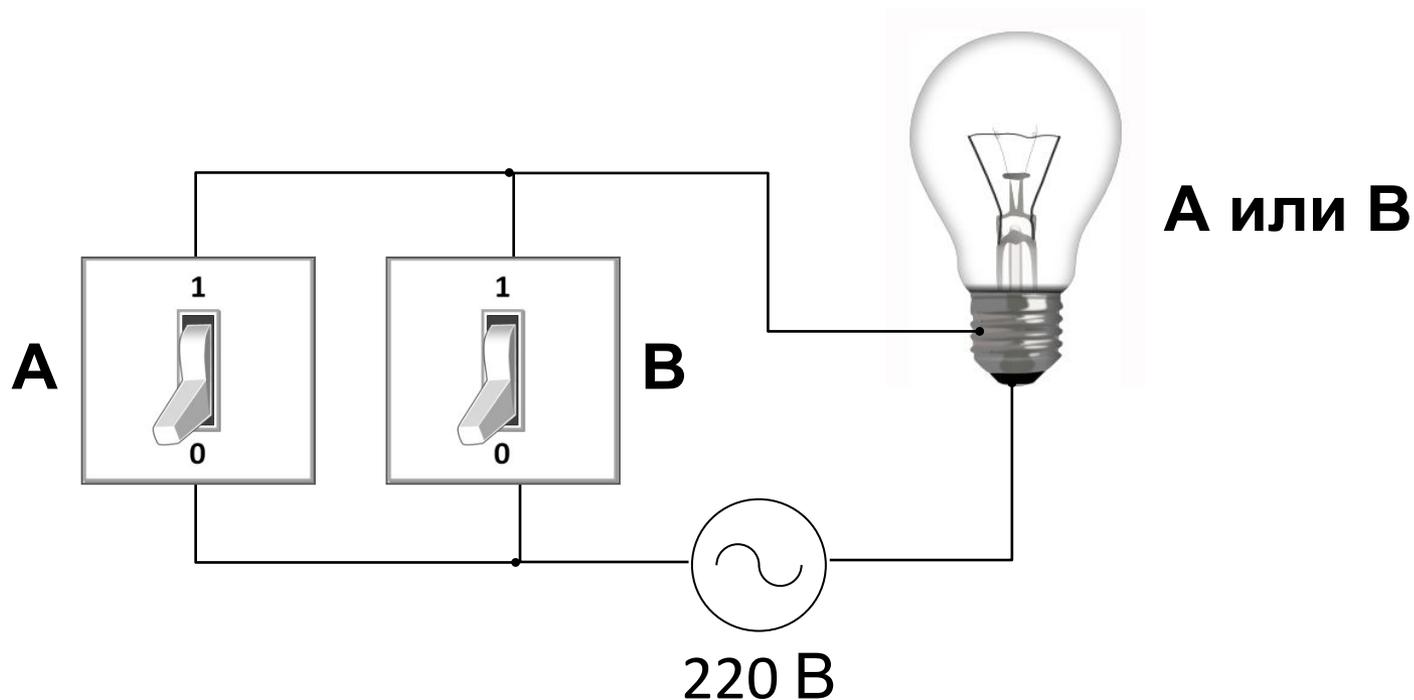


A \wedge
 B

КОНЪЮНКЦИЯ – от лат. *conjunctio* — соединение

Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

Высказывание «**A** или **B**» истинно тогда, когда истинно **A** или **B**, или оба вместе.



Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

A	B	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

также: $A+B$, $A \vee B$,
 $A \text{ or } B$ (Паскаль),
 $A \parallel B$ (Си)

ДИЗЪЮНКЦИЯ – от лат. *disjunctio* — разъединение

Задачи

*В таблице приведены запросы к поисковому серверу. Расположите номера запросов в порядке **возрастания** количества страниц, которые найдет поисковый сервер по каждому запросу. Для обозначения логической операции «ИЛИ» в запросе используется символ |, а для логической операции «И» – &.*

- 1) **принтеры & сканеры & продажа**
- 2) **принтеры & продажа**
- 3) **принтеры | продажа**
- 4) **принтеры | сканеры | продажа**

1 2 3 4

Операция «исключающее ИЛИ»

Высказывание « $A \oplus B$ » истинно тогда, когда истинно A или B , но **не оба одновременно** (то есть $A \neq B$).

«Либо пан, либо пропал».

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

также:
 $A \text{ xor } B$ (Паскаль),
 $A \wedge B$ (Си)

арифметическое
сложение, $1+1=2$

остаток

сложение по модулю 2: $A \oplus B = (A + B) \bmod 2$

Свойства операции «исключающее ИЛИ»

$$A \oplus 0 = A$$

$$A \oplus A = 0$$

$$A \oplus 1 = \bar{A}$$

$$(A \oplus B) \oplus B = ?$$

$$A \oplus B = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

A	B	$A \cdot \bar{B}$	$\bar{A} \cdot B$	$A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$	$A \oplus B$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0

Импликация («если ..., то ...»)

Высказывание « $A \rightarrow B$ » истинно, если не исключено, что из A следует B .

A – «Работник хорошо работает».

B – «У работника хорошая зарплата».

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

Импликация («если ..., то ...»)

«Если Вася идет гулять, то Маша сидит дома».

A – «Вася идет гулять».

B – «Маша сидит дома».

$$A \rightarrow B = 1$$



А если Вася не идет гулять?

Маша может пойти гулять (B=0), а может и не пойти (B=1)!

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквивалентность («тогда и только тогда, ...»)

Высказывание « $A \leftrightarrow B$ » истинно тогда и только тогда, когда A и B равны.

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$A \leftrightarrow B = \overline{A \oplus B} = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Базовый набор операций

С помощью операций **И**, **ИЛИ** и **НЕ** можно реализовать любую логическую операцию.



Сколько всего существует логических операций с двумя переменными?

Штрих Шеффера, «И-НЕ»

$$A | B = \overline{A \cdot B}$$

A	B	A B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Базовые операции через «И-НЕ»:

$$\overline{A} = A | A \quad A \cdot B = (A | B) | (A | B)$$

$$A + B = (A | A) | (B | B)$$



Как доказать?

Стрелка Пирса, «ИЛИ-НЕ»

$$A \downarrow B = \overline{A + B}$$

A	B	$A \downarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Базовые операции через «ИЛИ-НЕ»:



Самостоятельно...

Формализация

Прибор имеет три датчика и может работать, если два из них исправны. Записать в виде формулы ситуацию «авария».

A – «Датчик № 1 неисправен».

B – «Датчик № 2 неисправен».

C – «Датчик № 3 неисправен».

Аварийный сигнал:

X – «Неисправны два датчика».

X – «Неисправны датчики № 1 и № 2» **или**
«Неисправны датчики № 1 и № 3» **или**
«Неисправны датчики № 2 и № 3».



Формализация – это переход к записи на формальном языке!

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

логическая
формула

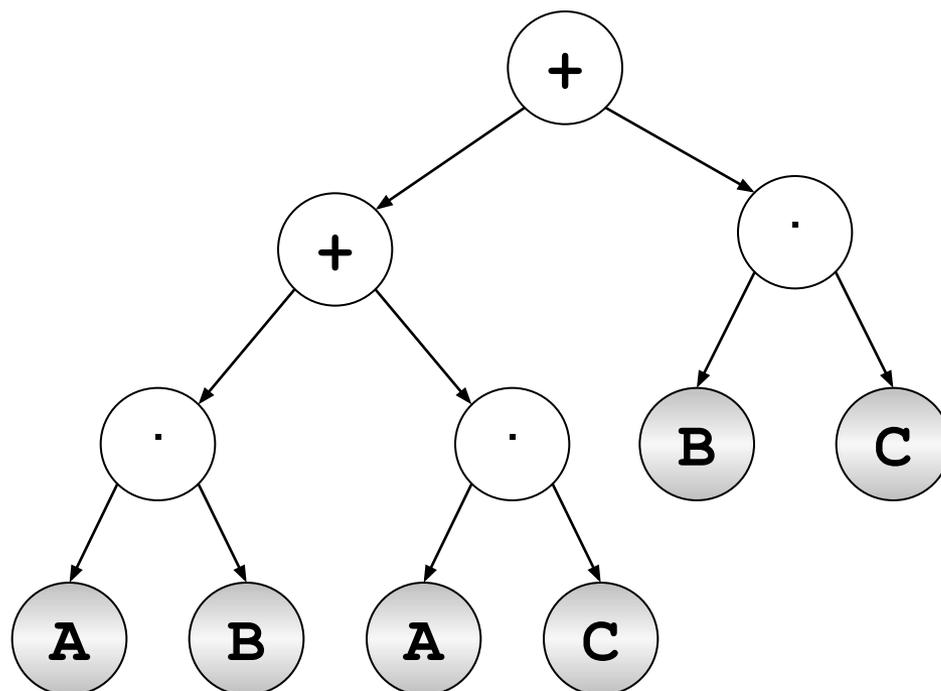
Вычисление логических выражений

1 4 2 5 3

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

Порядок вычислений:

- скобки
- НЕ
- И
- ИЛИ, исключающее ИЛИ
- импликация
- эквивалентность



Составление таблиц истинности

$$X = A \cdot B + \bar{A} \cdot B + \bar{B}$$

	A	B	$A \cdot B$	$\bar{A} \cdot B$	\bar{B}	X
0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
2	1	0	0	0	1	1
3	1	1	1	0	0	1

Логические выражения могут быть:

- **тождественно истинными** (всегда 1, тавтология)
- **тождественно ложными** (всегда 0, противоречие)
- **вычислимыми** (зависят от исходных данных)

Составление таблиц истинности

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

	A	B	C	A·B	A·C	B·C	X
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	1	1
4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	0	1	0	1	0	1
6	1	1	0	1	0	0	1
7	1	1	1	1	1	1	1

Задачи (таблица истинности)

Символом F обозначено одно из указанных ниже логических выражений от трех аргументов: X , Y , Z . Дан фрагмент таблицы истинности выражения F . Какое выражение соответствует F ?

X	Y	Z	F
1	0	0	1
0	0	0	1
1	1	1	0

1) $\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$

2) $X \wedge Y \wedge Z$

3) $X \vee Y \vee Z$

4) $\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z$

1) $\bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z}$

2) $X \cdot Y \cdot Z$

3) $X + Y + Z$

4) $\bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z}$

Упрощённый способ подбора:

Задачи (таблица истинности)

Упрощённый способ подбора:

- 1) один нуль \Rightarrow операция «ИЛИ»
- 2) получить 0, применив «НЕ» к слагаемым:

$$\bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z} = 0$$

1 1 1

- 1) одна единица \Rightarrow операция «И»
- 2) получить 1, применив «НЕ» к сомножителям:

$$\bar{X} \cdot Y \cdot \bar{Z} = 1$$

0 1 0

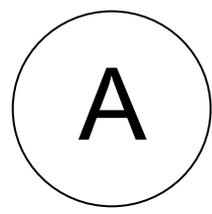
X	Y	Z	F
1	0	0	1
0	0	0	1
1	1	1	0

X	Y	Z	F
1	0	1	0
0	1	0	1
1	1	1	0

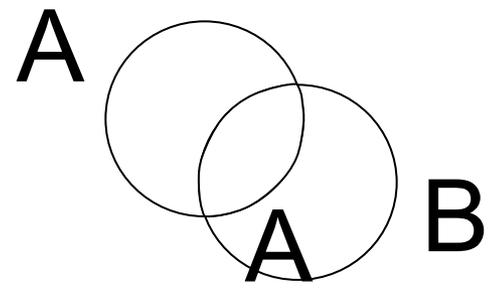
Логические ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРОВ

Диаграммы

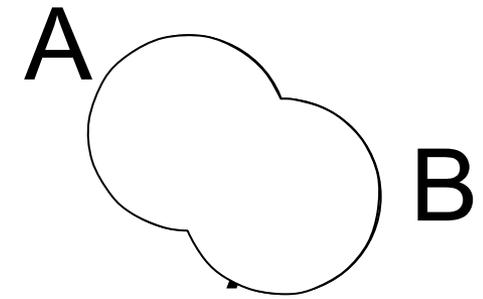
Диаграммы Венна (круги Эйлера)



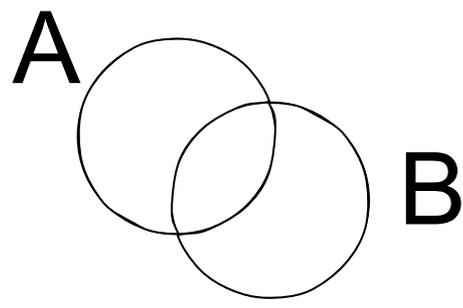
\bar{A}



\cdot
B

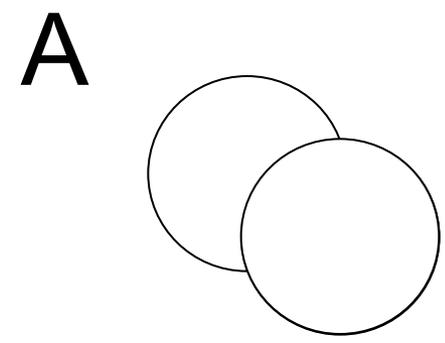


$+$
B



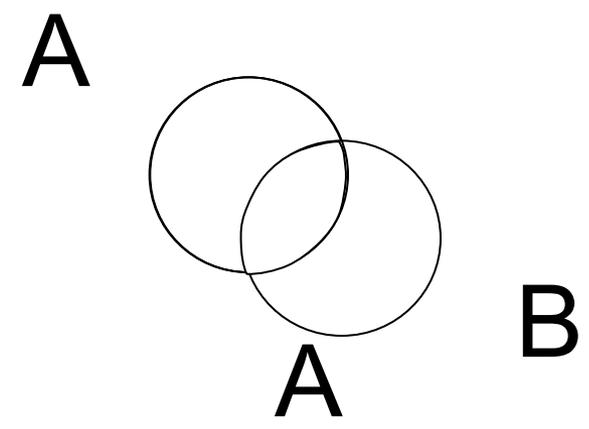
A

\oplus



B

\rightarrow



B

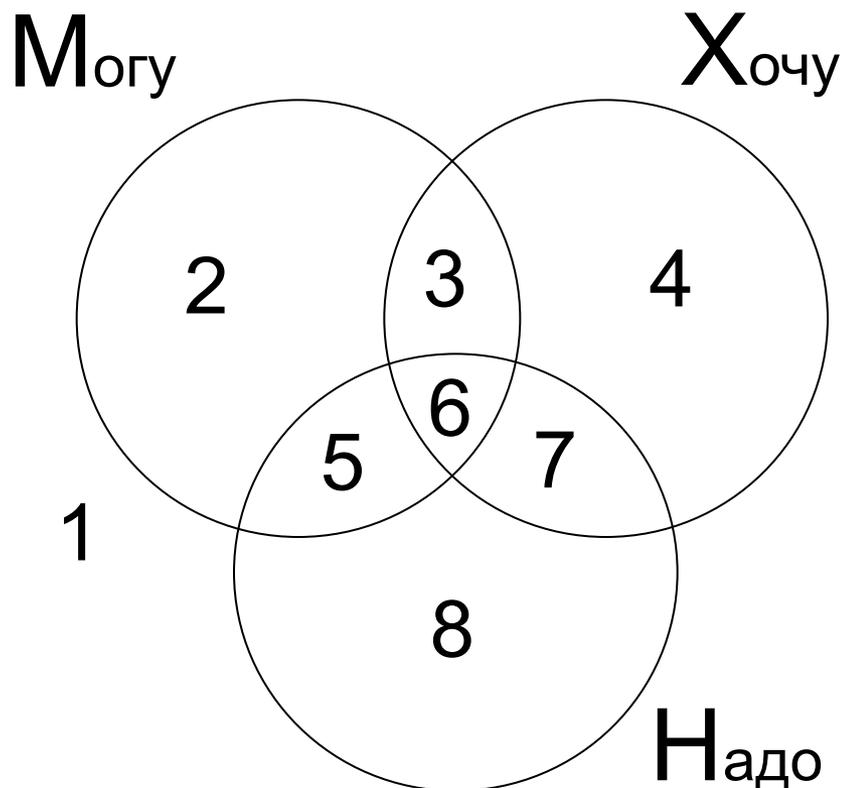
\leftrightarrow

B

B

B

Диаграмма с тремя переменными



$$1 = \bar{M} \cdot \bar{X} \cdot \bar{H} \quad 5 = M \cdot \bar{X} \cdot H$$

$$2 = M \cdot \bar{X} \cdot \bar{H} \quad 6 = M \cdot X \cdot H$$

$$3 = M \cdot X \cdot \bar{H} \quad 7 = \bar{M} \cdot X \cdot H$$

$$4 = \bar{M} \cdot X \cdot \bar{H} \quad 8 = \bar{M} \cdot \bar{X} \cdot H$$

$$3 + 4 = M \cdot X \cdot \bar{H} + \bar{M} \cdot X \cdot \bar{H}$$

$$3 + 4 = X \cdot \bar{H}$$



Логические выражения можно упростить!

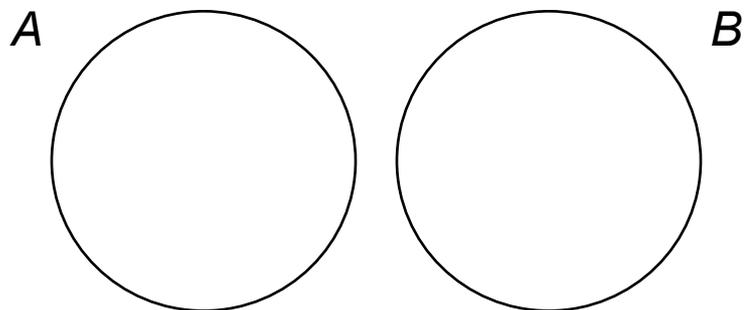
Задачи

Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам :

Запрос	Количество сайтов
<i>огурцы</i>	<i>100</i>
<i>помидоры</i>	<i>200</i>
<i>огурцы & помидоры</i>	<i>50</i>

Сколько сайтов будет найдено по запросу
огурцы | помидоры

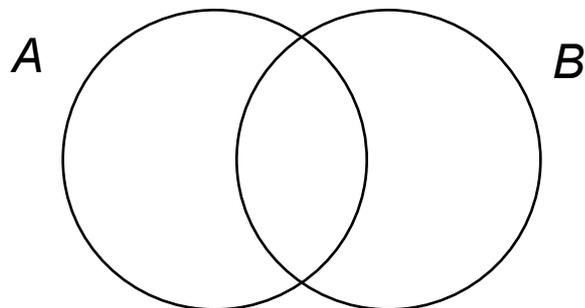
Задачи



$$N_{A|B} =$$

50

огурцы & помидоры



$$N_{A|B} = N_A + N_B - N_{A\&B}$$

огурцы | помидоры

250

огурцы

100

помидоры

200

Задачи

Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам :

Запрос	Количество сайтов
Динамо & Рубин	320
Спартак & Рубин	280
(Динамо Спартак) & Рубин	430

Сколько сайтов будет найдено по запросу
Динамо & Спартак & Рубин



Общее условие с & можно отбросить !

Задачи

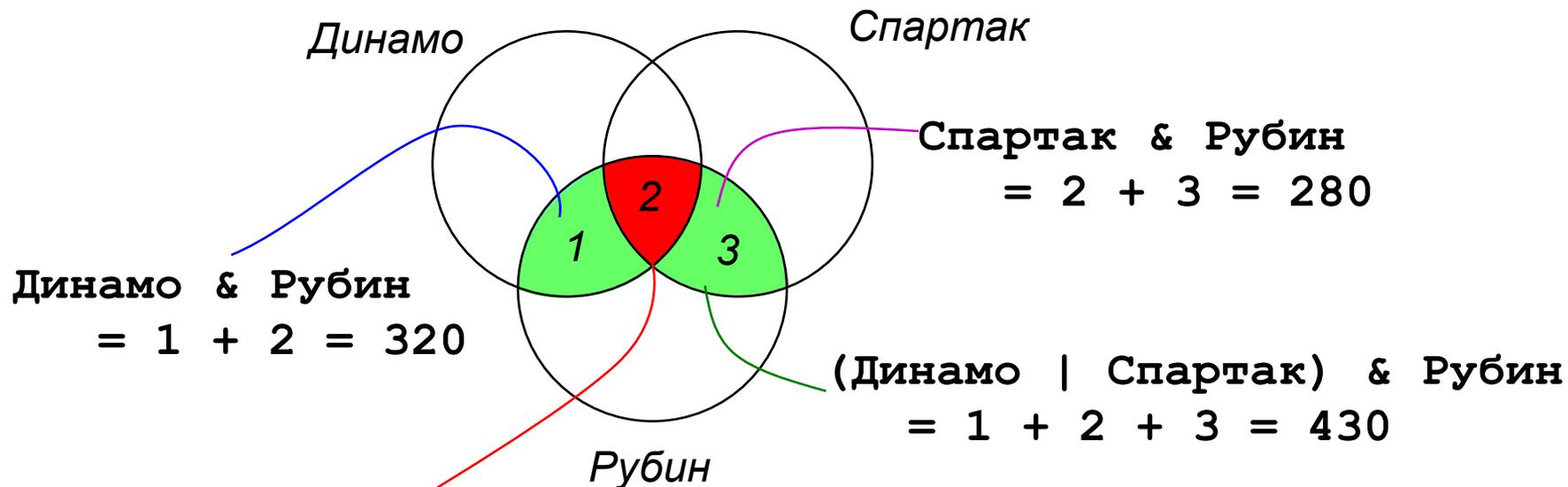
Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам :

Запрос	Количество сайтов
<i>Динамо</i>	<i>320</i>
<i>Спартак</i>	<i>280</i>
<i>Динамо Спартак</i>	<i>430</i>

Сколько сайтов будет найдено по запросу
Динамо & Спартак

Ответ: $320 + 280 - 430 =$ **170**

Задачи



Динамо & Спартак & Рубин

$$= 2$$

$$= (320 + 280) - 430 = \mathbf{170}$$

Задачи

Некоторый сегмент сети Интернет состоит из 1000 сайтов. Поисковый сервер в автоматическом режиме составил таблицу ключевых слов для сайтов этого сегмента. Вот ее фрагмент:

Ключевое слово	Количество сайтов, для которых данное слово является ключевым
сканер	200
принтер	250
монитор	450

Сколько сайтов будет найдено по запросу
(принтер | сканер) & монитор
если по трем следующим запросам найдено:

принтер | сканер – 450 сайтов,

принтер & монитор – 40 сайтов

сканер & монитор – 50 сайтов.

Задачи

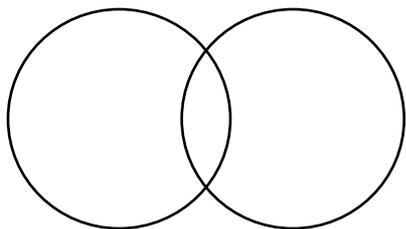
(принтер | сканер) & монитор = ?

A (сканер)

B (принтер)

450

принтер | сканер



$$N_{A|B} = N_A + N_B - N_{A\&B}$$

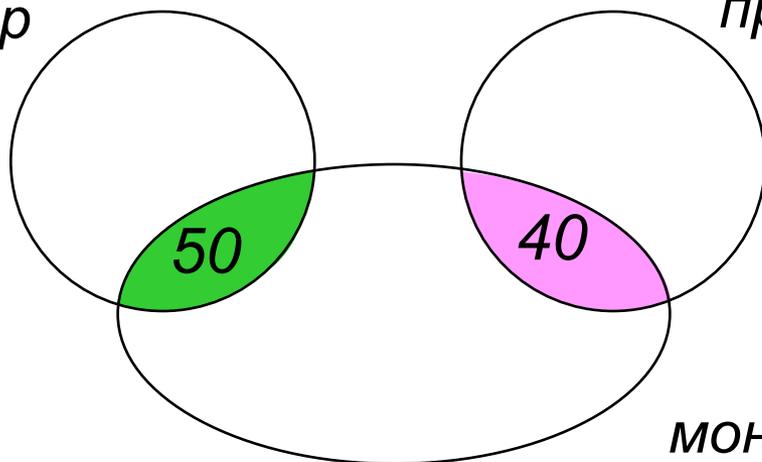
0

сканер 200

принтер 250

сканер

принтер



принтер & монитор = 40

сканер & монитор = 50

монитор

40 + 50 = 90

Сложная задача

Ниже приведены запросы и количество страниц, которые нашел поисковый сервер по этим запросам в некотором сегменте Интернета:

мезозой	500
кроманьонец	600
неандерталец	700
мезозой кроманьонец	800
мезозой неандерталец	1000
неандерталец & (мезозой кроманьонец)	200

Сколько страниц будет найдено по запросу

кроманьонец & (мезозой | неандерталец)

Логические ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРОВ

Упрощение логических выражений

Законы алгебры логики

название	для И	для ИЛИ
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
операции с константами	$A \cdot 0 = 0, A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A, A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
законы де Моргана	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Упрощение логических выражений

Шаг 1. Заменить операции $\oplus \rightarrow \leftrightarrow$ на их выражения через **И**, **ИЛИ** и **НЕ**:

$$A \oplus B = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

$$A \leftrightarrow B = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

Шаг 2. Раскрыть инверсию сложных выражений по формулам де Моргана:

Шаг 3. Используя законы логики, упростить выражение, стараясь применять закон исключения третьего.

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}, \quad \overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

Упрощение логических выражений

$$Q = M \cdot X \cdot \bar{H} + \bar{M} \cdot X \cdot \bar{H} = (M + \bar{M}) \cdot X \cdot \bar{H} = X \cdot \bar{H}$$

$$X = (B \rightarrow A) \cdot \overline{(A + B)} \cdot (A \rightarrow C)$$

раскрыли \rightarrow

$$= (\bar{B} + A) \cdot \overline{(A + B)} \cdot (\bar{A} + C)$$

формула де Моргана

$$= (\bar{B} + A) \cdot \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot (\bar{A} + C)$$

распределительный

$$= (\bar{B} \cdot \bar{A} + A \cdot \bar{A}) \cdot \bar{B} \cdot (\bar{A} + C)$$

исключения третьего

$$= \bar{B} \cdot \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot (\bar{A} + C)$$

повторения

$$= \bar{B} \cdot \bar{A} \cdot (\bar{A} + C)$$

поглощения

$$= \bar{B} \cdot \bar{A}$$

Задачи (упрощение)

Какое логическое выражение равносильно выражению

$A \wedge \neg(\neg B \vee C)$?

1) $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$

2) $A \wedge \neg B \wedge \neg C$

3) $A \wedge B \wedge \neg C$

4) $A \wedge \neg B \wedge C$

1) $\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} + \overline{\overline{C}}$

2) $A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$

3) $A \cdot B \cdot \overline{C}$

4) $A \cdot \overline{B} \cdot C$

$$A \cdot \overline{(\overline{B} + C)} = A \cdot \overline{\overline{B}} \cdot \overline{C} = A \cdot B \cdot \overline{C}$$

Логические уравнения

$$\bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B} \cdot C = 1$$

$$A=1, B=0, C=1$$

$$\bar{A} \cdot B = 1$$

или

$$A \cdot \bar{B} \cdot C = 1$$

A=0, B=1, C – **любое**
2 решения: (0, 1, 0), (0, 1, 1)

! Всего 3 решения!

$$K \cdot L + M \cdot L \cdot N + K \cdot L \cdot \bar{M} = 1$$

K=1, L=1,
M и N – **любые**
4 решения

M=1, L=1, N=1,
K – **любое**
2 решения

K=1, L=1, M=0,
N – **любое**
2 решения

$$L \cdot (K + M \cdot N) = 1$$

! Всего 5 решений!