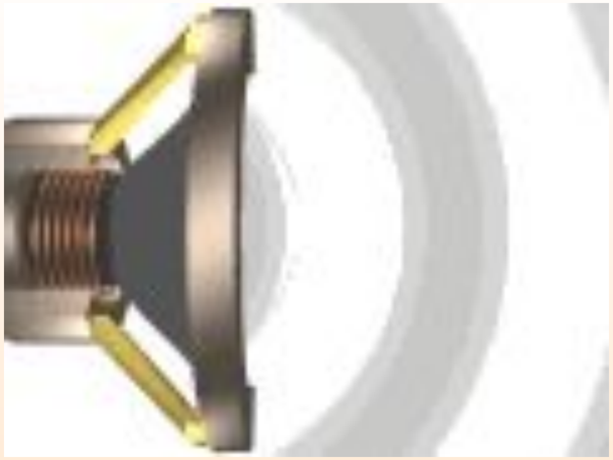
Тема 1 ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Примеры колебательных процессов

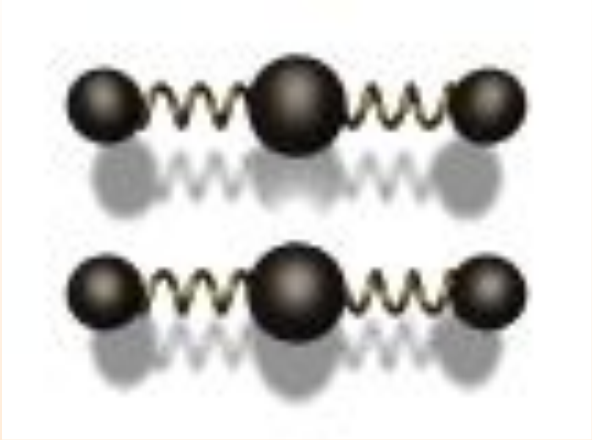
Круговая волна на поверхности жидкости, возбуждаемая точечным источником (гармонически колеблющимся шариком).



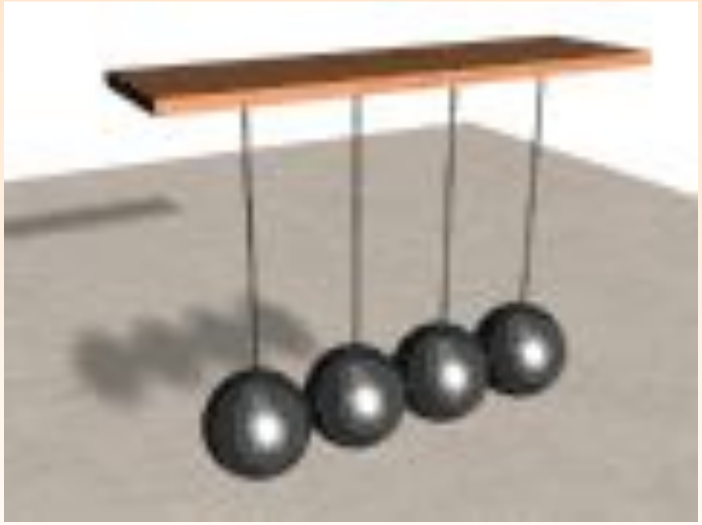
Генерация акустической волны громкоговорителем.

Примеры колебательных процессов

Поперечная волна в сетке, состоящей из шариков, скреплённых пружинками. Колебания масс происходят перпендикулярно направлению распространения волны.



Возможные типы колебаний атомов в кристалле.



В случае **абсолютно упругого столкновения шаров** (нет потерь энергии) скорость и угол отклонения крайних шаров одинаковы, а все промежуточные шары находятся в покое.

В **реальности** общая энергия системы со временем уменьшается за счет трения о воздух, нагревания шаров, возбуждения акустических волн и т.д. В результате амплитуда отскока крайних шаров уменьшается, а центральные шары начинают совершать колебательные движения.

Из приведенного примера следуют *три признака колебательного движения:*

- ***повторяемость*** (***периодичность***) *– движение по одной и той же траектории туда и обратно*;
- ***ограниченность*** *пределами крайних положений*;
- ***действие силы***, *описываемой функцией* $F = -kx$.

$$x = A\cos\varphi$$

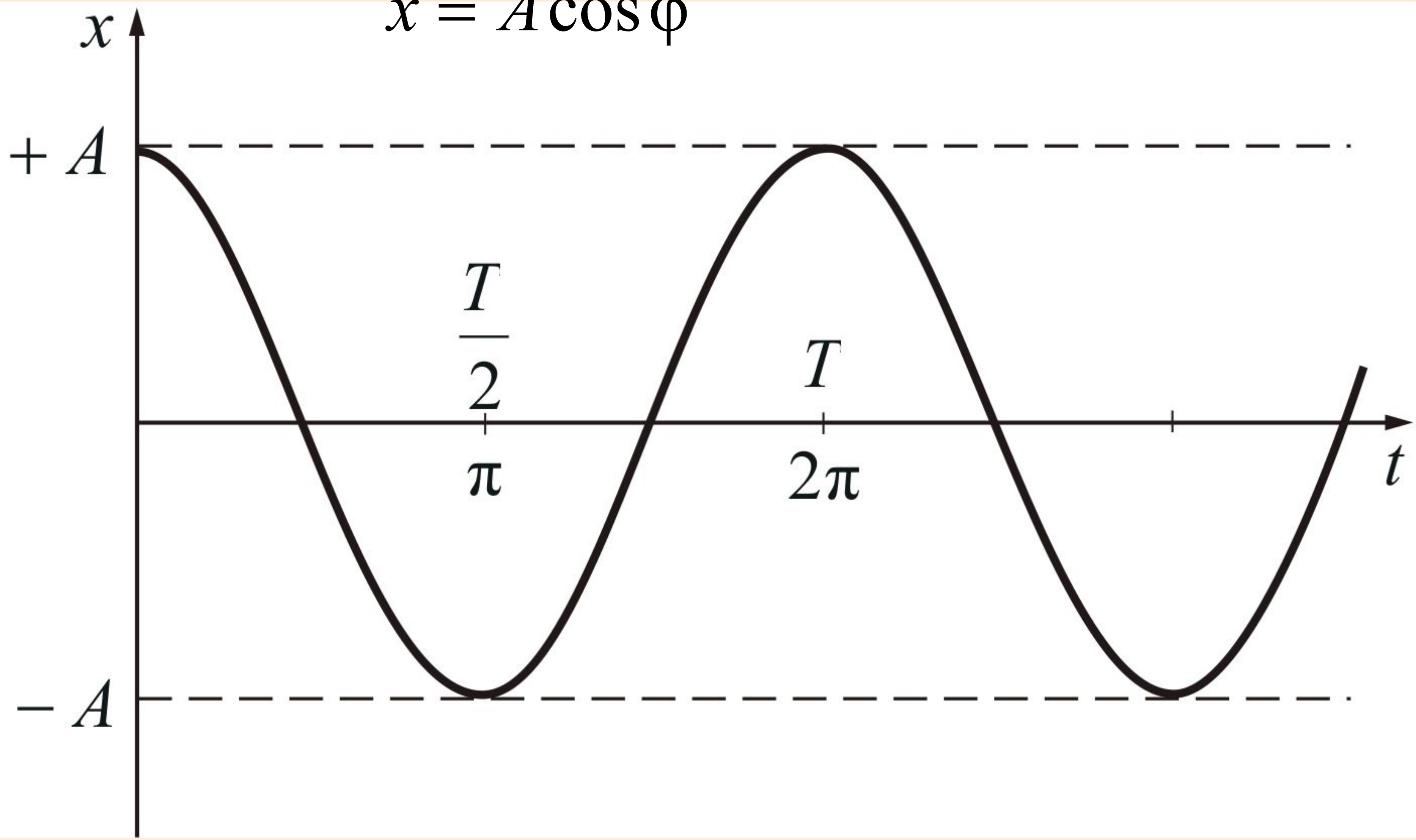
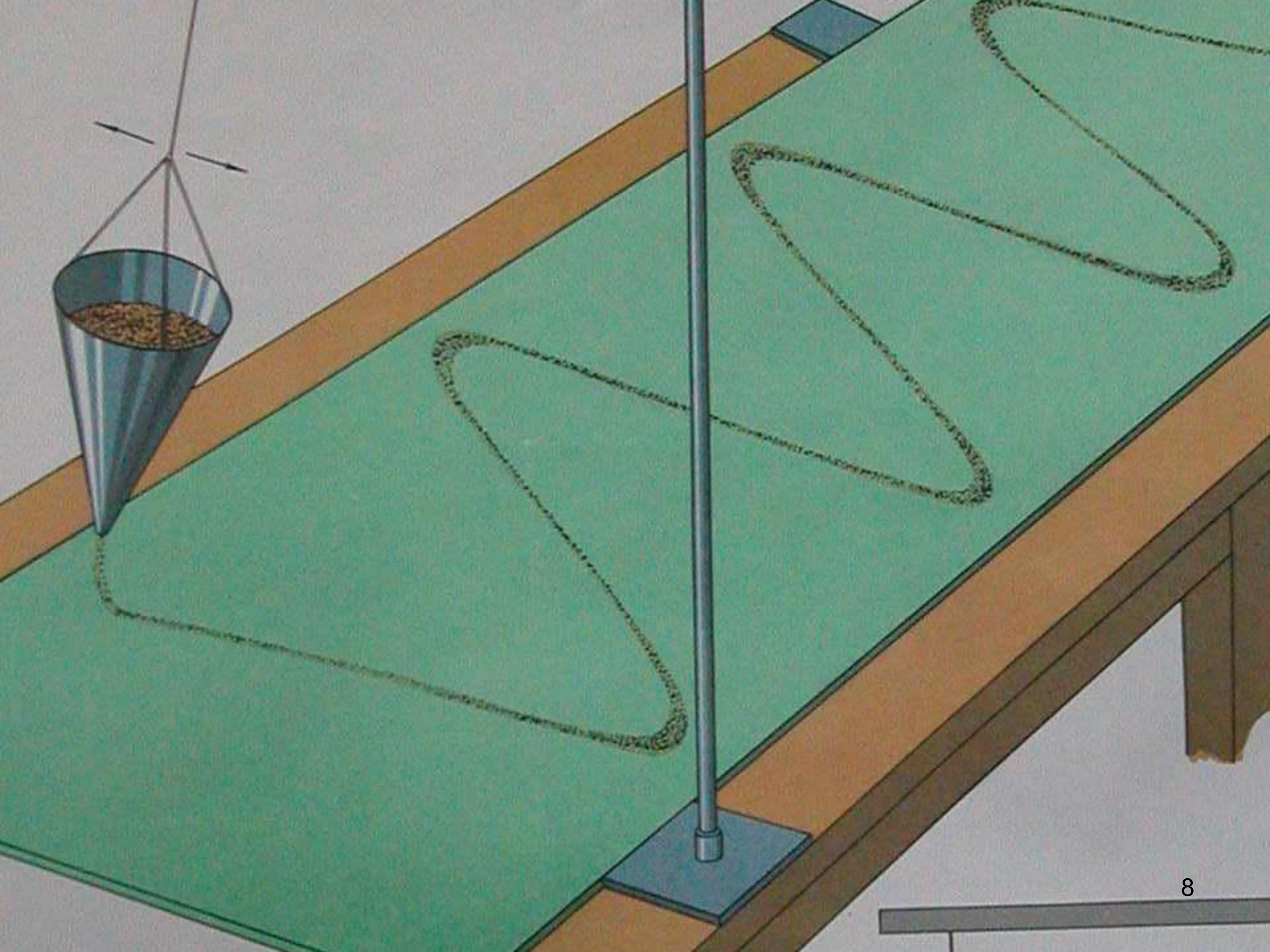
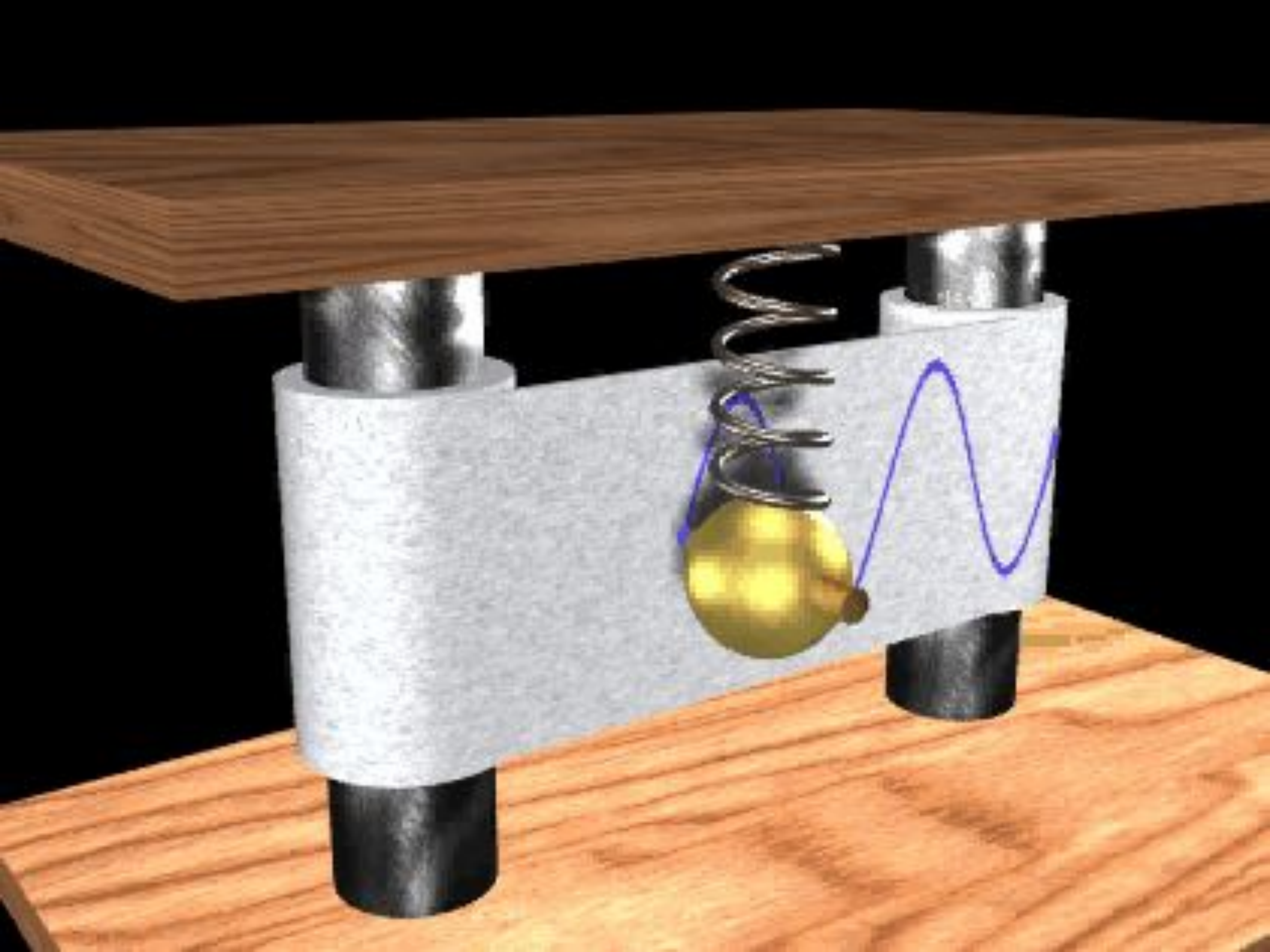


Рисунок 2





Колебания называются ***периодическими***, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени.

- Простейшим типом периодических колебаний являются так называемые ***гармонические колебания.***
- Любая колебательная система, в которой возвращающая сила прямо пропорциональна смещению, взятому с противоположным знаком (например, $\boldsymbol{F = -kx}$), совершает ***гармонические колебания.***
- Саму такую систему часто называют ***гармоническим осциллятором***.

•Движение от некоторой начальной точки до возвращения в ту же точку, например от $x = A$ к $x = -A$ и обратно в

$x = A$, называется ***полным колебанием***.

- ***Частота колебаний* ν** определяется, как число полных колебаний в 1 секунду. Частоту, измеряют в герцах (Гц):
- 1 Гц = 1 колеб. в секунду.

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad (1.1.2)$$

- ***T – период колебаний*** – минимальный промежуток времени, по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебание

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{\nu} \qquad (1.2.3)$$

- ***ω – циклическая (круговая) частота*** – число полных колебаний за 2π секунд.

$$\omega_0 = 2\pi\nu \qquad (1.2.2)$$

- Фаза φ *не влияет на форму кривой x(t), а влияет лишь на ее положение в некоторый произвольный момент времени t.*

- *Гармонические колебания являются всегда* ***синусоидальными.***
- *Частота и период гармонических колебаний не зависят от амплитуды.*

Смещение описывается уравнением

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

тогда, по определению: (1.2.4)

скорость $$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi) \qquad (1.2.5)$$

ускорение $$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$\omega_0 A = \upsilon_m$ *– амплитуда скорости;*

$\omega_0^2 A = a_m$ *– амплитуда ускорения.*

1.3 Графики смещения скорости и ускорения

Уравнения колебаний запишем в следующем виде:

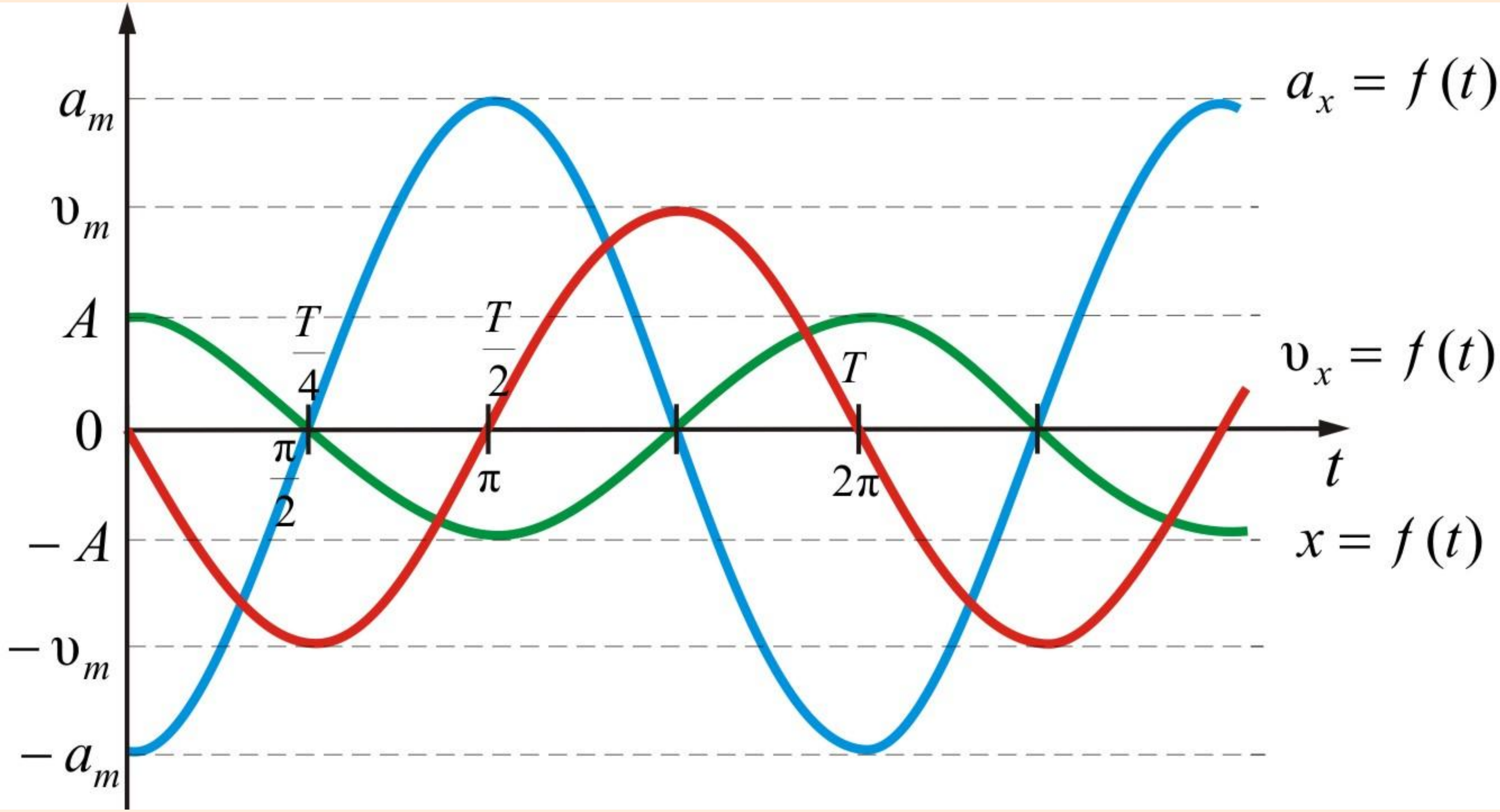
$$\begin{cases} x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \upsilon_x = -\upsilon_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ a_x = -a_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{cases} \qquad (1.3.1)$$

Из этой системы уравнений можно сделать следующие выводы:

- ***скорость*** *колебаний тела максимальна и равна амплитуде скорости в момент прохождения через положение равновесия* ($x = 0$).

- ***При максимальном смещении*** ($x = \pm A$) ***скорость равна нулю.***

- ***Ускорение*** *равно нулю при прохождении телом положения равновесия и достигает наибольшего значения, равного амплитуде ускорения при наибольших смещениях.*



a_m
υ_m
A
0
$-A$
$-\upsilon_m$
$-a_m$
$\frac{T}{4}$
$\frac{T}{2}$
T
$\frac{\pi}{2}$
π
2π
t
$a_x = f(t)$
$\upsilon_x = f(t)$
$x = f(t)$

Рисунок 3

1.4 Основное уравнение динамики гармонических колебаний

• Исходя из второго закона, $F = ma$, можно записать

$$F_x = -m\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi) = -m\omega_0^2 x \qquad (1.4.1)$$

$$F_x = -m\omega_0^2 x$$

сила F пропорциональна x и всегда направлена к положению равновесия (поэтому ее и называют ***возвращающей силой***). Период и фаза силы совпадают с периодом и фазой ускорения.

• Примером сил удовлетворяющих (1.4.1) являются *упругие силы*. Силы же имеющие иную природу, но удовлетворяющие (1.4.1) называются *квазиупругими*.

Квазиупругая сила

$$F_x = -kx, \qquad (1.4.2)$$

где k – коэффициент квазиупругой силы

Сравнивая (1.4.1) и (1.4.2) видим, что $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ $\quad a_x = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$

Получим основное уравнение динамики гармонических колебаний, вызываемых упругими силами:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \text{ или } m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0; \quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0,$$ тогда

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Основное уравнение динамики гармонических колебаний

Решение этого уравнения всегда будет выражение вида

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Круговая частота колебаний

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

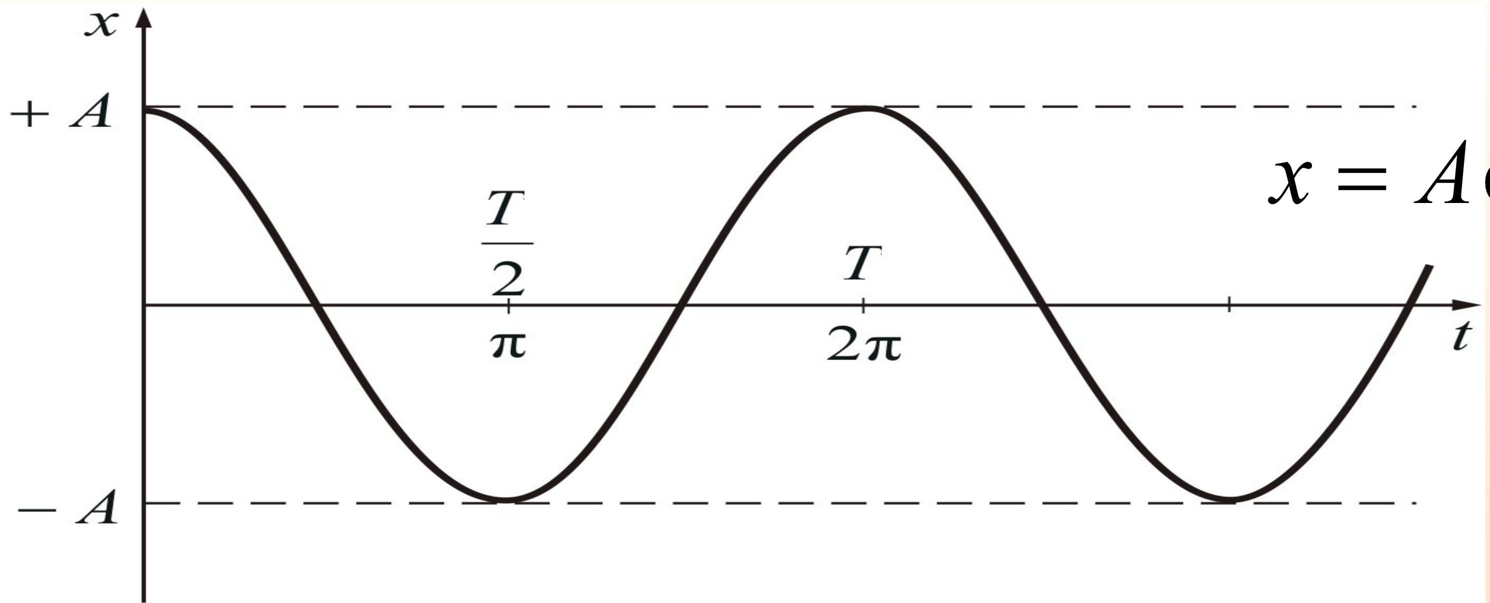
но

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ тогда

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



$$x = A\cos\varphi$$

1.5 Энергия гармонических колебаний

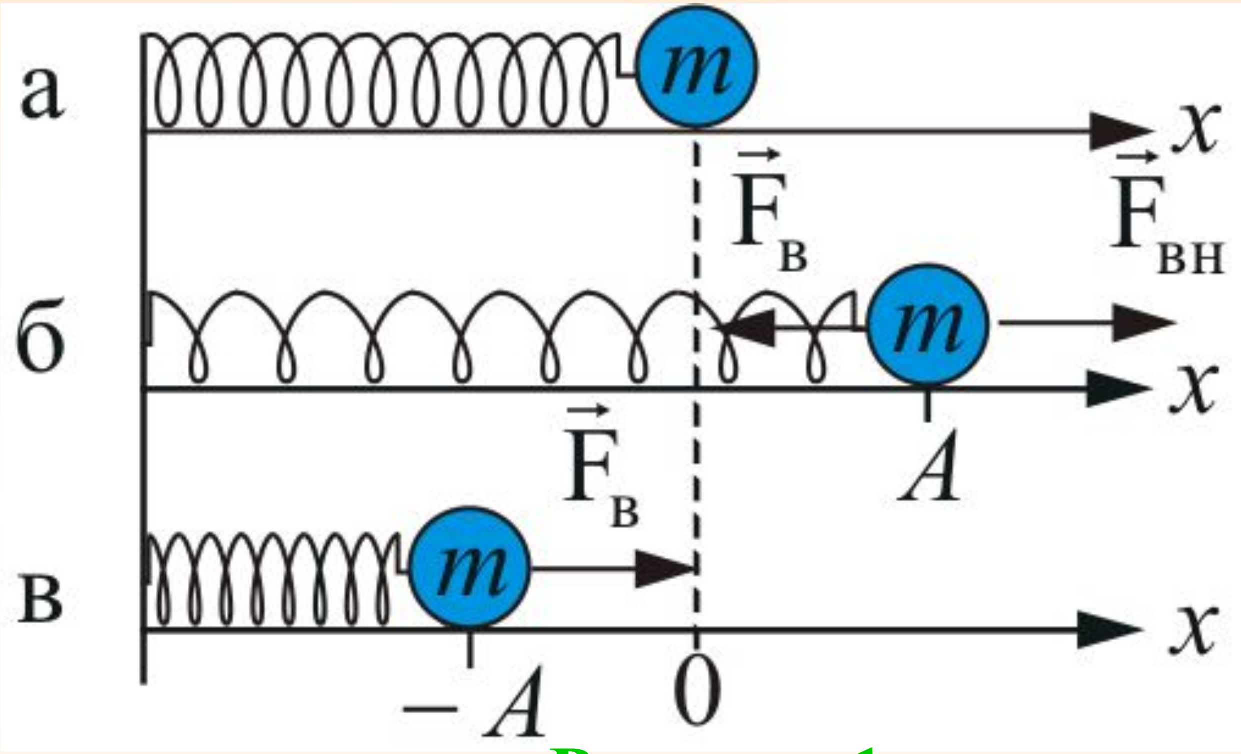


Рисунок 1

Потенциальная энергия тела U, *измеряется той работой, которую произведет возвращающая сила* $F_x = -kx$

$$F_x = -\frac{dU}{dx}; \quad dU = -F dx = kx dx, \text{ отсюда } U = k\int_0^x x dx$$ или

•***Потенциальная энергия***

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi) \qquad (1.5.1)$$

•***Кинетическая энергия***

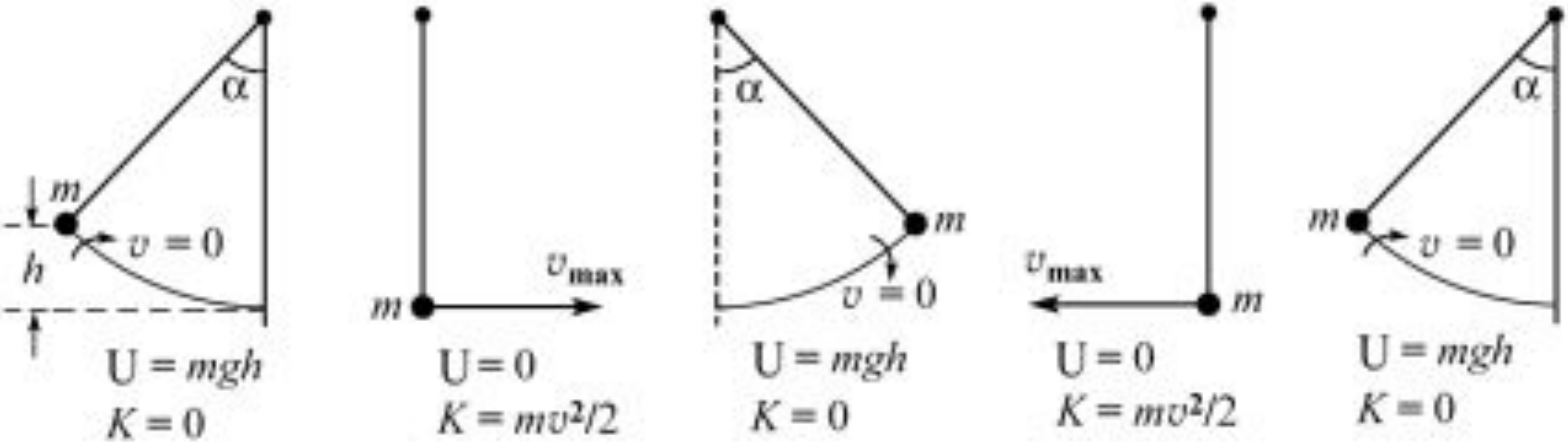
$$K = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) \qquad (1.5.2)$$

• ***Полная энергия:***

$$E = U + K = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2, \text{ или } E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2 \qquad (1.5.3)$$

Полная механическая энергия гармонически колеблющегося тела пропорциональна квадрату амплитуды колебания.

Колебания груза под действием сил тяжести

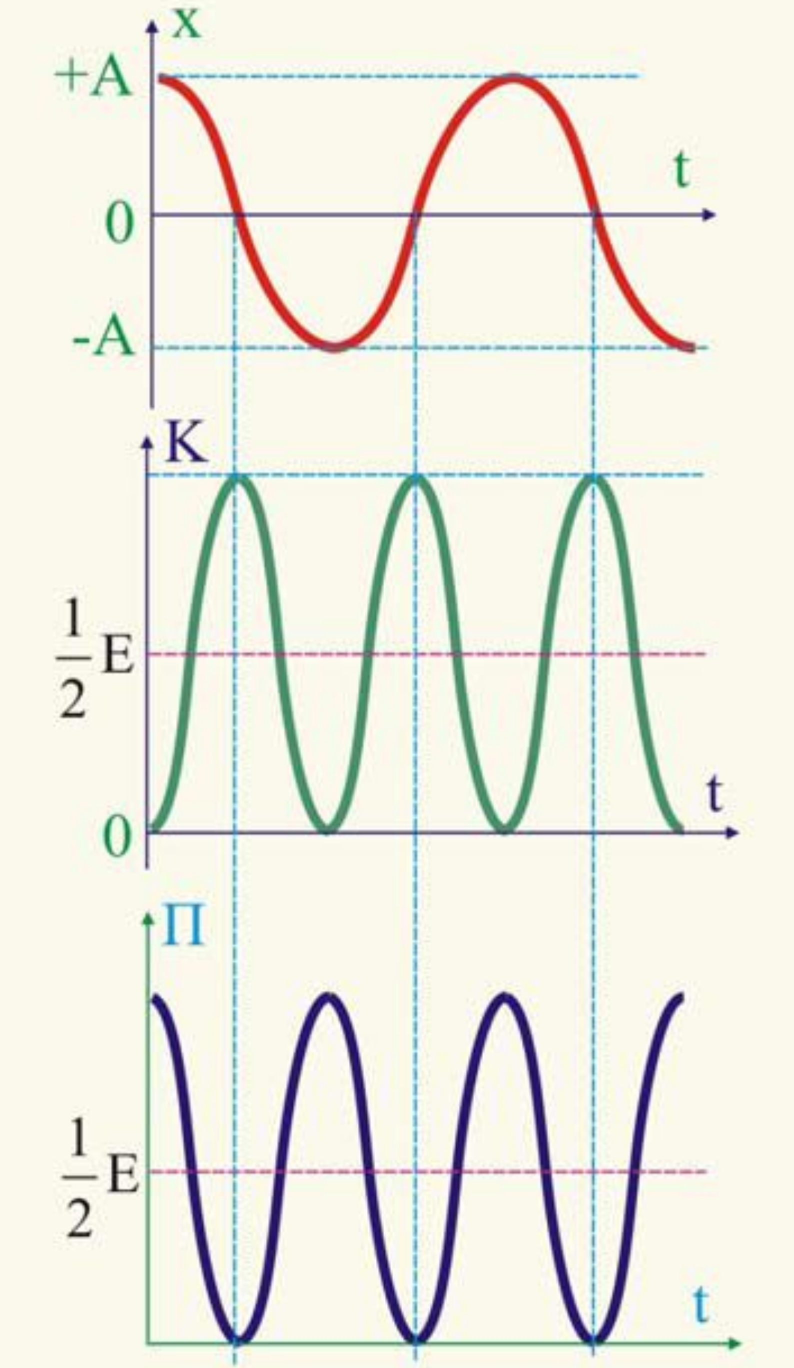


Максимум потенциальной энергии, (из 1.5.1)

$$U_{\max} = mgh = \frac{1}{2}kA^2$$

Максимум кинетической энергии $K_{\max} = \dfrac{m\upsilon^2}{2} = \dfrac{1}{2}kA^2$

но когда $K = \max$, $U = 0$ и наоборот.

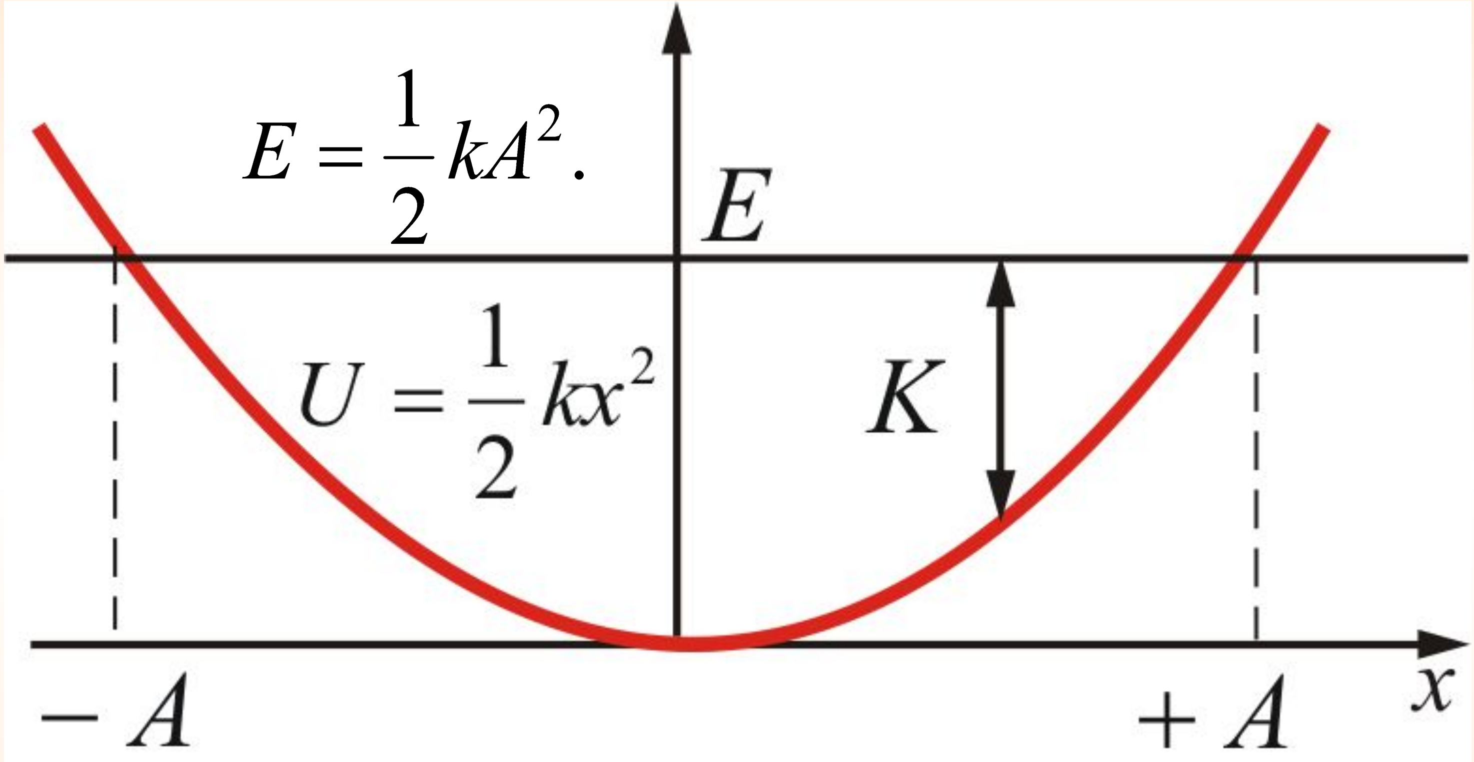


При колебаниях совершающихся под действием потенциальных (консервативных) сил, происходит переход кинетической энергии в потенциальную и наоборот, но их ***сумма в любой момент времени постоянна.***

Рисунок 5

На рисунке 6 приведена ***кривая потенциальной энергии***

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$



$$E = \frac{1}{2}kA^2.$$

$$K = E - U$$

1.6 Гармонический осциллятор

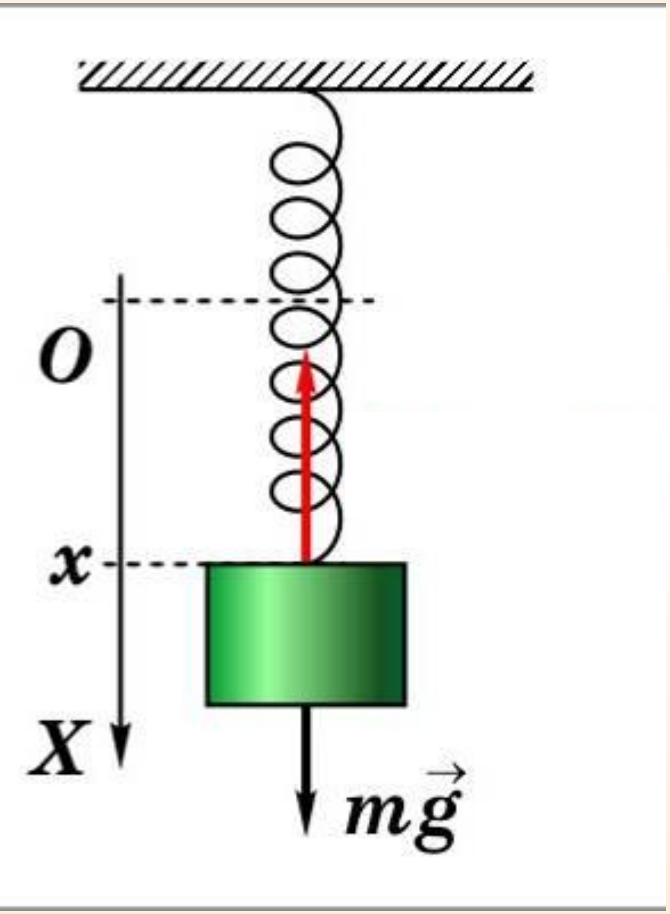


Рисунок 7

1. ***Пружинный маятник*** – это груз массой m, подвешенный на абсолютно упругой пружине с жесткостью k, совершающий гармонические колебания под действием *упругой силы* $F = -kx$

Из второго закона Ньютона $F = ma$; или $F = - kx$ получим ***уравнение движения маятника***:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0 \qquad (1.6.1)$$

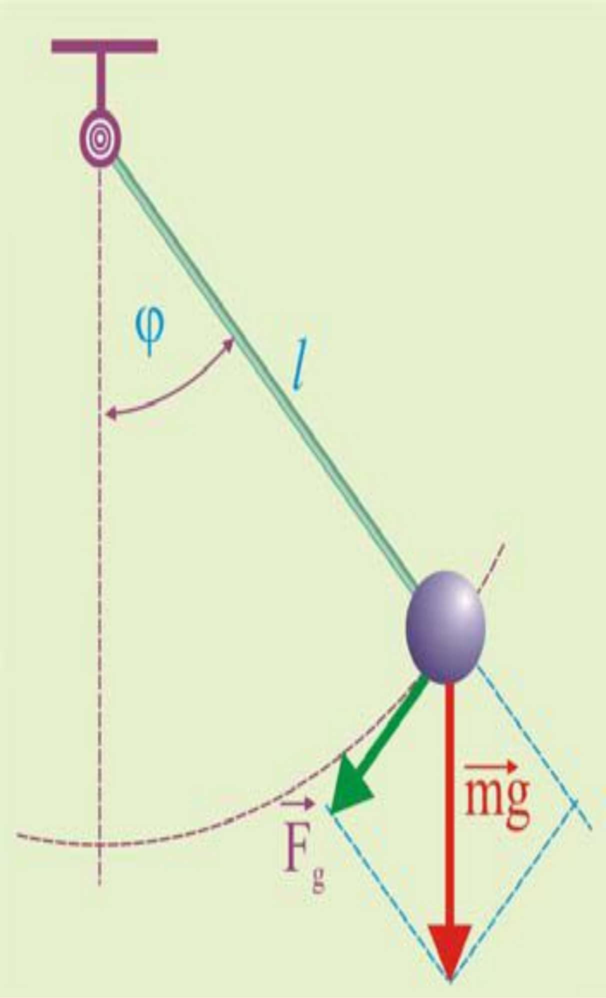
Решение этого уравнения – гармонические колебания вида:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

циклическая частота **ω** период ***T***

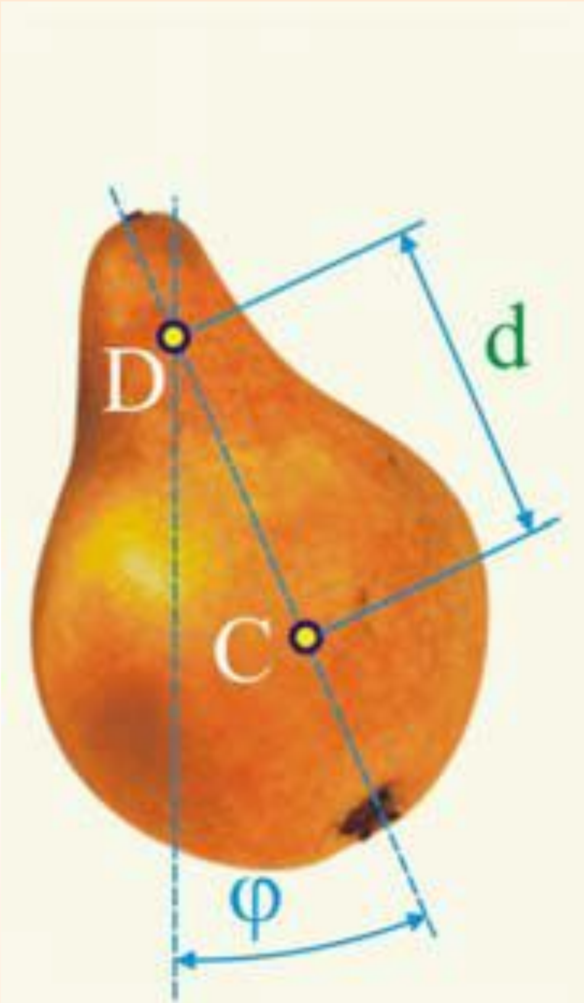
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

2 *Математическим маятником* – *называется идеализированная система, состоящая из невесомой, нерастяжимой нити, на которую подвешена масса, сосредоточенная в одной точке* (шарик на длинной тонкой нити).



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$ -собственная частота

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$ -период колебаний математического маятника



3 ***Физический маятник*** – это *твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной* ***оси, проходящей через точку подвеса D, не совпадающую с центром масс С***

l – расстояние между точкой подвеса и центром инерции маятника *D-C.*

J – момент инерции маятника относит. точки подвеса *D*.

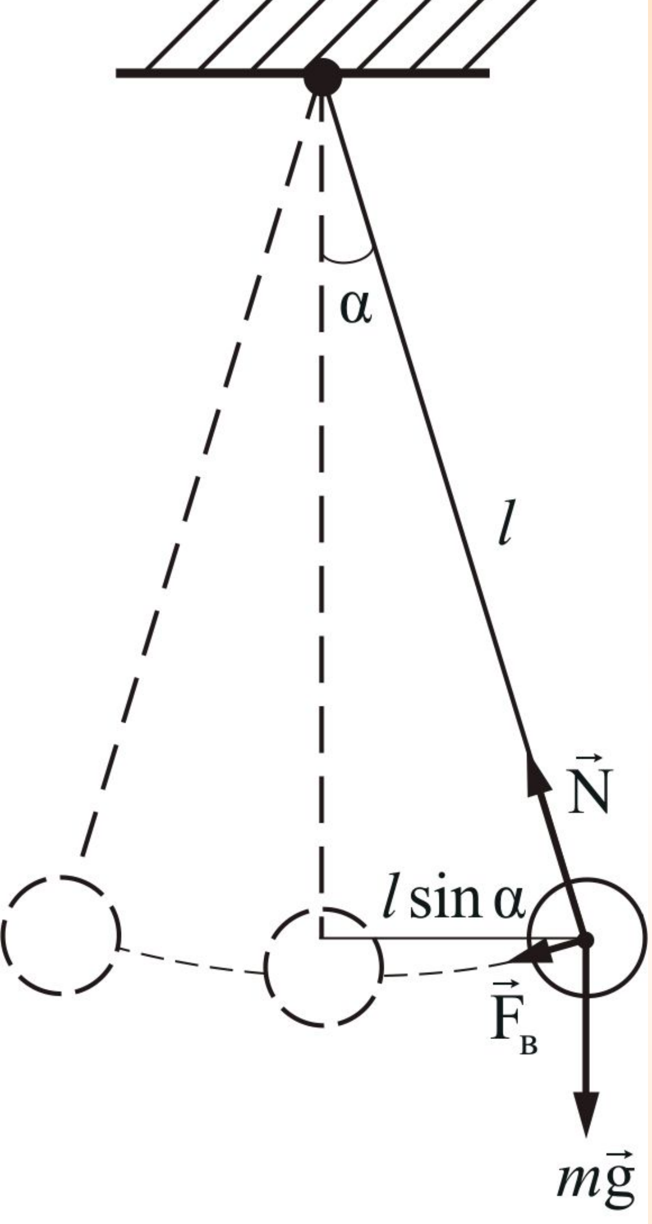
$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{J}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$$

$$l_{\text{пр.}} = \frac{J}{ml}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр.}}}{g}}$$

$l_{\text{пр.}}$ – ***приведенная*** *длина физического маятника* – это длина такого математического маятника, период колебания которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.



- Все приведенные соотношения для математического и физического маятников справедливы ***для малых углов отклонения*** (***меньше 15°***), когда $x = l\alpha$ мало отличается от длины хорды $l\sin\alpha$ (меньше чем на 1%).

3.1 Свободные затухающие механические колебания

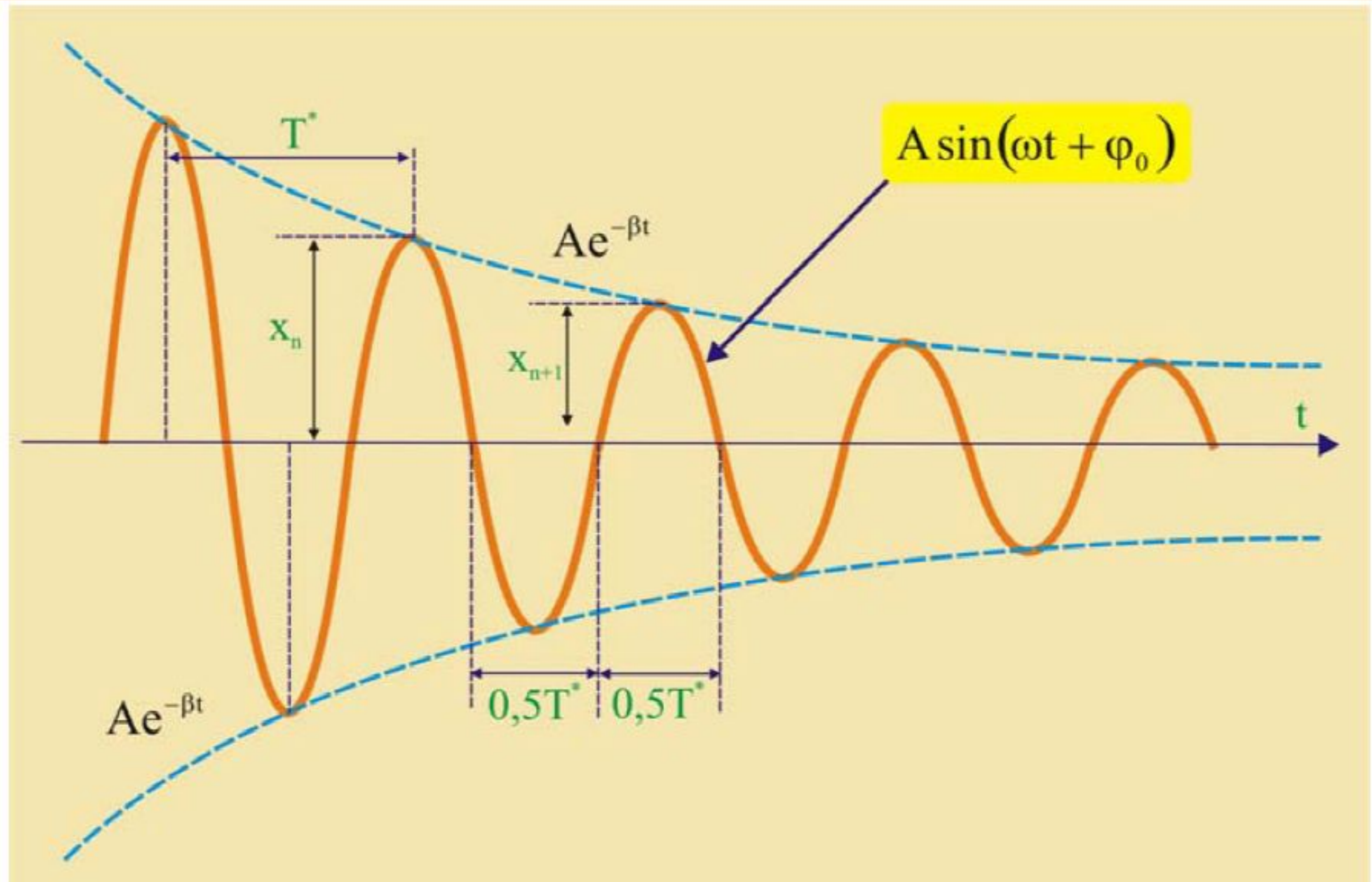
Все реальные колебания являются затухающими. Энергия механических колебаний постепенно расходуется на работу против сил трения и амплитуда колебаний уменьшается.

Сила трения (или *сопротивления*)

$$\vec{F}_{тр} = -r\vec{\upsilon}$$

где r – коэффициент сопротивления,

$\vec{\upsilon}$ – скорость движения



T^*
$A\sin(\omega t + \varphi_0)$
$Ae^{-\beta t}$
x_n
x_{n+1}
t
$Ae^{-\beta t}$
$0{,}5T^*$
$0{,}5T^*$

Второй закон Ньютона для затухающих *прямолинейных* колебаний вдоль оси *x*

$$ma_x = -kx - r\upsilon_x$$

где kx – возвращающая сила, $r\upsilon_x$ – сила трения.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{r}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = 0$$

Введем обозначения $\dfrac{r}{2m} = \beta$; $\dfrac{k}{m} = \omega_0^2$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (3.1.1)$$

Решение уравнения (3.1.1) имеет вид (при $\beta \leq \omega_0$)

Решение уравнения (3.1.1) имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \qquad (3.1.2)$$

Найдем *частоту колебаний* ω. $(\omega \neq \omega_0)$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \qquad \beta \leq \omega_0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\ ; \qquad \beta = \frac{r}{2m}\ ; \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}.$$

период- $$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}},$$

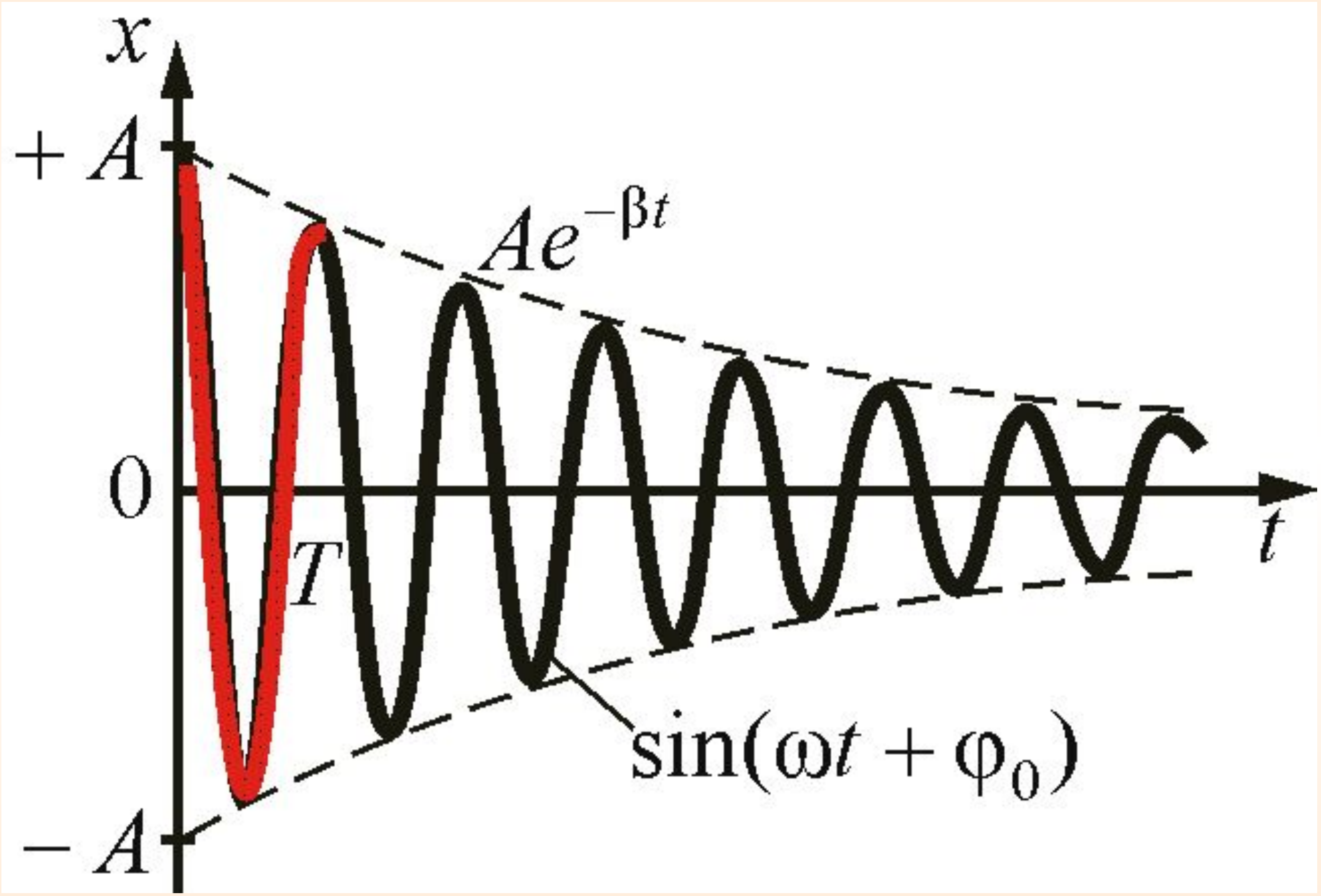
Логарифмическим декрементом затухания называется *натуральный логарифм отношения амплитуд, следующих друг за другом через период T.*

$$\chi = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T; \qquad \chi = \beta T$$

$$\frac{A_0}{A_\tau} = e^{\beta\tau} = e^1, \text{ откуда } \quad \beta\tau = 1; \quad \beta = \frac{1}{\tau}.$$

Следовательно, *коэффициент затухания* β – есть физическая величина, обратная времени, в течение которого *амплитуда уменьшается в e раз*,

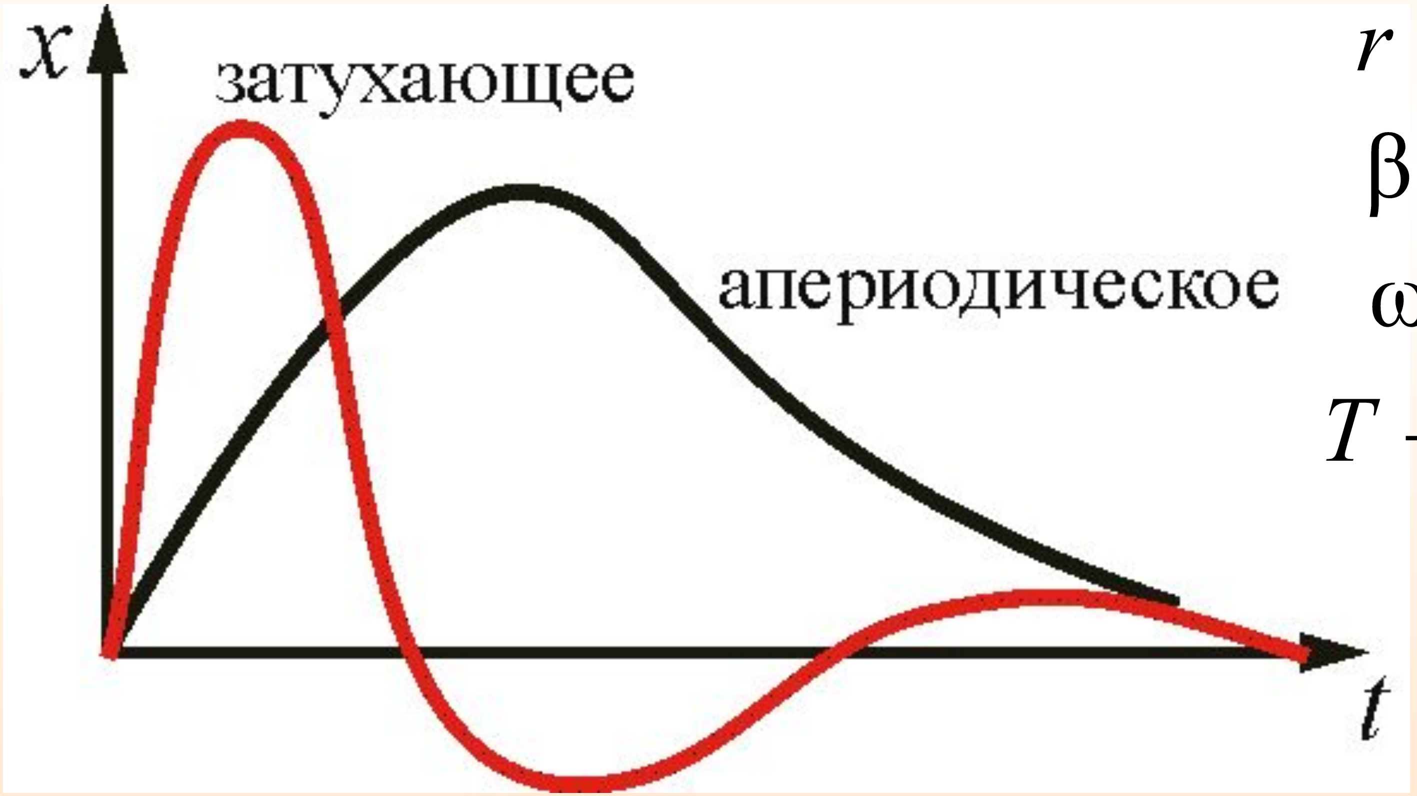
τ – *время релаксации*.



$$\chi = \beta T$$

$$\beta = \frac{1}{\tau}.$$

Когда сопротивление становится равным критическому $r = r_{кр}$, а $\beta = \omega_0$, то круговая частота обращается в нуль ($\omega = 0$), ($T \to \infty$), колебания прекращаются. Такой процесс называется *апериодическим:*



$$r = r_{кр}$$
$$\beta = \omega_0$$
$$\omega = 0$$
$$T \to \infty$$

Рисунок 2

Отличия в следующем.

При колебаниях, тело, возвращающееся в положение равновесия, имеет запас кинетической энергии. В случае *апериодического движения* энергия тела при возвращении в положение равновесия оказывается израсходованной на преодоление сил сопротивления трения.

3.3 Вынужденные механические колебания

Рассмотрим систему, на которую кроме *упругой силы* (– kx) и *сил сопротивления* (– $r\upsilon$) действует добавочная *периодическая сила* F – *вынуждающая сила:*

$$ma_x = -kx - r\upsilon_x + F_x$$

– *основное уравнение колебательного процесса*, при вынужденных колебаниях

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = F_x \qquad (3.3.1)$$

$$F_x = F_0 \cos\omega t.$$

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

Проанализируем выражение

1) $\omega = 0$ (частота вынуждающей силы равна нулю)

$$x = F_0 / m\omega_0^2$$

– статическая амплитуда, колебания не совершаются.

2) $\beta = 0$ (затухания нет). С увеличением ω (но при $\omega < \omega_0$), амплитуда растет и при $\omega = \omega_0$, амплитуда резко возрастает ($A \to \infty$). Это явление называется – *резонанс*. При дальнейшем увеличении ($\omega > \omega_0$) амплитуда опять уменьшается. (Рисунок 4)

3) $\beta \neq 0$. $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ резонансная частота

$\omega = \omega_0 \quad A \to \infty$ *- явление резонанса*

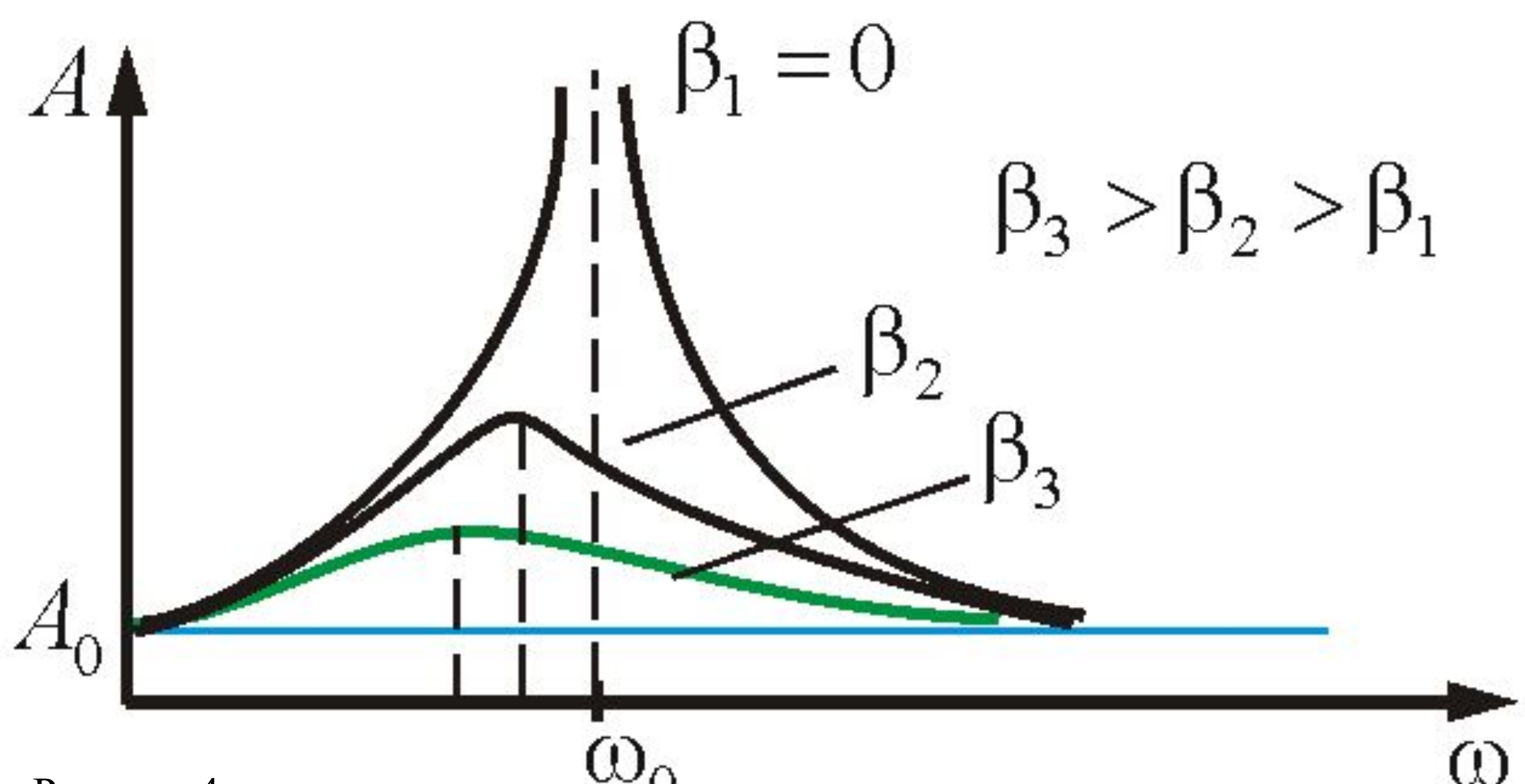


Рисунок 4

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$ – резонансная частота

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$ – резонансная частота.

Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к $\omega_{рез}$ *называется* *резонансом*.

Для *консервативной* системы, т.е. $\beta = 0, \ \omega_{рез} = \omega_0$

для диссипативной $\omega_{рез}$ несколько меньше собственной круговой частоты ω_0.

С увеличением коэффициента затухания β явление резонанса проявляется все слабее и исчезает при

$$\beta > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$