Механика 3

Потенциальная энергия

1) В поле однородной силы тяжести

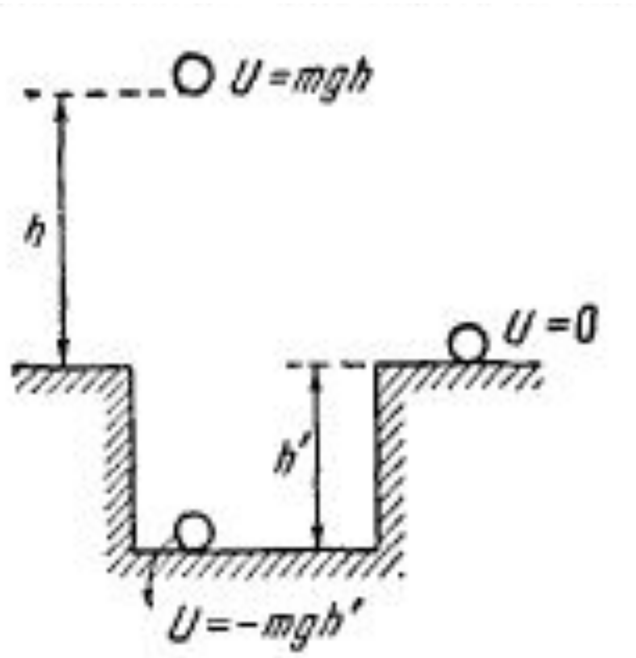
$$U = mgh$$

2) В поле упругой силы

$$U = \frac{kx^2}{2}$$

3) В гравитационном поле

$$U = \frac{Gm_1 m_2}{r}$$



U

Потенциальная энергия материальной точки - скалярная функция, убыль которой равна производимой работе надо этой точкой.

Взаимосвязь силы и потенциальной энергии материальной точки

$$A = -\Delta U \Rightarrow dA = -dU = F_s ds$$

Из определения работы

$$F_s = -\frac{\partial U}{\partial s} \quad \Longrightarrow \quad F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

По оси x

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$$

По трем осям

$$\boxed{\nabla \equiv \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}}$$

Определение оператора набла

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla U = -\mathrm{grad}\,U}$$

Сила через потенциальную энергию

Закон сохранения энергии

Уравнения Ньютона для N материальных точек

$$m_1\dot{\overline{\mathbf{v}}}_1 = \overline{F}_1' + \overline{F}_1$$

$$m_2\dot{\overline{\mathbf{v}}}_2 = \overline{F}_2' + \overline{F}_2$$

$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ....$$

$$m_N\dot{\overline{\mathbf{v}}}_N = \overline{F}_N' + \overline{F}_N$$

$\overline{F}_1', \overline{F}_2' .. \overline{F}_N'$ -равнодействующие внутренних консервативных сил

$\overline{F}_1, \overline{F}_2 .. \overline{F}_N$ -равнодействующие внешних консервативных сил

Закон сохранения энергии

$$m_1 \frac{d\bar{\mathbf{v}}_1}{dt} - (\bar{F}_1' + \bar{F}_1) = 0 \qquad \cdot d\bar{\mathbf{r}}_1 = \bar{\mathbf{v}}_1 dt$$

$$m_2 \frac{d\bar{\mathbf{v}}_2}{dt} - (\bar{F}_2' + \bar{F}_2) = 0 \qquad \cdot d\bar{\mathbf{r}}_2 = \bar{\mathbf{v}}_2 dt$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$m_N \frac{d\bar{\mathbf{v}}_N}{dt} - (\bar{F}_N' + \bar{F}_N) = 0 \qquad \cdot d\bar{\mathbf{r}}_N = \bar{\mathbf{v}}_N dt$$

$$\sum \left\{ \begin{array}{l} m_1(\bar{\mathbf{v}}_1 d\bar{\mathbf{v}}_1) - (\bar{F}_1' + \bar{F}_1) d\bar{\mathbf{r}}_1 = 0 \\ m_2(\bar{\mathbf{v}}_2 d\bar{\mathbf{v}}_2) - (\bar{F}_2' + \bar{F}_2) d\bar{\mathbf{r}}_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_N(\bar{\mathbf{v}}_N d\bar{\mathbf{v}}_N) - (\bar{F}_N' + \bar{F}_N) d\bar{\mathbf{r}}_N = 0 \end{array} \right.$$

Закон сохранения энергии

$$\sum \begin{cases} m_1(\bar{\mathbf{v}}_1 d\bar{\mathbf{v}}_1) - (\bar{F}_1' + \bar{F}_1)d\bar{\mathbf{r}}_1 = 0 \\ m_2(\bar{\mathbf{v}}_2 d\bar{\mathbf{v}}_2) - (\bar{F}_2' + \bar{F}_2)d\bar{\mathbf{r}}_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_N(\bar{\mathbf{v}}_N d\bar{\mathbf{v}}_N) - (\bar{F}_N' + \bar{F}_N)d\bar{\mathbf{r}}_N = 0 \end{cases}$$

Первое слагаемое:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i(\bar{\mathbf{v}}_i d\bar{\mathbf{v}}_i) = \sum_{i=1}^{N} d\left(\frac{m_i \bar{\mathbf{v}}_i^{\,2}}{2}\right) = dK$$

Второе слагаемое:

$$-\sum_{i=1}^{N} (\bar{F}_i' + \bar{F}_i)d\bar{\mathbf{r}}_2 = -dA = dU$$

$$\boxed{d(K+U) = 0}$$

Закон сохранения энергии

$$d(K+U)=0 \Rightarrow \boxed{K+U=E}$$

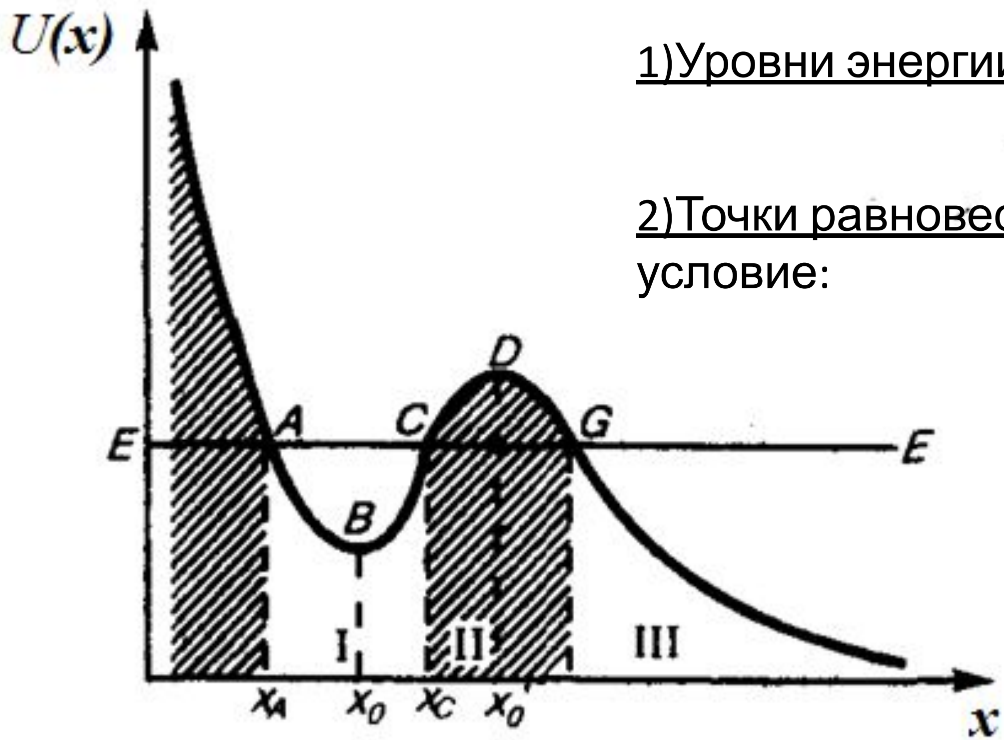
E -Энергия, константа не зависящая от времени,

<u>Закон сохранения энергии</u>

В системе материальных точек, где действуют только консервативные силы, сумма потенциальной и кинетической энергий - постоянная величина.

- С точки зрения теоретической физики ЗСЭ связан с симметрией пространства относительно сдвигов во времени.
- ЗСЭ может выполняться и для неконсервативных систем (например, систем с магнитным полем)
- Для квантовых флуктуаций ЗСЭ может нарушаться на сверхмалые времена

Графическое представление энергии
кривая.



1)Уровни энергии

2)Точки равновесия – точки, где выполняется условие:

$$\boxed{\frac{dU(x)}{dx} = 0}$$

$$\boxed{\frac{d^2U(x)}{dx^2} > 0}$$

Точка устойчивого равновесия (B)

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} = 0\,?$$

$$\boxed{\frac{d^2U(x)}{dx^2} < 0}$$

Точка неустойчивого равновесия (C)

Решение одномерных задач

$$\boxed{K + U = E}$$

Закон сохранения энергии

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U(x) = E \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = E - U(x)$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2(E - U(x))/m}$$

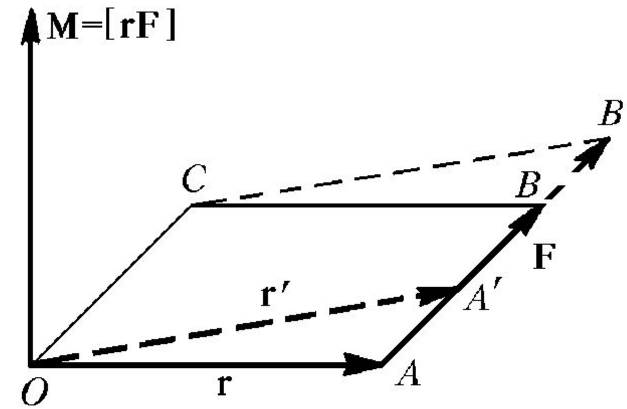
Переменные разделяются

$$\frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))/m}} = dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))/m}} = t - t_0}$$

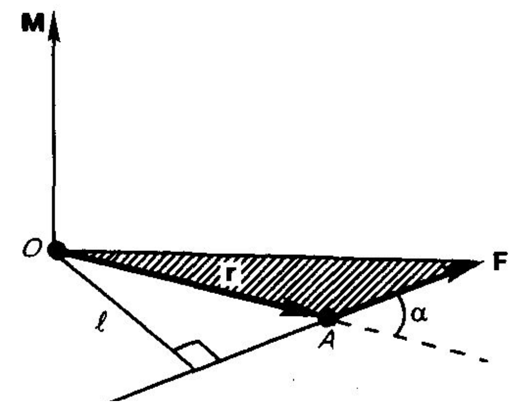
Одномерная задача с ЗСЭ всегда сводится к интегралу!

Момент силы

<u>Моментом силы $\vec{M}$</u> относительно начала отсчета О называется векторное произведение радиуса-вектора $\vec{r}$ на силу $\vec{F}$



$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$$



1)Сдвиг вдоль АВ′ не меняет результата

$$2)\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}_1] + [\vec{r}\vec{F}_2] + [\vec{r}\vec{F}_3] ... + [\vec{r}\vec{F}_4] = [\vec{r}\vec{F}_{sum}]$$

<u>Моментом силы относительно некоторой оси</u> называется проекция момента силы на эту ось. Причем начало отсчета О может лежать на любой точки оси.

$$M_z = Fl$$

Момент импульса материальной точки

$\vec{p} = m\vec{\mathbf{v}}$ - импульс материальной точки

Моментом импульса материальной точки относительно начала отсчета О называется векторное произведение радиуса-вектора $\vec{r}$ на импульс $\vec{p}$.

$\vec{r}$

$$\boxed{\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]}$$

Моментом импульса материальной точки относительно некоторой оси, называется проекция момента импульса на эту ось. Причем начало отсчета О может лежать на любой точки оси.

$$\boxed{L_z = pl}$$

Динамика вращения материальной точки

$\boxed{\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}]}$ - момент импульса материальной точки

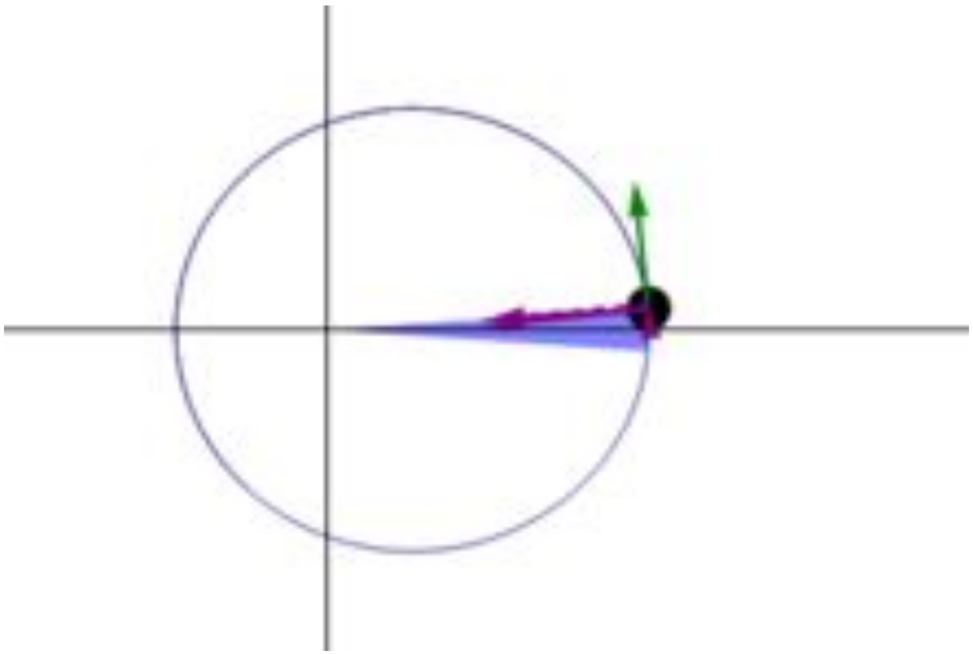
$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}[\vec{r}\vec{p}] = [\frac{d\vec{r}}{dt}m\vec{v}] + m[\vec{r}\frac{d\vec{v}}{dt}] = [\vec{r}\frac{d\vec{p}}{dt}]$$

Из второго начала Ньютона:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r}\vec{F}]} \qquad \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

- <u>Следствия:</u>
  Центральные силы (действующие из начала координат) не изменяют момент импульса.
- Орбита планеты лежит в одной плоскости
- Второй закон Кеплера (заметаемые планетой площади равны за равные промежутки времени)

Второй закон Кеплера



Johannes Kepler
1571 -1630

$$\Delta A = \frac{1}{2}[\overline{r}\,\Delta\overline{r}\,] = \frac{1}{2}[\overline{r\mathbf{v}}]\Delta t = \frac{1}{2m}[\overline{rp}]\Delta t = \frac{\overline{L}}{2m}\Delta t$$

Момент импульса для системы из двух материальных точек

Второй закон Ньютона для 2 материальных точек:

$$\sum \begin{cases} \overline{\mathbf{r}}_1 \times & m_1 \dfrac{d\vec{\mathbf{v}}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{f}_1 \\ \overline{\mathbf{r}}_2 \times & m_2 \dfrac{d\vec{\mathbf{v}}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{f}_2 \end{cases}$$

$\vec{F}_{12}$ -сила действующая на 1-частицу со стороны 2-частицы.

$\vec{F}_{21}$ -сила действующая на 2-частицу со стороны 1-частицы.

$\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ - внешние сила действующие на 1 и 2 частицу.

Третий закон Ньютона: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Момент импульса для системы из двух материальных точек

$$[\vec{r}_1 \frac{d\vec{\mathbf{v}}_1}{dt}] = [\vec{r}_1 \frac{d\vec{\mathbf{v}}_1}{dt}] + \boxed{[\frac{d\vec{r}_1}{dt}\vec{\mathbf{v}}_1]} = \frac{d}{dt}([\vec{r}_1\vec{\mathbf{v}}_1])$$

$$[\vec{r}_2 \frac{d\vec{\mathbf{v}}_2}{dt}] = [\vec{r}_2 \frac{d\vec{\mathbf{v}}_2}{dt}] + \boxed{[\frac{d\vec{r}_2}{dt}\vec{\mathbf{v}}_2]} = \frac{d}{dt}([\vec{r}_2\vec{\mathbf{v}}_2])$$

$$\frac{d}{dt}([\vec{r}_1 m_1 \vec{\mathbf{v}}_1] + [\vec{r}_2 m_2 \vec{\mathbf{v}}_2]) = \frac{d}{dt}([\vec{r}_1\vec{p}_1] + [\vec{r}_2\vec{p}_2]) = \frac{d}{dt}\vec{\mathbf{L}}_{sum}$$

<u>(NB) Суммарный момент сил равен суммарному моменту внешних сил:</u>

$$\boxed{\vec{\mathbf{M}}_{sum} = [\vec{r}_1\vec{f}_1] + [\vec{r}_2\vec{f}_2]}$$

так как $[(\vec{r}_1\bar{F}_{12}]) + [(\vec{r}_2\bar{F}_{21}]) \equiv 0.$

(!!!) Из третьего закон Ньютона силы, действующие между двумя материальными точками лежат на прямой, которая их соединяет

$$[(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\vec{F}_{12}]) \equiv 0.$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{L}}_{sum} = \vec{\mathbf{M}}_{sum}}$$

Динамика вращательного движения системы материальных точек

Второй закон Ньютона для N материальных точек:

$$\sum \left\{ \begin{array}{ll} \bar{\mathbf{r}}_1 \times & m_1 \dfrac{d\bar{\mathbf{v}}_1}{dt} = \bar{F}_{12} + \bar{F}_{13} + \ldots + \bar{F}_{1N} + \bar{f}_1 \\ \bar{\mathbf{r}}_2 \times & m_2 \dfrac{d\bar{\mathbf{v}}_2}{dt} = \bar{F}_{21} + \bar{F}_{23} + \ldots + \bar{F}_{2N} + \bar{f}_2 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{\mathbf{r}}_N \times & m_N \dfrac{d\bar{\mathbf{v}}_N}{dt} = \bar{F}_{N1} + \bar{F}_{N2} .. + \bar{F}_{N(N-1)} + \bar{f}_N \end{array} \right.$$

$\bar{F}_{ij}$ -сила действующая на i-частицу со стороны j-частицы.

$\bar{f}_i$ - внешняя сила действующая на i – частицу.

Третий закон Ньютона:

$$\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21} \qquad \bar{F}_{23} = -\bar{F}_{32} \qquad \boxed{\bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ji}}$$

Динамика вращения системы материальных точек

$$\sum_{i=1}^{N}[\bar{\mathbf{r}}_i m_i \frac{d\bar{\mathbf{v}}_i}{dt}] = \sum_{i=1}^{N}([\bar{\mathbf{r}}_i m_i \frac{d\bar{\mathbf{v}}_i}{dt}] + [\frac{d\bar{\mathbf{r}}_i}{dt} m_i \bar{\mathbf{v}}_i]) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}([\bar{\mathbf{r}}_i m_i \bar{\mathbf{v}}_i])$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}([\bar{\mathbf{r}}_i m_i \bar{\mathbf{v}}_i]) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}[\bar{\mathbf{r}}_i \bar{\mathbf{p}}_i] = \frac{d}{dt}\bar{\mathbf{L}}_{sum}$$

<u>Суммарный момент импульса системы:</u>

$$\boxed{\bar{\mathbf{L}}_{sum} = \sum_{i=1}^{N}[\bar{\mathbf{r}}_i \bar{\mathbf{p}}_i]}$$

<u>Суммарный момент внешних сил:</u>

$$\boxed{\bar{\mathbf{M}}_{sum} = \sum_{i=1}^{N}[\bar{\mathbf{r}}_i \bar{f}_i]}$$

$$([\bar{\mathbf{r}}_1 \bar{F}_{12}] + [\bar{\mathbf{r}}_2 \bar{F}_{21}]) + ([\bar{\mathbf{r}}_1 \bar{F}_{13}] + [\bar{\mathbf{r}}_3 \bar{F}_{31}]) + \ldots.([\bar{\mathbf{r}}_1 \bar{F}_{1N}] + [\bar{\mathbf{r}}_N \bar{F}_{N1}])\ldots =$$

$$([(\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_2)\bar{F}_{12}]) + [(\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_3)\bar{F}_{13}] + \ldots. + [(\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_N)\bar{F}_{1N}] +$$

$$([(\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{r}}_3)\bar{F}_{23}]) + [(\bar{\mathbf{r}}_3 - \bar{\mathbf{r}}_4)\bar{F}_{34}] + \ldots. + [(\bar{\mathbf{r}}_3 - \bar{\mathbf{r}}_N)\bar{F}_{3N}] +$$

$$\boxed{[(\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_j)\bar{F}_{ij}] = 0}$$

$$\ldots\ldots$$

$$+[(\bar{\mathbf{r}}_{N-1} - \bar{\mathbf{r}}_N)\bar{F}_{N-1N}] = 0$$

Динамика вращения системы N материальных точек

$$m_1 \frac{d\bar{\mathbf{v}}_1}{dt} = \bar{F}_{12} + \bar{F}_{13} + \ldots + \bar{F}_{1N} + \bar{f}_1$$

$$m_2 \frac{d\bar{\mathbf{v}}_2}{dt} = \bar{F}_{21} + \bar{F}_{23} + \ldots + \bar{F}_{2N} + \bar{f}_2$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; ....$$

$$m_N \frac{d\bar{\mathbf{v}}_N}{dt} = \bar{F}_{N1} + \bar{F}_{N2} .. + \bar{F}_{N(N-1)} + \bar{f}_N$$

$$\bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ji}$$

$$[(\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_j)\bar{F}_{ij}] = 0$$

$$\bar{\mathbf{L}}_{sum} = \sum_{i=1}^{N} [\bar{\mathbf{r}}_i \bar{\mathbf{p}}_i]$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{sum} = \sum_{i=1}^{N} [\bar{\mathbf{r}}_i \bar{f}_i]$$

Закон динамики вращения системы материальных точек :

$$\frac{d\bar{\mathbf{L}}_{sum}}{dt} = \bar{\mathbf{M}}_{sum}$$

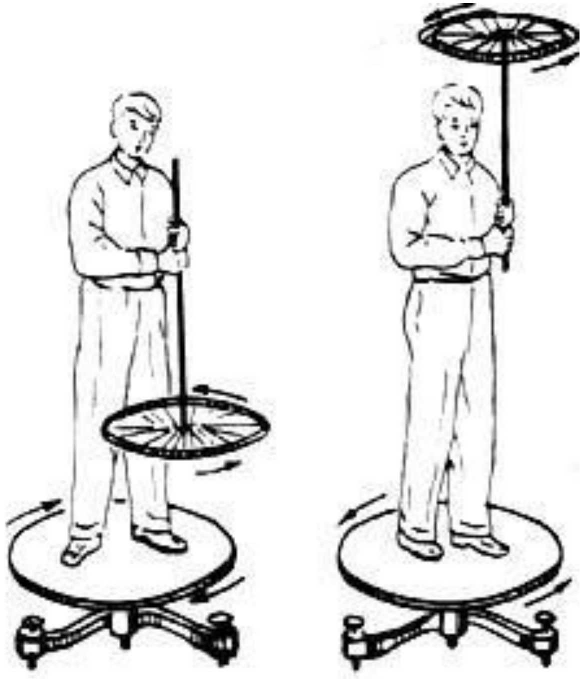
Закон сохранения момента импульса

Если Момент внешних сил равен нулю:

$$\vec{\mathbf{M}} = 0$$

то суммарный момент импульса системы сохраняется:

$$\boxed{\frac{d\vec{\mathbf{L}}_{sum}}{dt} = 0}$$



Amalie Emmy Noether
1882-1935

Момент импульса твердого тела

Момент импульса твердого тела есть сумма всех моментов импульсов материальных точек, из которых оно состоит.

$$\boxed{\vec{L} = \sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_i m_i \vec{v}_i]}$$

Если твердое тело вращается вокруг некоторой неподвижной оси z тогда проекция момента импульса на эту ось будет:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N}[\vec{r}_{\perp i} m_i \vec{v}_i] \qquad \vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i[\vec{r}_{\perp i}[\vec{\omega}\vec{r}_{\perp i}]] \qquad \vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{\omega}(\vec{r}_{\perp i}\vec{r}_{\perp i}) - \vec{r}_i(\vec{\omega}\vec{r}_{\perp i}))$$

$$\boxed{L_z = \sum_{i=1}^{N} m_i r_{\perp i}{}^2 \omega_z = J_z \omega_z}$$

$$\boxed{J_z = \sum_{i=1}^{N} m_i r_{\perp i}{}^2}$$

Момент инерции тела относительно оси z

Уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси

$$\boxed{L = J\omega}$$

$$\boxed{\frac{d(J\omega)}{dt} = J\varepsilon = \mathbf{M}_{sum}}$$

$$\boxed{J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_{\perp i}{}^2}$$

L - проекция момента импульса на ось вращения

J - момент инерции относительно оси вращения

ω - угловая скорость вращения

ε - угловое ускорения

$\mathbf{M}_{sum}$ - Суммарный момент внешних сил относительно оси вращения

Момент инерции

$$J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

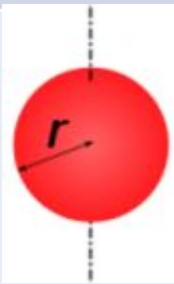
<u>Моментом инерции</u> системы или тела, состоящего из материальных точек

$$J = \int_V r^2 dm$$

<u>Моментом инерции</u> системы или непрерывного тела

Моменты инерции некоторых тел

Шар

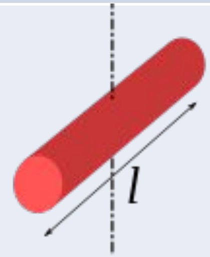


$$J = \frac{2}{5} mr^2$$

Тонкостенная сфера

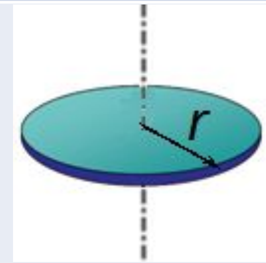
$$J = \frac{2}{3} mr^2$$

Однородный стержень



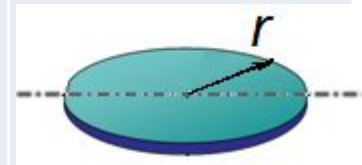
$$J = \frac{1}{12} ml^2$$

Диск



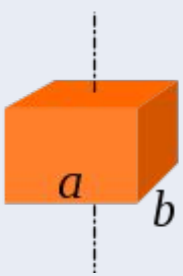
$$J = \frac{1}{2} mr^2$$

Диск



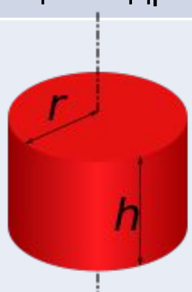
$$J = \frac{1}{4} mr^2$$

Однородная пластинка



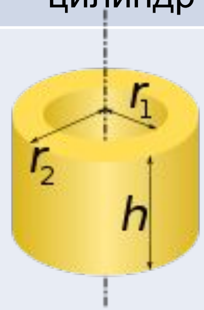
$$J = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$

Сплошной цилиндр



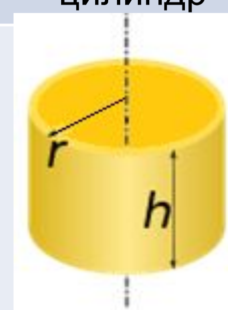
$$J = \frac{1}{2} mr^2$$

Толстостенный цилиндр



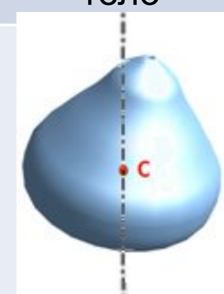
$$J = \frac{1}{2} m(r_1^2 + r_2^2)$$

Тонкостенный цилиндр



$$J = mr^2$$

Произвольное тело



$$I = \sum m_i r_i^2$$

Работа силы поворота твердого тела вокруг неподвижной оси

$$\boxed{dA = FdS\sin(\alpha)}$$

Работа силы
F
Сдви
г

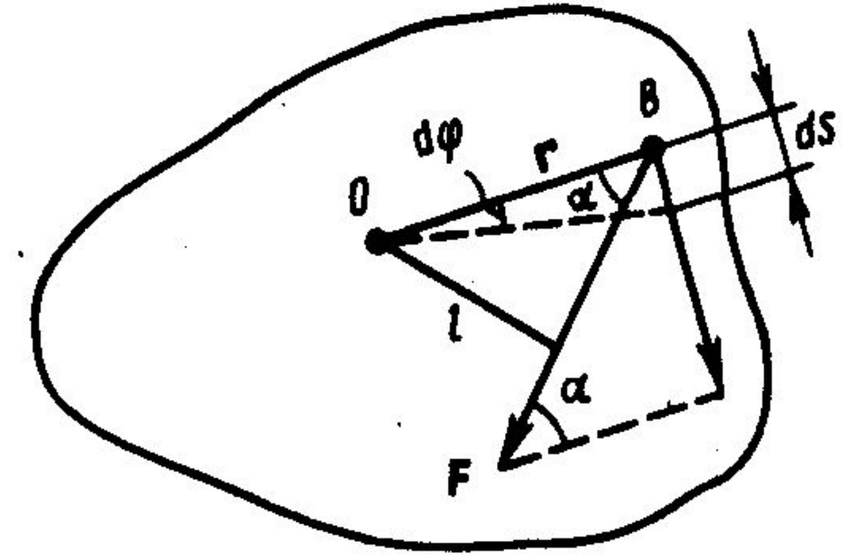
$$dS = rd\varphi$$

$$dA = Fr\sin(\alpha)d\varphi$$

$$\mathbf{M} = rF\sin(\alpha) = Fl$$

l – плечо

$$\boxed{dA = Md\varphi}$$



Теорема Штейнера

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{a}$$

$$J_M = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i^{\,2}$$

Момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс.

$$J' = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i')^2$$

Момент инерции относительно оси параллельной первой , но отстающей на расстояние *a*

$$J' = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i + \vec{a})^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i^{\,2} + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}^{\,2} + 2\sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i \vec{a})$$

$$J' = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 + a^2 \sum_{i=1}^{N} m_i + 2\vec{a}\boxed{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\right)} = J_M + Ma^2$$

Момент инерции тела относительно оси, образованной параллельным переносом оси, проходящей через центр масс, увеличивается Мa^2 , где М – масса тела, *a* – расстояние между

$$\boxed{J' = J_M + Ma^2}$$

Кинетическая энергия вращения твердого тела

$$\boxed{K=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i v_i^{\,2}}{2}}$$

система из N материальных точек

$$\omega = v_1/r_1 = v_2/r_2 = v_3/r_3. = .. = v_N/r_N$$

$$K=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i\omega^2 r_i^{\,2}}{2}=\frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i r_i^{\,2}=\frac{\omega^2 J}{2}\qquad J=\sum_{i=1}^{N}m_i r_i^{\,2}$$

$$\boxed{K=\frac{\omega^2 J}{2}}$$

Из теоремы Кенинга:

$$\boxed{K=\frac{\omega^2 J}{2}+\frac{M\vec{v}_M^{\,2}}{2}}$$

Сравнение вращательного и поступательного движения

Поступательное движение		Вращательное движение	
Масса	m	Момент инерции	J
Скорость	$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}$	Угловая скорость	$\vec{\omega}=\frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Ускорение	$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}$	Угловое ускорение	$\vec{\varepsilon}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Сила	$\mathbf{F}$	Момент силы	M_z или $\mathbf{M}$

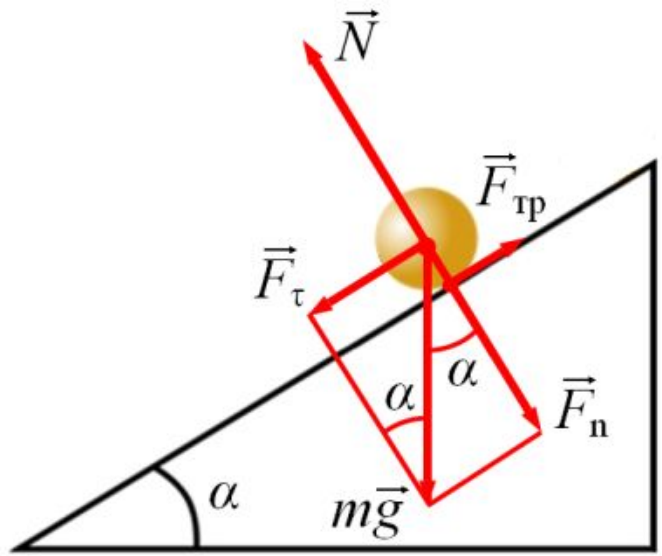
Поступательное движение		Вращательное движение	
Импульс	$\mathbf{p}=m\mathbf{v}$	Момент импульса	$L_z=J_z\omega$
Основное уравнение динамики	$\mathbf{F}=m\mathbf{a}$;	Основное уравнение динамики	$M_z=J_z\varepsilon$;
	$\mathbf{F}=\frac{d\mathbf{p}}{dt}$		$\mathbf{M}=\frac{d\mathbf{L}}{dt}$
Работа	$dA=F_s ds$	Работа	$dA=M_z d\varphi$
Кинетическая энергия	$mv^2/2$	Кинетическая энергия	$J_z\omega^2/2$

Задача о скатывании симметричного тела с наклонной плоскости без проскальзывания
1 подход

$\vec{N}$ - сила реакции опоры

$\vec{F}_{тр}$ - сила трения покоя

$m\vec{g}$ - сила тяжести



Законы Ньютона:

$$ma_\tau = F_\tau = mg\sin(\alpha) - F_{тр}$$

$$ma_n = 0 = F_n = mg\cos(\alpha) - N$$

Уравнение моментов относительно центра массы:

$$J\varepsilon = M_{тр} = F_{тр}r$$

Уравнение связи: $v_\tau = \omega r$ ⇒ $(v_\tau = \omega r)'_t$ $\quad a_\tau = \varepsilon r$

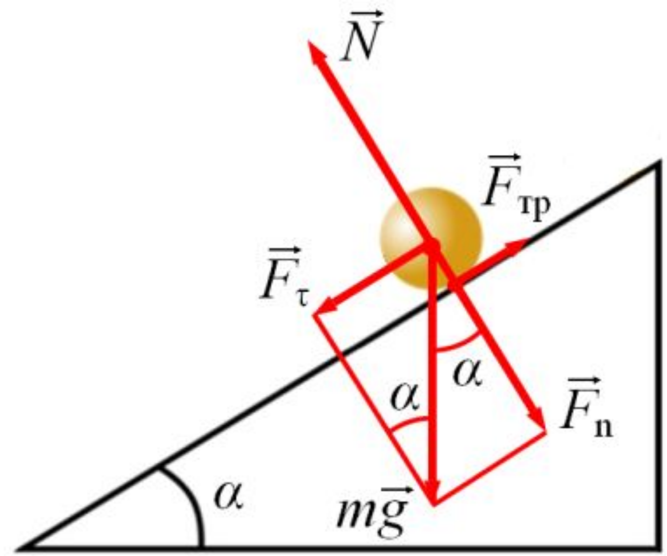
$$\frac{J}{r}a_\tau = F_{тр}r$$

$$ma_\tau = mg\sin(\alpha) - F_{тр}$$

⇒

$$\boxed{a_\tau = \frac{g\sin(\alpha)}{1 + \frac{J}{mr^2}}}$$

Задача о скатывании симметричного тела с наклонной плоскости без проскальзывания
2 подход



Уравнение моментов относительно
точки касания тела и плоскости:

$$J'\varepsilon = M_{mg} = mgr\sin(\alpha)$$

По теореме Штейнера
:

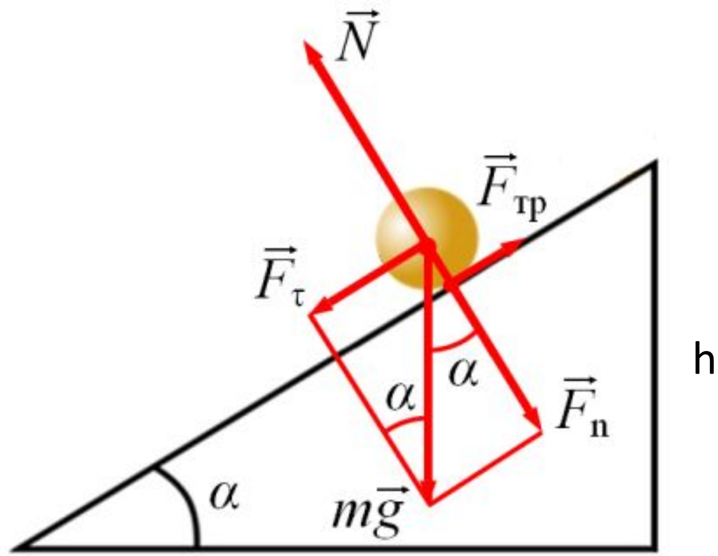
$$J' = mr^2 + J$$

Уравнение связи:

$$v_{\tau} = \omega r \Rightarrow a_{\tau} = \varepsilon r$$

$$\frac{mr^2 + J}{r} a_{\tau} = mgr\sin(\alpha) \Rightarrow \boxed{a_{\tau} = \frac{g\sin(\alpha)}{1 + \frac{J}{mr^2}}}$$

Задача о скатывании симметричного тела с наклонной плоскости без проскальзывания
3 подход



Закон сохранения энергии:

$$K\Pi + E =$$

$$K = \frac{mv_\tau^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$$

$$\Pi = mg(h - x\sin(\alpha))$$

Уравнение связи: $v_\tau = \omega r$ ⇒ $a_\tau = \varepsilon r$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_\tau^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} + mg(h - x\sin(\alpha))\right) = 0 \Rightarrow mv_\tau a_\tau + J\omega\varepsilon - mgv_\tau\sin(\alpha) = 0$$

$$ma_\tau + \frac{J}{r^2} = mg\sin(\alpha) \Rightarrow \boxed{a_\tau = \frac{g\sin(\alpha)}{1 + \frac{J}{mr^2}}}$$