Глава 9. Элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей

§54. Случайные события и их вероятности

1.ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМБИНАТОРИКИ ДЛЯ ПОДСЧЕТА ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Содержание

Введение

- В теории вероятностей и математической статистике строятся и исследуются модели различных ситуаций, связанных с понятием случайности. Один из основателей математической статистики шведский ученый Гаральд Крамер писал так: «По-видимому, невозможно дать точное определение того, что подразумевается под словом “случайный”. Смысл этого слова лучше всего разъяснить на примерах».
- В § 51 мы последовали этому совету и разобрали простейшие вероятностные задачи. После знакомства с основными формулами комбинаторики можно переходить к более сложным задачам.

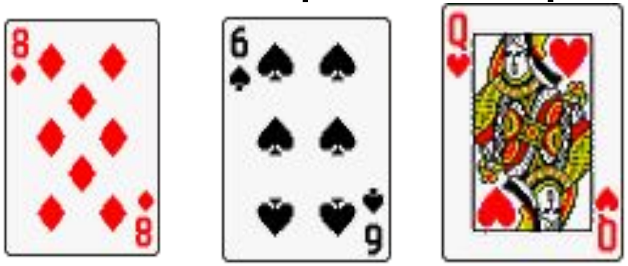
Часть 1.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМБИНАТОРИКИ ДЛЯ ПОДСЧЕТА ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Пример 1.

- Из колоды в 36 карт случайным образом вытаскивают три карты. Какова вероятность того, что среди них: а) нет пиковой дамы; б) есть пиковая дама?

Решение. У нас имеется множество из 36 элементов — игральных карт. Мы производим выбор трех элементов, порядок выбора не важен. Значит, имеется $\mathbf{N = C_{36}^{3}}$ исходов. Будем действовать по классической вероятностной схеме, т. е. предполагать, что все эти исходы равновероятны между й.



Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

Пример 1. а) нет пиковой дамы

а) Среди всех N исходов нам следует сосчитать те, в которых нет пиковой дамы (событие А). Поэтому отложим даму пик в сторону и будем выбирать три карты из оставшихся 35 карт. Получатся все интересующие нас варианты: **$N(A)=C_{35}^{3}$**. Осталось выч[illegible]

$$P(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{C_{35}^{3}}{C_{36}^{3}}=\frac{35!}{3!\cdot 32!}\cdot\frac{3!\cdot 33!}{36!}=\frac{33}{36}=\frac{11}{12}.$$

Пример 1. б) есть пиковая дама

б) Вычислим вероятность противоположного события А (есть дама пик) по формуле из § 51:

Р(А) = 1 - Р(А) = 1/12.

Ответ: а) 5/12; б)1/12.

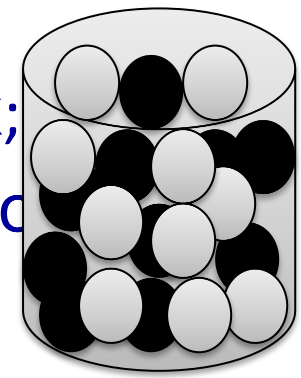
Пример 2.

- В урне лежит 10 белых и 11 черных шаров. Случайным образом достают пять шаров. Какова вероятность того, что:

а) среди этих пяти шаров ровно три белых;

б) среди них не менее четырех белых шаро

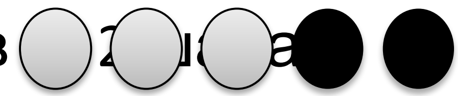
в) большинство шаров — белые?



Решение. Считаем шары в урне неразличимыми на ощупь. Из 21 шара случайным образом производят выбор пяти шаров. Порядок выбора не важен. Значит, существует $\mathbf{N(A) = C_{21}^{5}}$ способов такого выбора.

Пример 2. а) среди этих пяти шаров ровно три белых;

а) Интересующее нас событие A наступает, когда три из пяти шаров — белые, а два оставшихся — черные, т. е. когда из 10 белых шаров оказались выбранными 3 шара, а из 11 черных шаров 2 шара.



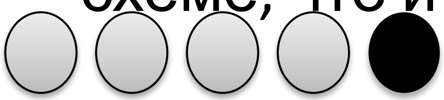
- Из 10 белых шаров 3 шара можно выбрать C_{10}^{3} способами, а из 11 черных шаров 2 шара можно выбрать C_{11}^{2} способами. По правилу умножения получаем, что нужный нам состав шаров можно выбрать $N(A)=C_{10}^{3} \bullet C_{11}^{2}$ способами. Значит,

$$P(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{C_{10}^{3}\cdot C_{11}^{2}}{C_{21}^{5}}=\frac{10!}{3!7!}\cdot\frac{11!}{2!9!}\cdot\frac{5!16!}{21!}=\frac{8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3}\cdot\frac{10\cdot 11}{2}\cdot\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{17\cdot 18\cdot 19\cdot 20\cdot 21}=$$

$$=\frac{2\cdot 10\cdot 10\cdot 11}{17\cdot 19\cdot 21}=\frac{2200}{6783}\approx 0{,}3243.$$

Пример 2. б) среди них не менее четырех белых шаров;

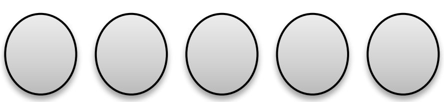
б) Проведем перебор случаев. Пусть **В** — событие, состоящее в том, что **белых шаров ровно 4**, а **С** — событие, означающее, что **все 5 шаров — белые**. Вероятности Р(В) и Р(С) вычисляются по той же схеме, что и Р(А) в пункте а).



$$P(B) = \frac{N(B)}{N} = \frac{C_{10}^4 \cdot C_{11}^1}{C_{21}^5} = \frac{10!}{4!6!} \cdot 11 \cdot \frac{5!16!}{21!} =$$

$$= \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 11 \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21} =$$

$$= \frac{7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11}{17 \cdot 19 \cdot 21} = \frac{770}{6783} \approx 0{,}1135;$$

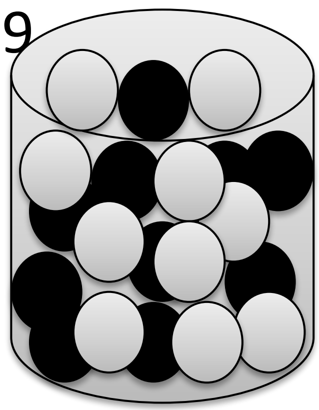


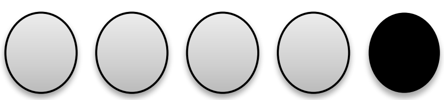
$$P(C) = \frac{N(C)}{N} = \frac{C_{10}^5}{C_{21}^5} = \frac{10!}{5!5!} \cdot \frac{5!\,16!}{21!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21} =$$

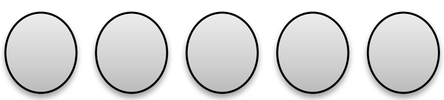
$$= \frac{4}{17 \cdot 19} \approx 0{,}0124.$$

Пример 2. б) среди них не менее четырех белых шаров;

- События B и C не могут наступить одновременно, т. е. они несовместны. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий (об этом мы уже говорили в курсе алгебры 9-го класса). Значит,
- $P(B + C) = P(B) + P(C) \approx 0{,}1135 + 0{,}0124 = 0{,}1259$







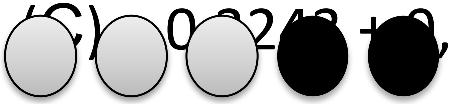
Вероятность суммы двух несовместных

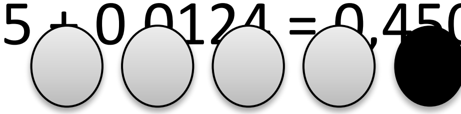
- Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

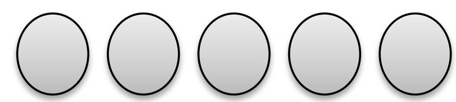
Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

Пример 2. в) большинство шаров — белые?

в) Интересующее нас событие произойдет в следующих случаях: из пяти вытащенных шаров — 3 белых и 2 черных, из пяти шаров — 4 белых и 1 черный, все 5 шаров — белые. Эти три случая соответствуют событиям А, Б, С, разобранным в пунктах а) и б). Никакие два из событий А, В, С не могут наступить одновременно, т. е. эти события **попарно несовместны.** Поэтому Р(А + В + С) = Р(А) + Р(В) + + Р (С) = 0,3243 + 0,1135 + 0,0124 = 0,4502.







Ответ: а)0,3243; б)0,1259; в)0,4502.

Цыбикова Тамара Раднажаповна, учитель математики

ЗАМЕЧАНИЕ

- Задачи на отыскание вероятностей случайных событий
  «в два с половиной раза» сложнее задач по комбинаторике.
- Сначала мы используем комбинаторику при нахождении N — количества всех исходов опыта.
- Во второй раз комбинаторика нужна при нахождении N(A), причем это уже, как правило, более сложная комбинаторика.
- Наконец, надо еще уметь вычислить значение дроби.
- Вот и получается «две с половиной комбинаторики».

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

Для учителя

Заключительный в этой главе §54 «Случайные события и их вероятности» наиболее объемен и не столь однороден по содержанию, как другие параграфы. Он состоит из четырех пунктов.

1. Использование комбинаторики для подсчета вероятностей.
2. Произведение событий. Вероятность суммы двух событий. Независимость событий.
3. Независимые повторения испытаний. Теорема Бернулли и статистическая устойчивость.
4. Геометрическая вероятность.

В п. 1 продолжается начавшийся в § 51 подсчет вероятностей различных событий, но уже с использованием такого мощного комбинаторного аппарата, как формулы для числа сочетаний. Подчеркнем, что и в учебнике, и в задачнике мы уделяем довольно мало внимания формуле $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ для числа размещений по сравнению с формулой для числа сочетаний. Дело в том, что, по нашему мнению, в большинстве элементарных комбинаторных задач найти число размещений всегда можно по правилу умножения, и запоминание формулы $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ не так уж и необходимо. В то же время значимость и «используемость» формулы $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ существенно выше: и при решении задач отдельно выводить ее затруднительно, и во многих вопросах теории тяжело обойтись без надежного знания этой формулы.

В п. 1 подробно рассматривается решение двух примеров. В первом из них отрабатывается умение применять формулу $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, во втором — формулы $P(A + B) = P(A) + P(B)$ и $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C)$ для попарно несовместных событий.

Источники

- Алгебра и начала анализа, 10-11 классы, Часть 1. Учебник, 10-е изд. (Базовый уровень), А.Г.Мордкович, М., 2009
- Алгебра и начала анализа, 10-11 классы. (Базовый уровень) Методическое пособие для учителя, А.Г. Мордкович, П.В.Семенов, М., 2010
- Таблицы составлены в MS Word и MS Excel.
- Интернет-ресурсы