Тема. Непрерывные случайные величины и их числовые характеристики

План:

1. Плотность распределения и ее свойства.
2. Числовые характеристики НСВ.

1. Плотность распределения и ее свойства

Плотностью распределения вероятностей или **плотностью распределения** $f\ (x)$ непрерывной случайной величины X называется производная ее функции распределения F (x)

Ее также называют **дифференциальной функцией распределения.**

$$f(x) = F'(x)$$

Теорема. Вероятность того, что непрерывная случайная величина Х примет значение, принадлежащее интервалу (a ; b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Свойства плотности распределения

1) Плотность распределения вероятностей неотрицательная функция

$$f(x) \geq 0$$

2) Площадь фигуры, ограниченной кривой распределения и осью абсцисс, равна единице

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

2. Числовые характеристики НСВ

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку от a до b, называют определенный интеграл:

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx$$

Если возможные значения принадлежат всей оси абсцисс, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

Дисперсией непрерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата ее отклонения.

- **Если возможные значения принадлежат отрезку , то**

$$D(X) = \int_a^b \left(x - M(X)\right)^2 f(x)dx$$

Если же возможные значения принадлежат всей оси абсцисс, то

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - M(X)\right)^2 f(x)\,dx$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется равенством

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Замечание 1.

Свойства математического ожидания и дисперсии дискретных случайных величин сохраняются и для непрерывных величин.

Замечание 2.

Для вычисления дисперсии НСВ X можно использовать более удобные формулы:

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - (M(X))^2$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2$$

Пример. Найти плотность распределения и числовые характеристики случайной величины *X* заданной интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le 3; \\ \dfrac{x^2-9}{27}, & при \quad 3 < x \le 6; \\ 1, & при \quad x > 6. \end{cases}$$

Решение.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le 3; \\ \dfrac{2}{27}x, & при \quad 3 < x \le 6; \\ 0, & при \quad x > 6. \end{cases}$$

$$M(X)=\int_3^6 \frac{2}{27}x^2dx=\frac{2}{27}\int_3^6 x^2dx=$$

$$=\frac{2}{81}\left(6^3-3^3\right)=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3};$$

$$D(X)=\int_3^6 x^2\,\frac{2}{27}xdx-\left(\frac{14}{3}\right)^2=$$

$$=\int_3^6 \frac{2}{27}x^3dx-\left(\frac{14}{3}\right)^2=\frac{2}{27}\int_3^6 x^3dx-\left(\frac{14}{3}\right)^2=$$

$$=\frac{13}{18}\approx 0{,}72;$$

$$\sigma\left(X\right)=\sqrt{0,72}\approx 0,85$$

Тема. Основные законы распределения НСВ

План:

1. Равномерный закон распределения.
2. Показательный закон распределения.
3. Нормальный закон распределения.

При решении задач, которые выдвигает практика, приходится сталкиваться с различными распределениями непрерывных случайных величин.

Плотности распределений непрерывных случайных величин называют также **законами распределений**.

Часто встречаются законы равномерного, нормального и показательного распределений.

1. Равномерный закон распределения

Распределение вероятностей называют **равномерным**, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение.

НСВ считается равномерно распределенной, если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{если} \quad a < x \le b, \\ 0, & \text{если} \quad x > b. \end{cases}$$

Числовые характеристики равномерно распределенной случайной величины находятся по следующим формулам:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- **Пример.** Случайная величина распределена равномерно в интервале (2;8). Найти ее математическое ожидание и дисперсию.
- Решение.

$$M(X) = \frac{2+8}{2} = 5$$

$$D(X) = \frac{(8-2)^2}{12} = 3$$

2. Показательный закон распределения

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x\geq 0. \end{cases}$$

где λ - постоянная положительная величина.

Показательное распределение определяется одним параметром λ.

Эта особенность показательного распределения указывает на его преимущество по сравнению с распределениями, зависящими от большего числа параметров.

Найдем функцию распределения показательного закона:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \lambda\int_{0}^{x} e^{-\lambda x}dx = 1 - e^{-\lambda x}$$

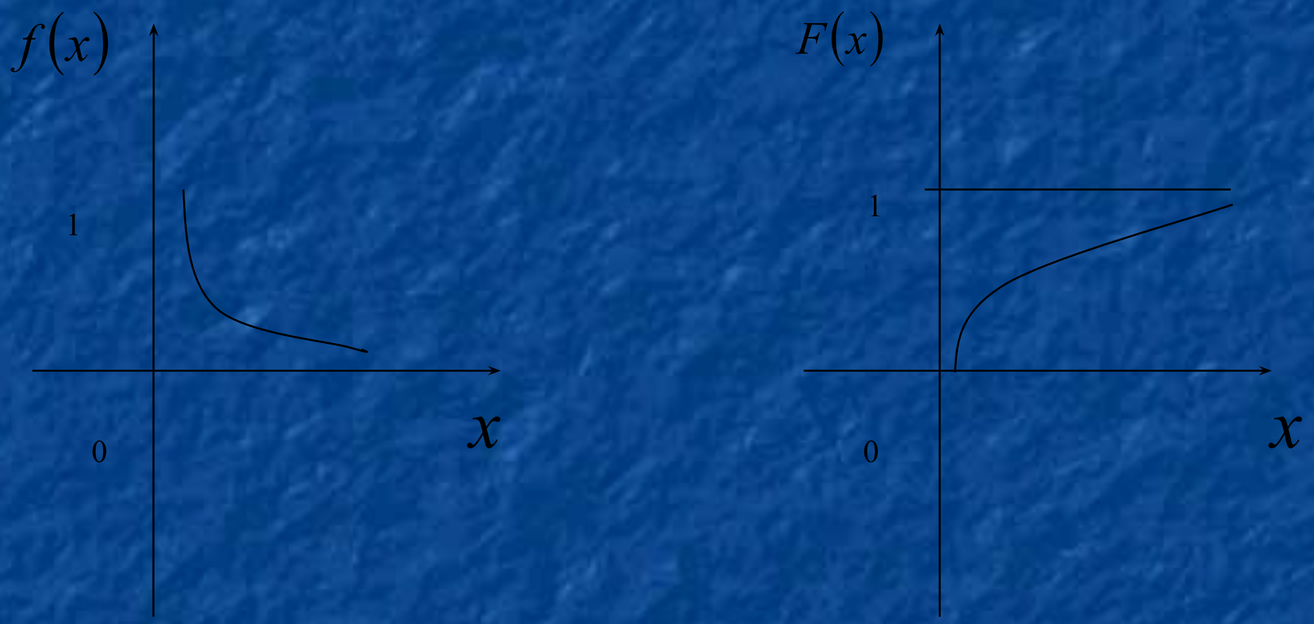
Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & при \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Функция распределения показательного закона имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<0, \\ 1-e^{-\lambda x} & при \quad x\geq 0. \end{cases}$$

Графики функций *F (x)* и *f (x)*



Вероятность попадания в заданный интервал показательно распределенной случайной величины

Вероятность попадания в интервал непрерывной случайной величины X, которая распределена по показательному закону, заданному функцией распределения

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \left(x \geq 0\right)$$

вычисляется по формуле

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

Пример. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону

$f(x) = 2e^{-2x}$ при $x \geq 0$;

$f(x) = 0$ при $x < 0$.

Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал (0,3 ;1).

Решение. По условию, $\lambda = 2$.

$$P(0{,}3 < X < 1) = e^{-(2\cdot 0{,}3)} - e^{-(2\cdot 1)} =$$

$$= e^{-0{,}6} - e^{-2} = 0{,}54881 - 0{,}13534 \approx 0{,}41.$$

Числовые характеристики показательного распределения

Числовые характеристики непрерывной случайной величины X распределенной по показательному закону вычисляются по формулам:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}$$

Пример. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону

$$f(x) = 5e^{-5x} \text{ при } x \geq 0 \;;$$

$$f(x) = 0 \text{ при } x < 0.$$

Найти математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и дисперсию X.

Пример. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону

$$f(x) = 5e^{-5x} \text{ при } x \geq 0;$$

$$f(x) = 0 \text{ при } x < 0.$$

Найти математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и дисперсию X.

Решение. По условию, $\lambda = 5$. Следовательно,

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow D(X) = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0{,}04$$

3. Нормальный закон распределения

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

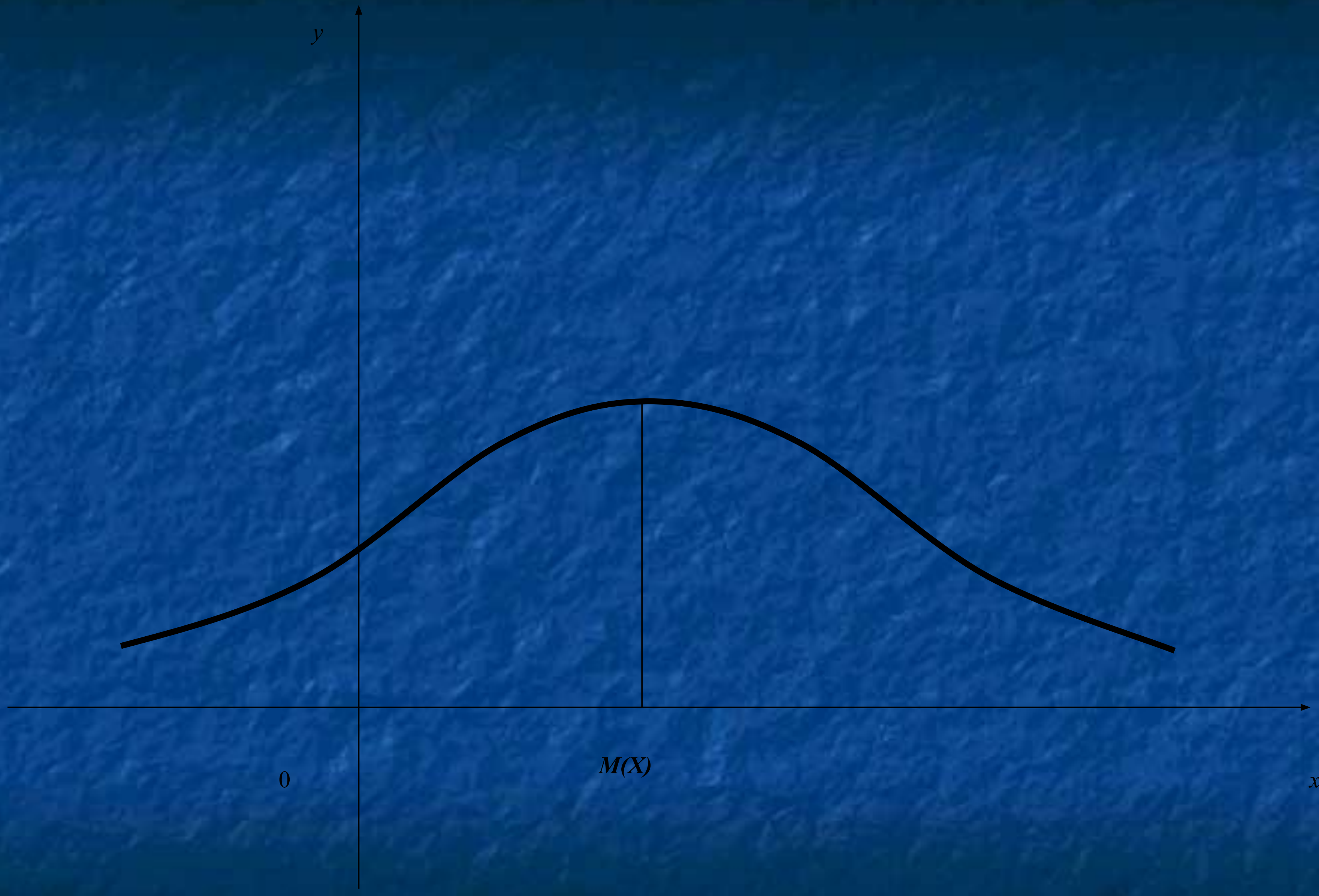
Нормальное распределение определяется двумя параметрами:

$$a \quad и \quad \sigma$$

Достаточно знать эти параметры, чтобы задать нормальное распределение.

Нормальная кривая

График плотности нормального распределения называют **нормальной кривой (кривой Гаусса)**.


y
0
M(X)
x

Влияние параметров нормального распределения на форму нормальной кривой.

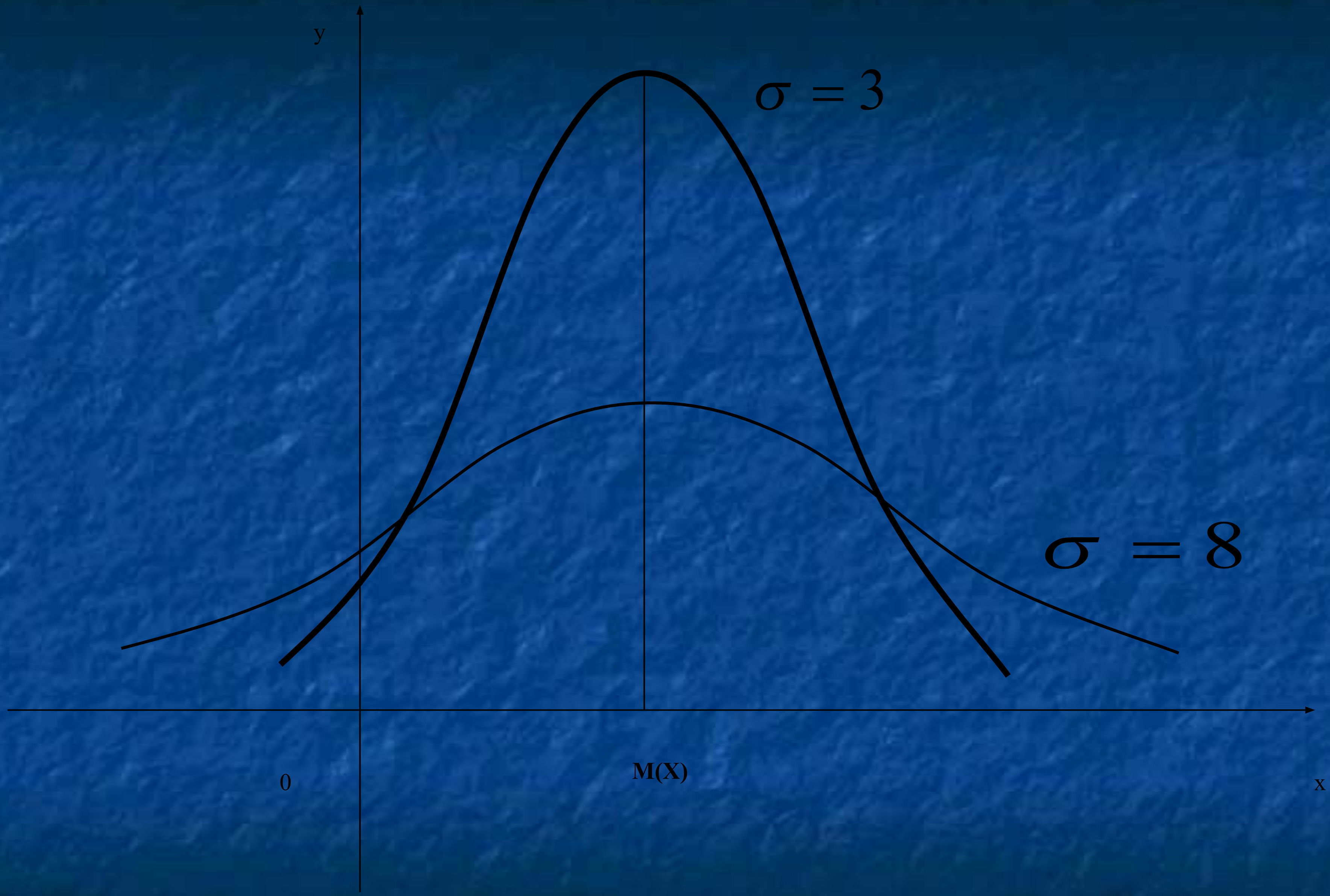
Изменение величины параметра

$$a$$

не изменяет формы нормальной кривой, а приводит лишь к ее сдвигу вдоль оси абсцисс: вправо, если математическое ожидание возрастает и влево, если оно убывает.

С возрастанием среднего квадратического отклонения максимальная ордината нормальной кривой убывает, а сама кривая становится более пологой, т.е. сжимается к оси абсцисс.

При убывании среднего квадратического отклонения нормальная кривая становится более «островершинной» и растягивается в положительном направлении оси ординат.


y
$\sigma = 3$
$\sigma = 8$
0
M(X)
x

При математическом ожидании равном нулю и среднем квадратическом отклонении равном единице нормальную кривую называют **нормированной**.

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины

Пусть случайная величина распределена по нормальному закону. Тогда вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу , равна

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины

Пусть случайная величина распределена по по нормальному закону. Тогда вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу , равна

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

В результате преобразований и использования функции Лапласа

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

окончательно получим

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

Пример. Случайная величина *X* распределена по нормальному закону с математическим ожиданием равным 40 и средним квадратическим отклонением 30 . Найти вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу (20;70).

Решение.

$$P(20 < X < 70) = \Phi\left(\frac{70-40}{30}\right) - \Phi\left(\frac{20-40}{30}\right) =$$

$$= \Phi(1) + \Phi\left(\frac{2}{3}\right) = 0{,}3413 + 0{,}2486 = 0{,}5899$$

Вычисление вероятности заданного отклонения

- Часто требуется вычислить вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины по абсолютной величине меньше заданного положительного числа , т. е. найти вероятность осуществления неравенства

$$|X - a| < \delta$$

$$P\left(\left|X-a\right|<\delta\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

- **Пример.** Случайная величина распределена нормально

$$M\left(X\right)=20;\sigma\left(X\right)=10$$

- Найти вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше трех.

Решение. Используя формулу

$$P\left(\left|X-a\right|<\delta\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

и данные условия задачи:

$$a=20;\sigma=10;\delta=3$$

а также используя таблицу значений функции Лапласа, получим:

$$P(|X-20|<3)=2\Phi\left(\frac{3}{10}\right)=$$

$$=2\Phi(0{,}3)=2\cdot 0{,}1179=0{,}2358$$

Правило трех сигм

Правило трех сигм: Если случайная величина имеет нормальный закон распределения с параметрами

$$a \quad и \quad \sigma$$

то практически достоверно (вероятность 0,9973), что ее значения заключены в интервале

$$(a - 3\sigma ; a + 3\sigma)$$

На практике правило трех сигм применяют так: если распределение изучаемой величины неизвестно, но условие, указанное в правиле выполняется, то есть основание предполагать, что изучаемая величина распределена нормально.