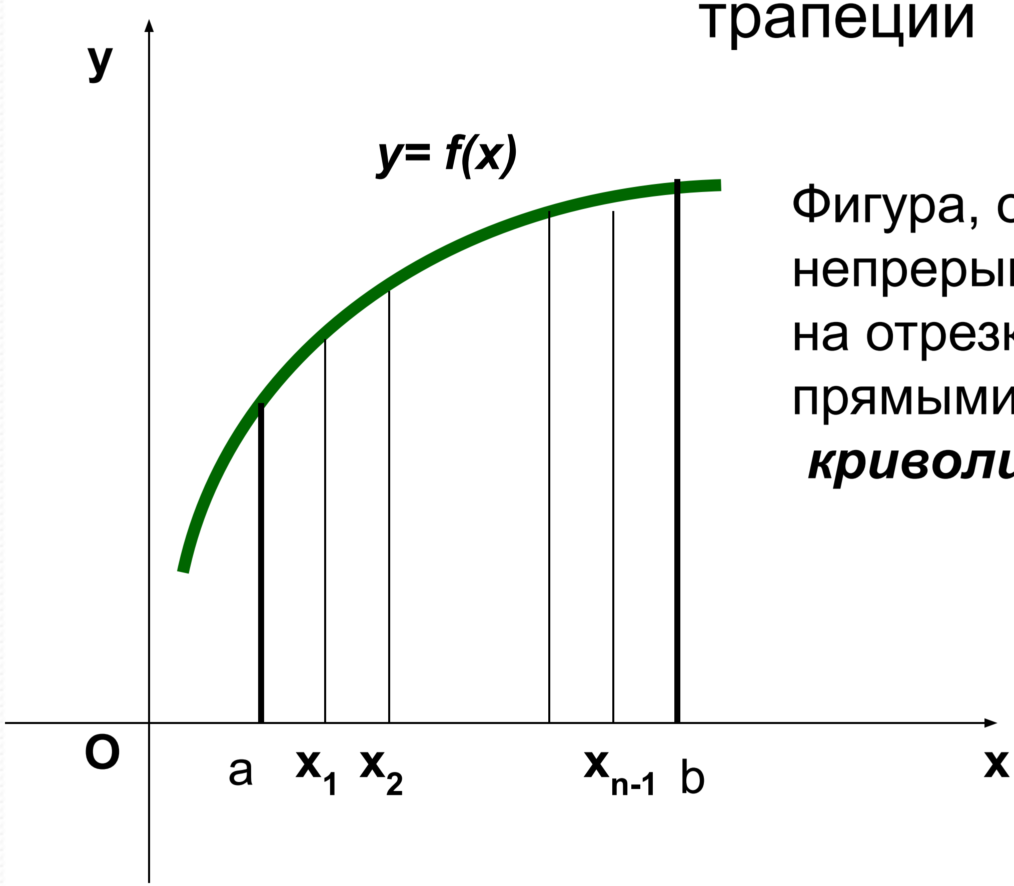
Алгебра

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

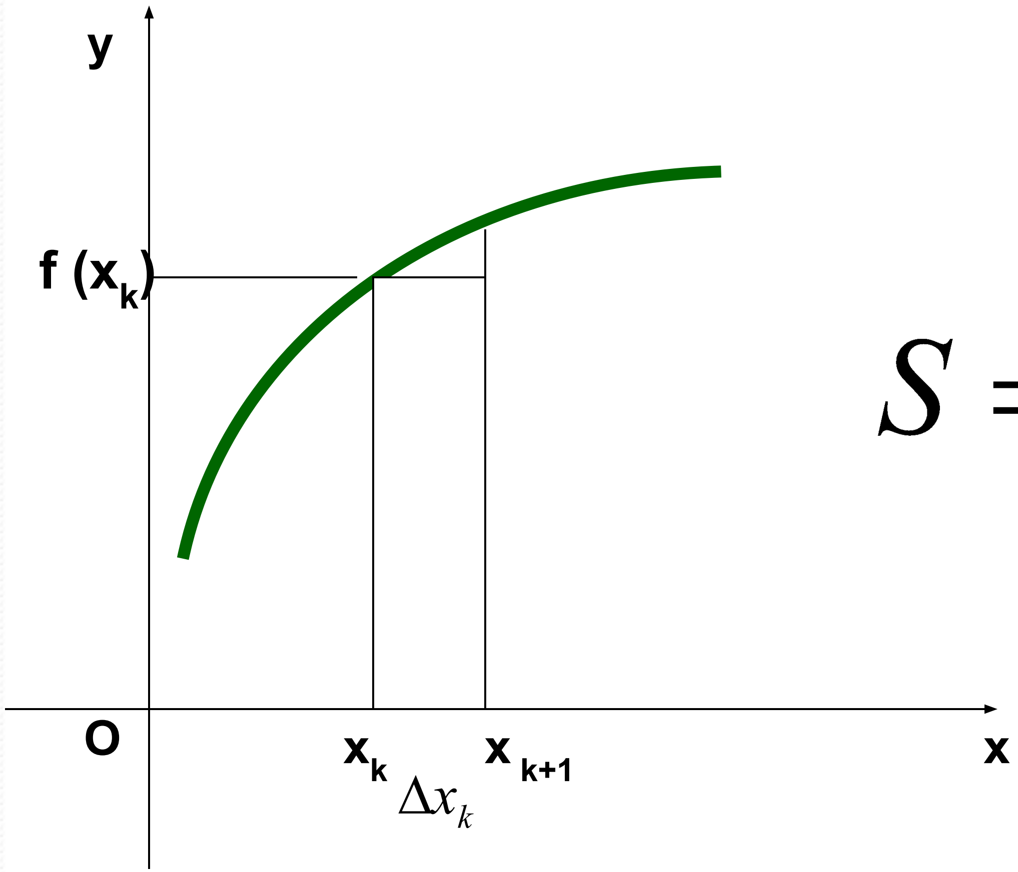
1. О вычислении площади криволинейной трапеции
2. О вычислении массы стержня
3. О перемещении точки

Задача 1. О вычислении площади криволинейной трапеции



Фигура, ограниченная графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке [a;b] функции, осью x, прямыми x=a и x= b (a<b), называется ***криволинейной трапецией***

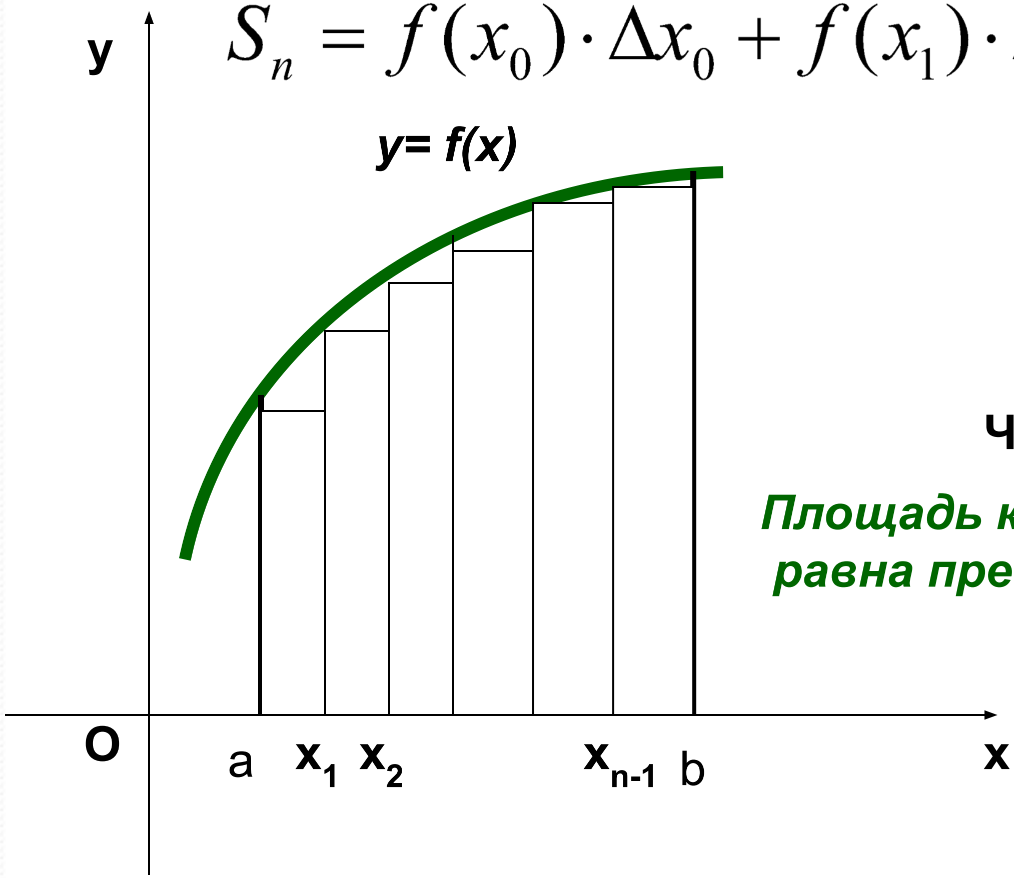
Площадь трапеции = сумме площадей столбиков



$$S = f(x_k)\cdot\Delta x$$

Площадь трапеции приближенно равна площади S_n

$$S_n = f(x_0)\cdot\Delta x_0 + f(x_1)\cdot\Delta x_1 + \ldots + f(x_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1}$$



$$S \approx S_n$$

Чем больше n, тем точнее S

Площадь криволинейной трапеции равна пределу последовательности S_n

$$\boxed{S = \lim_{n\to\infty} S_n}$$

Задача 2. Дан прямолинейный неоднородный стержень. Найти массу стержня.

$$m = \rho \cdot V$$

1. Разобьем отрезок [a;b] на равные части
2. Рассмотрим участок $[x_k; x_{k+1}]$, допустим что его плотность постоянна

$$m_k = \rho\left(x_k\right) \cdot \Delta x_k$$

$$m \approx S_n = m_0 + m_1 + \ldots + m_{n-1} =$$

$$= \rho\left(x_0\right)\Delta x_0 + \rho\left(x_1\right)\Delta x_1 + \ldots + \rho\left(x_{n-1}\right)\Delta x_{n-1}$$

$$\boxed{m = \lim_{n\to\infty} S_n}$$

Задача 3. По прямой движется точка. Зависимость скорости от времени v=v(t). Найти перемещение точки за промежуток времени [a;b]

1. Разделим промежуток времени [a;b] на n-равных частей
2. Рассмотрим $[t_k ; t_{k+1}]$. Будем считать, что на этом промежутке скорость была постоянной.

$$s_k = v(t_k)\cdot \Delta t_k \qquad s \approx S_n$$

$$S_n = s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1} =$$

$$= v(t_0)\Delta t_0 + v(t_1)\Delta t_1 + \ldots + v(t_{n-1})\Delta t_{n-1}$$

$$\boxed{s = \lim_{n\to\infty} S_n}$$

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

$$m = \lim_{n \to \infty} S_n$$

$$s = \lim_{n \to \infty} S_n$$

Три задачи привели к новой математической модели:

- Новый термин
- Обозначение
- Научиться с ней работать

Определенный интеграл

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ Называют **определенным интегралом** от функции по отрезку [a;b]

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

Геометрический смысл определенного интеграла

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Площадь криволинейной трапеции

Физический смысл определенного интеграла

$$m = \int_a^b p(x)dx$$

Масса неоднородного стержня

$$s = \int_a^b v(t)dt$$

Перемещение точки

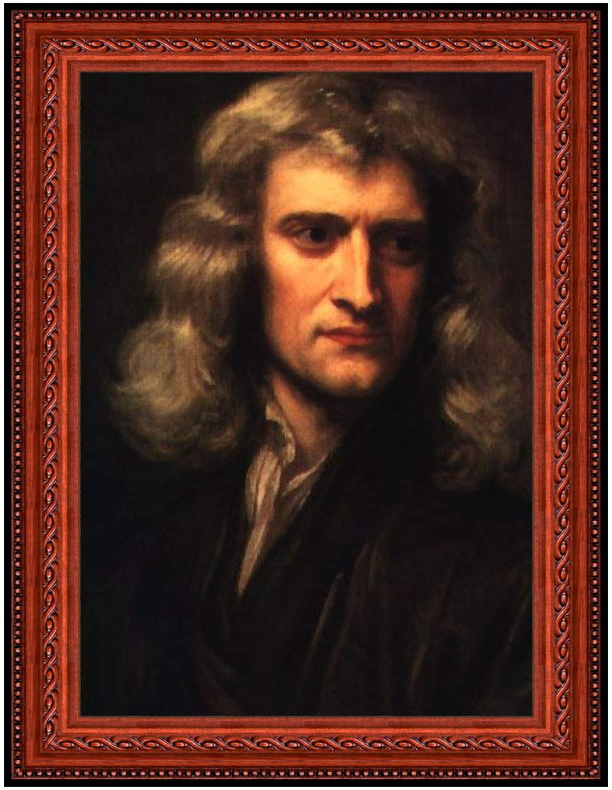
История возникновения знака интеграла

$$S \longrightarrow \int$$

сумма

Интеграл от лат. **integer - «целый»**

Для вычисления определенного интеграла используют ***формулу Ньютона-Лейбница***



Формула Ньютона -Лейбница

Теорема:

Если $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ первообразная

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Пример 1

$$\int_{-1}^{3} x^4 dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_{-1}^{3} = \frac{3^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

Правила вычисления определенного интеграла

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Если a < c < b , то

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$