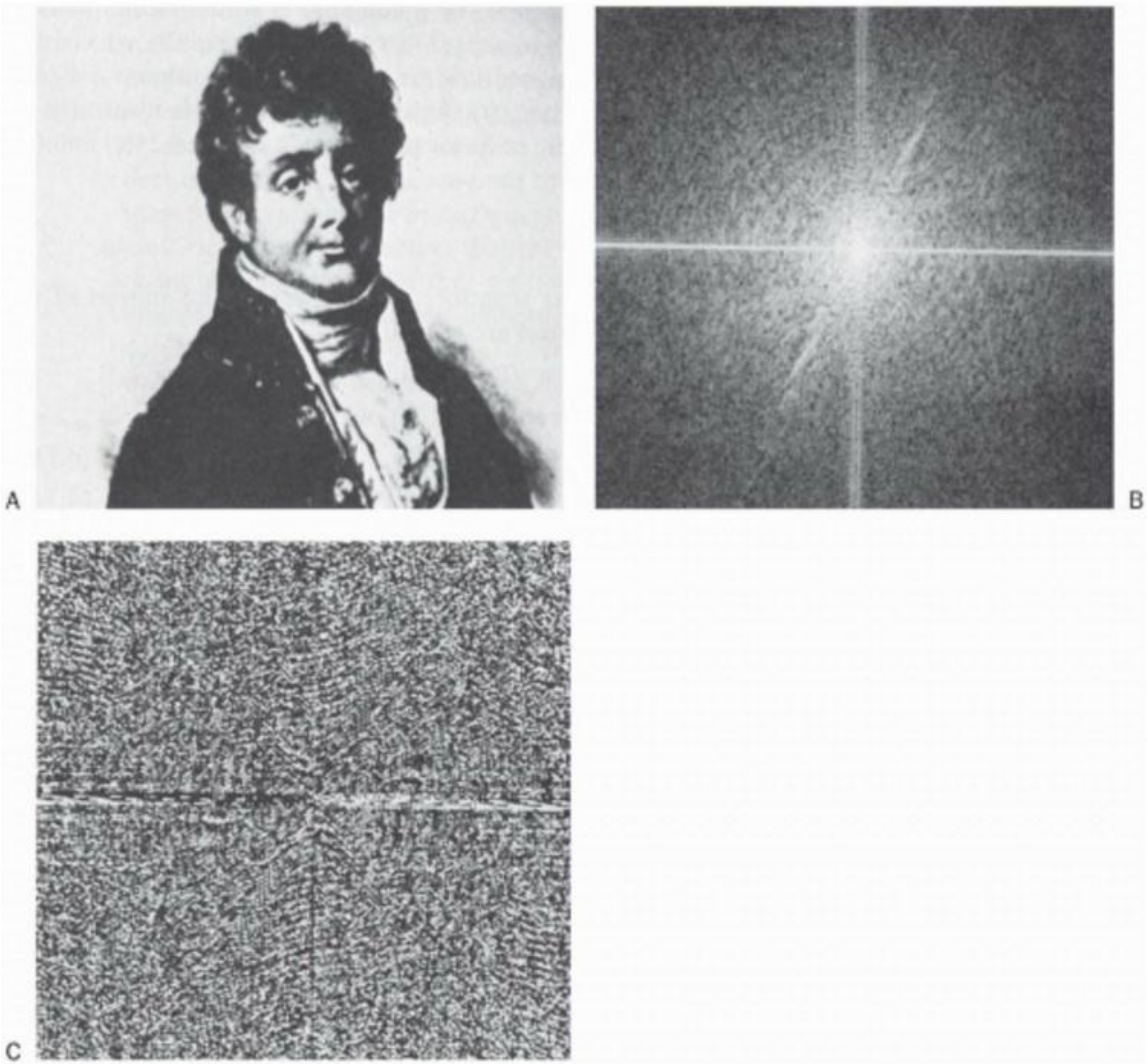
IV. Спектральные представления



13. Преобразование Фурье

- Преобразование Фурье — операция, сопоставляющая сигналу от вещественной переменной - времени другую функцию (возможно комплекснозначную) от вещественной переменной - частоты. Эта новая функция описывает часто-ты, которые образуют исходный сигнал.
- Формула дискретного преобразования Фурье (ДПФ):

$$X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-2\pi i w n}$$

- где ***x***[***n***] – входной дискретный сигнал, заданный во временнОй области,
- ***X***(***w***) выходной **непрерывный** сигнал, полученный в результате преобразования, он задан в частотной области.

13. Преобразование Фурье

- Обратное преобразование Фурье может быть получено из формулы для прямого преобразования

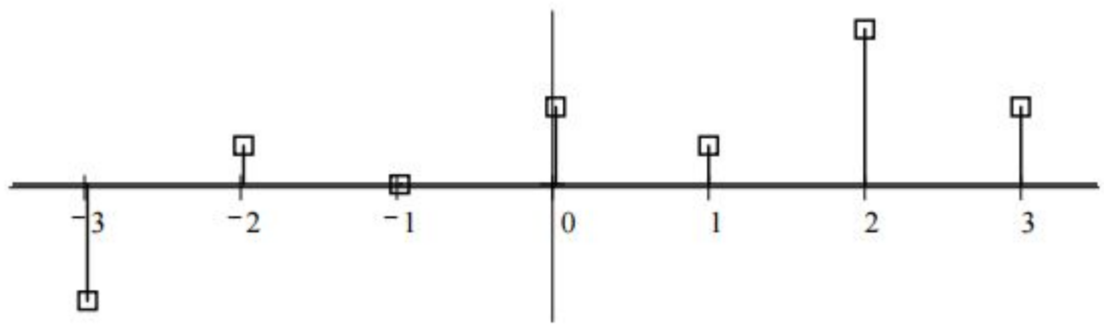
$$x[n] = \int_0^1 X(w) e^{2\pi inw} dw$$

- где ***x***[***n***] – входной дискретный сигнал, заданный во временнОй области,
- ***X***(***w***) выходной **непрерывный** сигнал, полученный в результате преобразования, он задан в частотной области.
- Функция ***f***(***x***) называется линейной, если

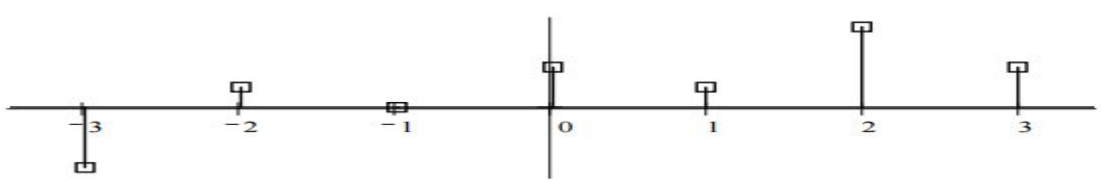
$$f(ax_1 + bx_2) = af(x_1) + bf(x_2)$$

13. Преобразование Фурье

- Будем рассматривать дискретные линейные системы, то есть системы, работающие с дискретными сигналами.
- На вход такой системы подается последовательность чисел $x[n]$ – это дискретный сигнал, на выходе получается последовательность чисел $y[n]$.
- $x[n]$



- Например, $y[n] = x[n]/2$



13. Преобразование Фурье

- Дельта-функция (цифровая) – это сигнал вида

$$\delta[n]=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\neq 0.\end{cases}$$

- График дельта-функции

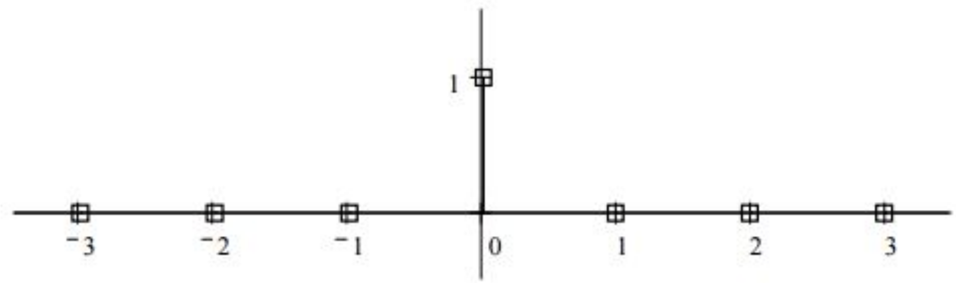


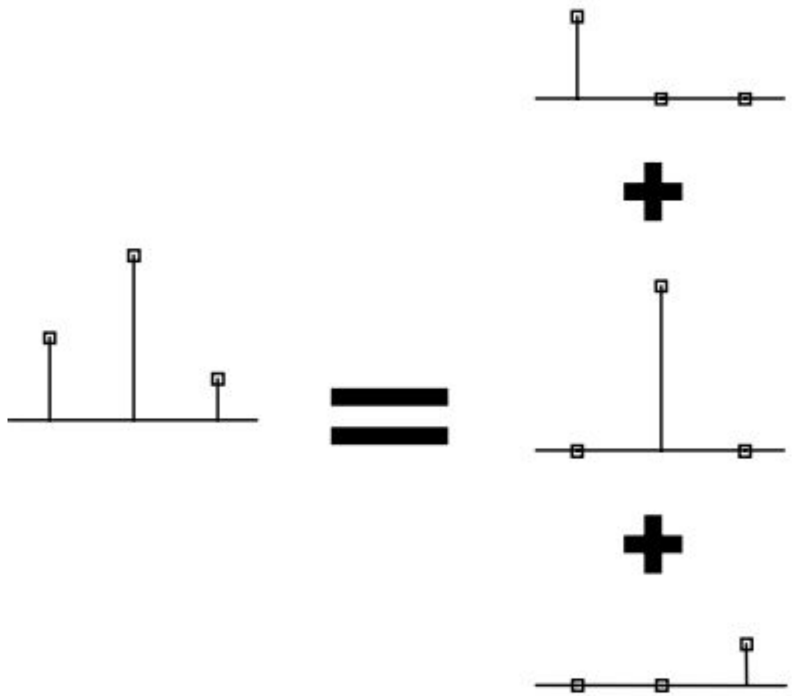
Рис. 2. Цифровая дельта-функция.

- Любой дискретный сигнал $x[n]$ можно разложить в сумму таких функций, сдвинутых во времени

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\delta(n-k)$$

13. Преобразование Фурье

- Пример



- Сигнал слева равен сумме трех дельта-функций с коэф-фициентами.

13. Преобразование Фурье

- Пусть линейная система преобразует некоторый сигнал $\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}]$. Подадим дельта-функцию на вход системы и измерим выходной сигнал.
- Пусть $\boldsymbol{\delta}[\boldsymbol{n}] \rightarrow \boldsymbol{h}[\boldsymbol{n}]$, то есть получили отклик на дельта-функцию. Оказывается, что зная $\boldsymbol{h}[\boldsymbol{n}]$ (отклик системы на дельта-функцию), **можно вычислить отклик системы на любой входной сигнал**.
- Действительно, так как любой входной сигнал является линейной комбинацией сдвинутых во времени дельта-функций, то выходной сигнал будет той же самой линейной комбинацией сдвинутых во времени функций $\boldsymbol{h}[\boldsymbol{n}]$.
- Формула для вычисления выходного сигнала $\boldsymbol{y}[\boldsymbol{n}]$ по входному сигналу $\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}]$ такова:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k]$$

13. Преобразование Фурье

- Пусть задан сигнал ***h*(*n*)** – отклик на дельта-функцию

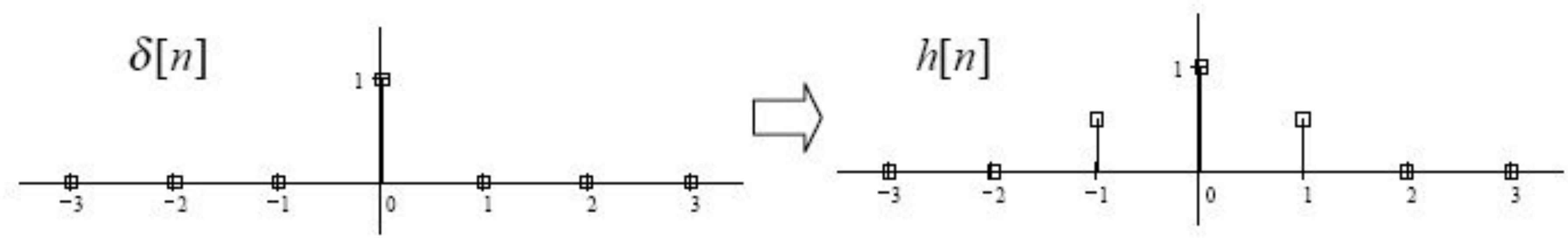
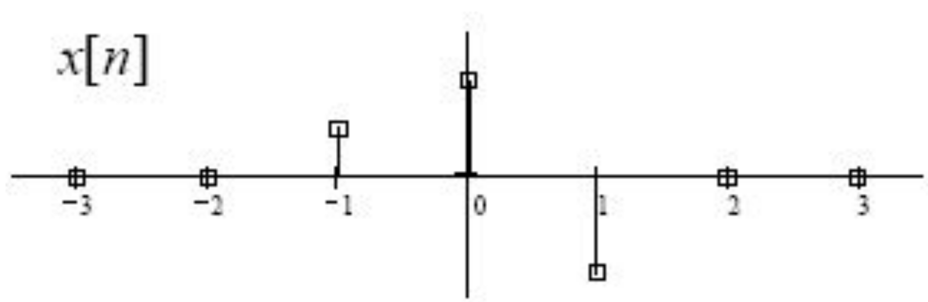


***Рис. 4**. Отклик системы на цифровую дельта-функцию.*

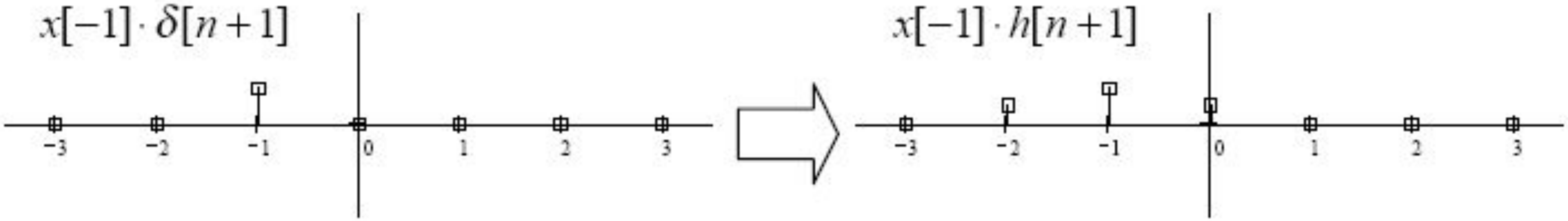
- Дан входной сигнал ***x*[*n*]** , который состоит из 3-х всплесков



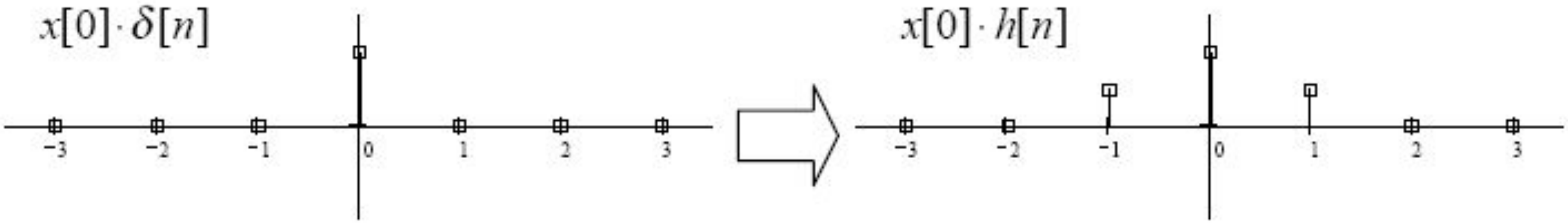
- Найдем отклик на этот сигнал. По линейному свойству отклик на сигнал с тремя всплесками будет равен сумме откликов на эти всплески.

13. Преобразование Фурье

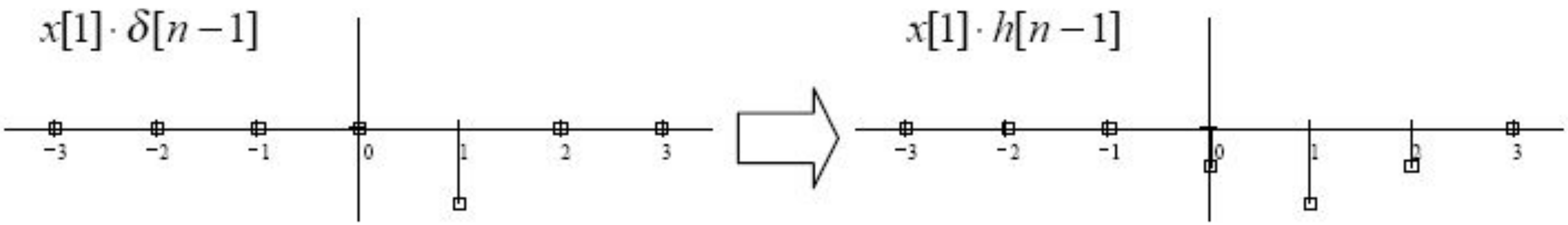
- Отклик на 1-й всплеск:



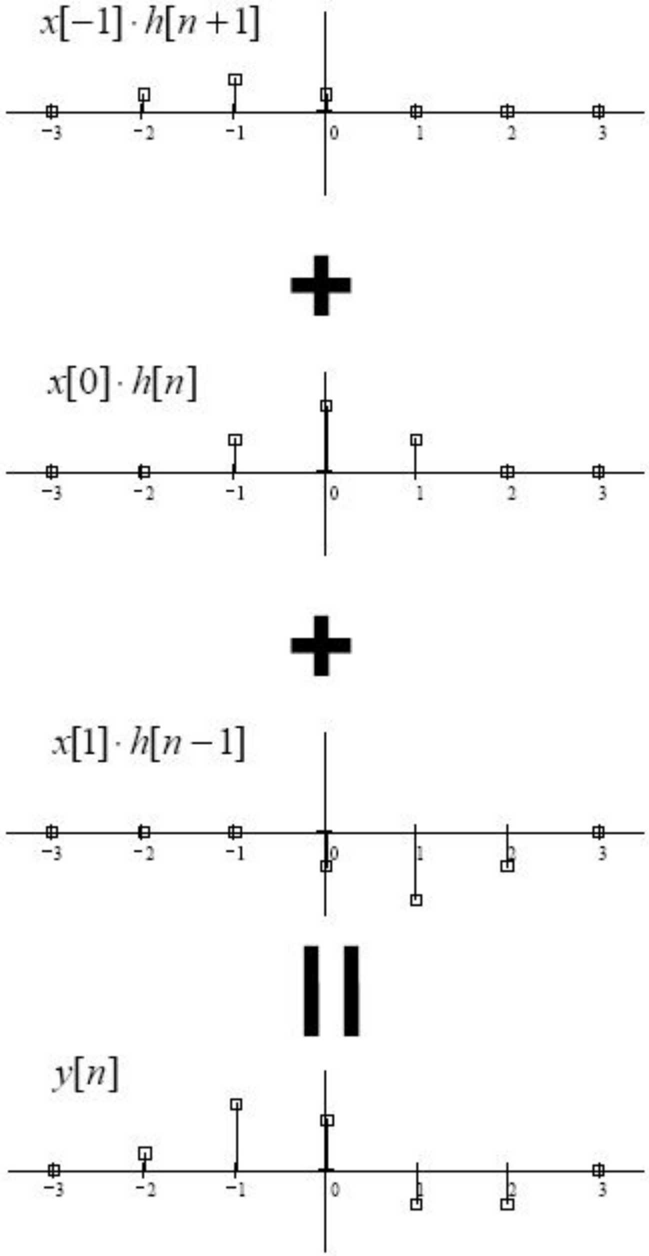
- Отклик на 2-й всплеск:



- Отклик на 3-й всплеск:



13. Преобразование Фурье



- Сумма трех всплесков дает дискретный сигнал, который и будет откликом на вход ***x***[***n***]
- Он напоминает синусоиду.

13. Преобразование Фурье

- Сигнал ***h***[***n***] называется **импульсной характеристикой** системы, т.к. он является откликом системы на единичный импульс (дельта-функцию).
- Рассмотрим алгоритм вычисления отклика линейной системы на произвольный сигнал для изображения.
- Дискретное изображение – это двумерный сигнал ***x***[***i,j***], обозначающий яркость изображения в каждой дискретной точке (пикселе) (***i,j***) на плоскости.
- **Дельта-функция в двумерном случае** – это единичная светлая точка с координатами (0,0) на черном фоне. Пусть наша линейная система отвечает на дельта-функцию функцией ***h***[***i,j***], такой что ***h***[***i,j***]=const на всех точках внутри круга с центром в точке (0,0) и диаметром 3 и равна нулю вне этого круга.

13. Преобразование Фурье

- Рассмотрим действие такой системы на изображение, состоящее из одной точки на черном фоне, но пусть теперь точка имеет координаты (m, n) и в эту точку сдвинута дельта-функция $\delta[i - m, j - n]$. Тогда откликом системы будет изображением $h[i-m, j-n]$.
- Таким образом, на единичные всплески в любой точке изображения система отвечает кругом радиуса 3 с центром в этой точки.

- То есть точка как бы размывается в круг. Поэтому в компьютерной графике импульсную характеристику линейной системы называют PSF – point spread function, т.е. **функция размытия точки**.

13. Преобразование Фурье

- **Дискретная свертка**. Формула свертки для одномерного случая:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[n-k]h[k]$$

- Формула корреляции для двух сигналов (одномерный случай):

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[n+k]g[k]$$

- Смысл этой операции в том, чтобы найти наиболее вероятные периоды повторения формы исходного сигнала.

13. Преобразование Фурье

- Пусть дискретный сигнал ***x***[n] имеет период **N** точек. В этом случае его можно представить в виде конечного ряда (т.е. линейной комбинации) дискретных синусоид:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N/2} A_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + B_k \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

- Система функций

$$\left\{\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right), \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right\} k = 0,\ldots, N/2$$

от аргумента ***n*** является ортогональным базисом для Это значит, что для разложения по ней любого элемента пространства (сигнала) нужно посчитать скалярные произведения этого
элемента со всеми функциями системы, и полученные коэффициенты

13. Преобразование Фурье

- Самое известное в цифровой обработке сигналов преобразование из временной области в частотную – это дискретное преобразование Фурье (ДПФ).
- Аргументом является дискретная по времени выборка **периодического сигнала** во временной области, при этом сигнал должен быть определен на оси времени от -∞ до +∞. Но реально набор входных данных для ДПФ – это конечное число отсчетов, обозначим их количество ***N***. Эту проблему можно решить, повторяя бесконечное число раз эти ***N*** отсчетов, чтобы обеспечить периодичность.
-
- Таким образом, реально ***N*** -точечное ДПФ преобразует дискретный сигнал $x[n]$, заданный на ***N*** точках. Виртуально от периодический, и период его самое большее, равен интервалу, на котором лежат эти ***N*** точек.

13. Преобразование Фурье

- Преобразование имеет два представления, экспоненциальное и тригонометрическое, которые эквивалентны:

$$X(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-i2\pi nk/N}=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\left(cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)-i\,sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right)$$

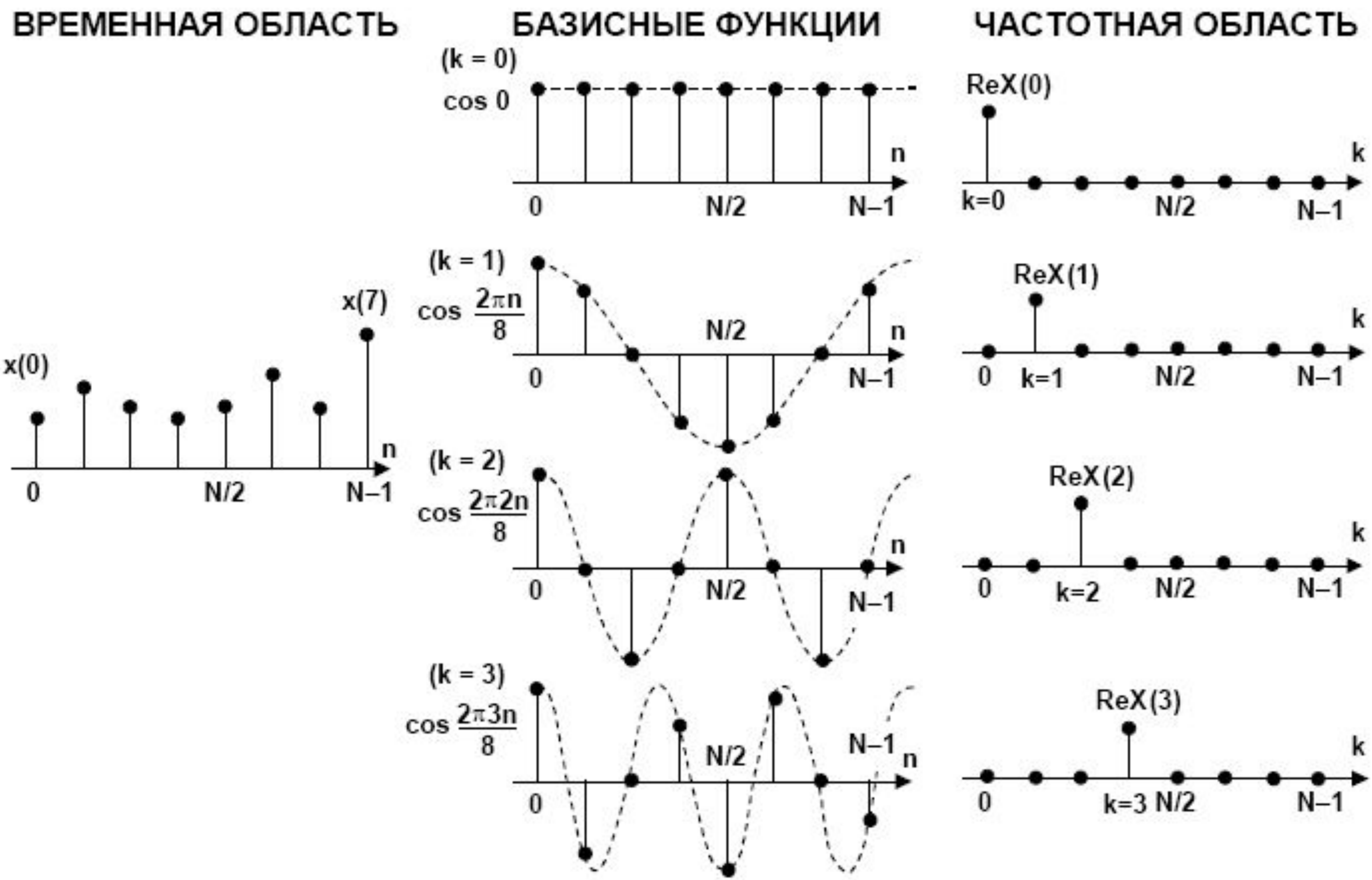
- Эквивалентность представлений сразу следует из формулы Эйлера.
- Здесь и аргумент, и получаемая функция дискретны, и ***x***[***n***], и ***X[k]*** имеют **N** отсчетов, от **0** до ***N-1*** . Формально можно расширять диапазон отсчетов спектра частот ***X[k]***.

13. Преобразование Фурье

- Преобразование напоминает дискретный аналог свертки сигнала ***x***[***n***] с косинус- и синус-ядрами. Эквивалентность представлений сразу следует из форму-лы Эйлера.
- Здесь и аргумент, и получаемая функция дискретны, и ***x***[***n***], и ***X[k]*** имеют ***N*** отсчетов, от 0 до ***N–1*** . Формально можно расширять диапазон отсчетов спектра частот ***X[k].***

- Пример вещественной части отсчетов (то есть, только для косинуса) представлен на Рис.

13. Преобразование Фурье



13. Преобразование Фурье

- Еще пример. Входной сигнал ***x***[***n***] равен дискретизации функции ***cos*** (***2π/N***). Тогда вещественная часть спектра будет равна:

$$X(k)=\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7}\cos\left(\frac{2\pi}{8}n\right)\cos\left(\frac{2\pi kn}{8}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{8}0\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{8}0\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{8}1\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{8}1\right)+\right.$$

$$\left.+\ldots+\cos\left(\frac{2\pi}{8}7\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{8}7\right)\right)$$

- Только первое слагаемое суммы не равно нулю, так как

13. Преобразование Фурье

$$\cos\left(\frac{2\pi}{8}n\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{8}n\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}n-\frac{\pi k}{4}n\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}n+\frac{\pi k}{4}n\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos n\frac{\pi}{4}(1-k)-\cos n\frac{\pi}{4}(1+k)\right)=0$$

- 2-е слагаемое равно нулю при любых ***n <> 0*** и любых ***k>=*** **0**. 1-е слагаемое не равно нулю при ***n <> 0*** и
- То есть для сигнала ***x***[***n***] с таким периодом частотное представление состоит из одного всплеска в на частоте ***k=1***. Величина всплеска равна 1. То есть это дискретная дельта-функция ***δ*** (***z*** – **1**).

13. Преобразование Фурье

- И действительно, сигнал ***cos*** (***At***) передается на частоте ***1/2πA*** герц (генерируется с угловой скоростью вращения рамки ***1/A*** радиан в секунду).
- Если же изменить начальную фазу сигнала ***cos* (*2π/N*)**, сдвинув график на 2 отсчета вправо, так, чтобы сигнал превратился в синусоиду, то после этого вещественная часть спектра станет равной нулю, а мнимая, в которую входит множитель ***sin*** (**.**), будет давать мнимый всплеск спектра на отсчете ***k*** **= 1**.
- То есть, четные функции при «свертке» с вещественной – косинусной частью дают ненулевой спектр, и нулевой в мнимой, синусной части.
- И наоборот, нечетные функции при «свертке» с мнимой – синусной частью дают ненулевой спектр, и нулевой в вещественной, синусной части.

13. Преобразование Фурье

- Формула обратного ДПФ, которое преобразует спектральное представление сигнала во временную область, выражается формулами:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{i2\pi nk/N} =$$

$$= \sum_{r=0}^{N-1} X(k)\left(\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)\right)$$

- Здесь сигнал ***x***[***n***] может иметь мнимую часть, хотя в прямом преобразовании ее не было. Это обусловлено округлениями при преобразованиях, спектральное представление сигнала во временную область, полученная мнимая часть может быть использована для оценки фаз и амплитуды.

13. Преобразование Фурье

- Прямое и обратное ДПФ

ЧАСТОТНАЯ ОБЛАСТЬ ←← ДПФ ←← ВРЕМЕННАЯ ОБЛАСТЬ

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{\frac{-j2\pi nk}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left[\cos\frac{2\pi\, nk}{N} - j\sin\frac{2\pi\, nk}{N}\right]$$

$$\boxed{W_N = e^{\frac{-j2\pi}{N}}} \qquad = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{nk}, \quad 0 \le k \le N-1$$

ВРЕМЕННАЯ ОБЛАСТЬ ←← ОБРАТНОЕ ДПФ ←← ЧАСТОТНАЯ ОБЛАСТЬ

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{\frac{j2\pi nk}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\left[\cos\frac{2\pi\, nk}{N} + j\sin\frac{2\pi\, nk}{N}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, W_N^{-nk}, \quad 0 \le n \le N-1$$

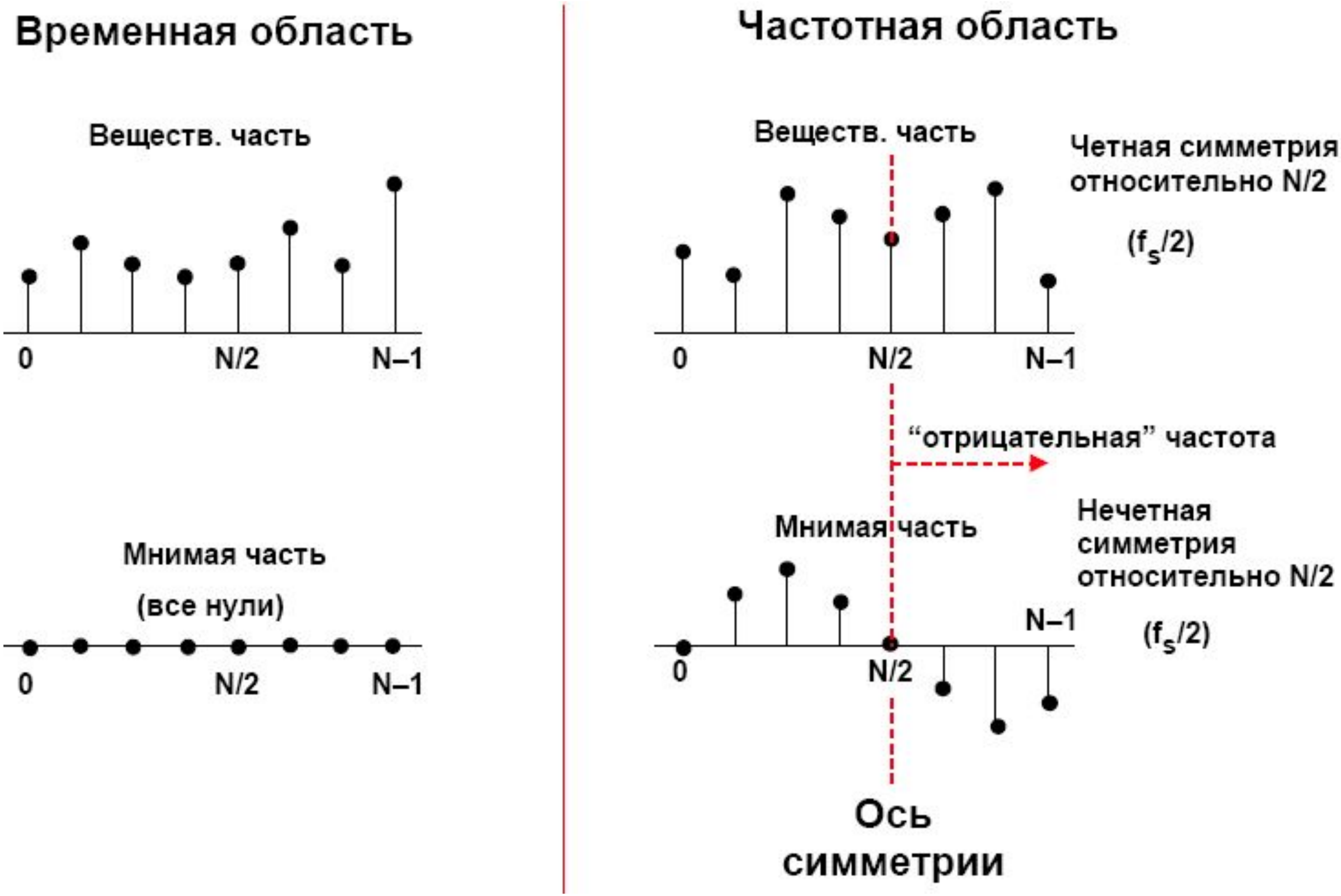
13. Преобразование Фурье

- Если известно, что во временной области сигнал не имеет мнимой части, то ее можно занулять. Однако, при выполнении быстрого преобразования Фурье необходимо знать полную формула обратного ДПФ.

- Если сигнал ***x***[***n***] является вещественным, то его Фурье-образ имеет вполне определенную структуру мнимой части, она в некотором роде симметрична по мнимым частотам, отрицательным компоненты здесь симметричны положительным (то есть частоты в каком-то смысле сопряжены).

13. Преобразование Фурье

- Соотношения мнимого и вещественного для ***Re*** сигнала



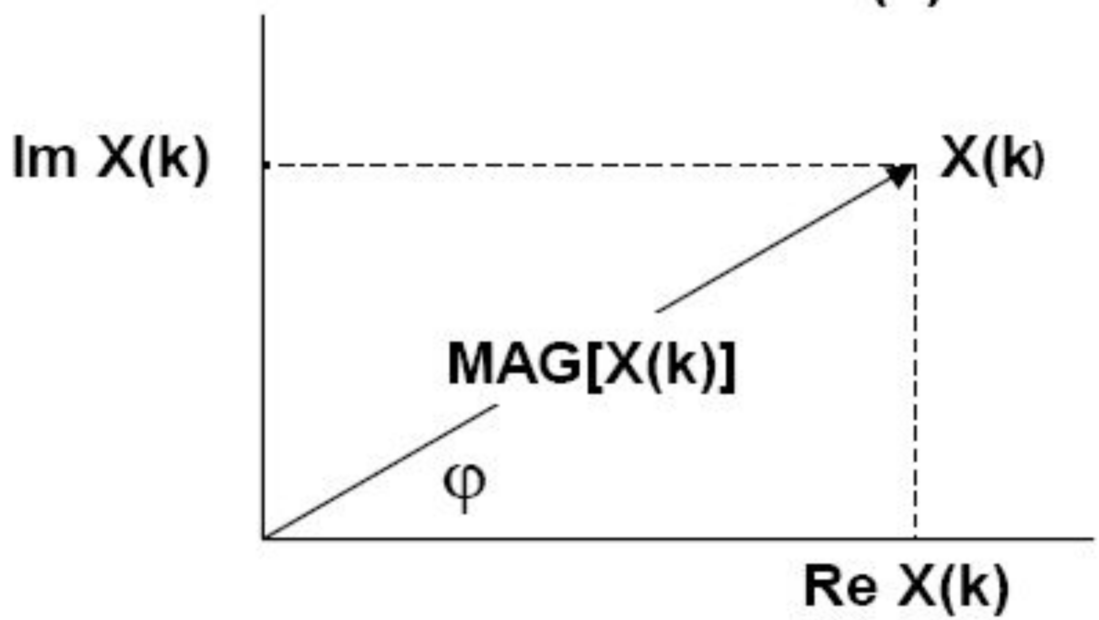
13. Преобразование Фурье

- Построение амплитуды и фазы спектра. Представлять фазу графически лучше в полярных координатах.

$$X(k) = ReX(k) + j\,ImX(k)$$

$$MAG\,[X(k)] = \sqrt{ReX(k)^2 + ImX(k)^2}$$

$$\varphi\,[X(k)] = \tan^{-1}\frac{ImX(k)}{ReX(k)}$$



13. Преобразование Фурье

- **Быстрое преобразование Фурье (БПФ)**.
- Для объяснения БПФ введем естественные обозначения

$$W_N = e^{-i2\pi/N}; \quad W_N^{nk} = e^{-i2\pi nk/N}$$

- В тригонометрической форме возведение ***W*** в степень соответствует изменению аргументов функций ***sin*** (.) и ***cos*** (.), можно сказать, к повороту угла, для которого они вычисляются. Величины ***W*** в степени являются базисными функциями Фурье, в БПФ их называют **коэффициентами поворота**.

13. Преобразование Фурье

- 8-точечное ДПФ. Требуется 8x8 операций умножения.

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{\frac{-j2\pi nk}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{nk}$$

$$\boxed{W_N = e^{\frac{-j2\pi}{N}}}$$

$X(0) =$	$x(0)W_8^0 + x(1)W_8^0 + x(2)W_8^0 + x(3)W_8^0 + x(4)W_8^0 + x(5)W_8^0 + x(6)W_8^0 + x(7)W_8^0$
$X(1) =$	$x(0)W_8^0 + x(1)W_8^1 + x(2)W_8^2 + x(3)W_8^3 + x(4)W_8^4 + x(5)W_8^5 + x(6)W_8^6 + x(7)W_8^7$
$X(2) =$	$x(0)W_8^0 + x(1)W_8^2 + x(2)W_8^4 + x(3)W_8^6 + x(4)W_8^8 + x(5)W_8^{10} + x(6)W_8^{12} + x(7)W_8^{14}$
$X(3) =$	$x(0)W_8^0 + x(1)W_8^3 + x(2)W_8^6 + x(3)W_8^9 + x(4)W_8^{12} + x(5)W_8^{15} + x(6)W_8^{18} + x(7)W_8^{21}$
$X(4) =$	$x(0)W_8^0 + x(1)W_8^4 + x(2)W_8^8 + x(3)W_8^{12} + x(4)W_8^{16} + x(5)W_8^{20} + x(6)W_8^{24} + x(7)W_8^{28}$
$X(5) =$	$x(0)W_8^0 + x(1)W_8^5 + x(2)W_8^{10} + x(3)W_8^{15} + x(4)W_8^{20} + x(5)W_8^{25} + x(6)W_8^{30} + x(7)W_8^{35}$
$X(6) =$	$x(0)W_8^0 + x(1)W_8^6 + x(2)W_8^{12} + x(3)W_8^{18} + x(4)W_8^{24} + x(5)W_8^{30} + x(6)W_8^{36} + x(7)W_8^{42}$
$X(7) =$	$x(0)W_8^0 + x(1)W_8^7 + x(2)W_8^{14} + x(3)W_8^{21} + x(4)W_8^{28} + x(5)W_8^{35} + x(6)W_8^{42} + x(7)W_8^{49}$

N^2 умножений с комплексными числами

$\frac{1}{N}$ Не учтенный масштабный коэффициент

13. Преобразование Фурье

- БПФ уменьшает чсило операций вычисления ДПФ за счет того, что повороты повторяются для разных отсчетов, и если запоминать некоторые промежуточные значения вычислений, то можно за счет увеличения памяти уменьшить число операций.
- Идею БПФ применял в своих вычислениях еще Ф. Гаусс (начало XIX века).
- Если **N** -точечное ДПФ требует ***N*** ^{2} умножений комплексных чисел, то БПФ только $(N/2)log_2(N)$
- умножений комплексных чисел. **БПФ вычисляет все компоненты** выходного спектра (или все, или ни одного!). Если необходимо рассчитать только несколько точек спектра, ДПФ может оказаться более эффективным.

13. Преобразование Фурье

• Соотношения между поворотами, позволяющие уменьшить число умножений

симметричность: $W_N^{r+N/2} = -W_N^{r}$, периодичность: $W_N^{r+N} = W_N^{r}$

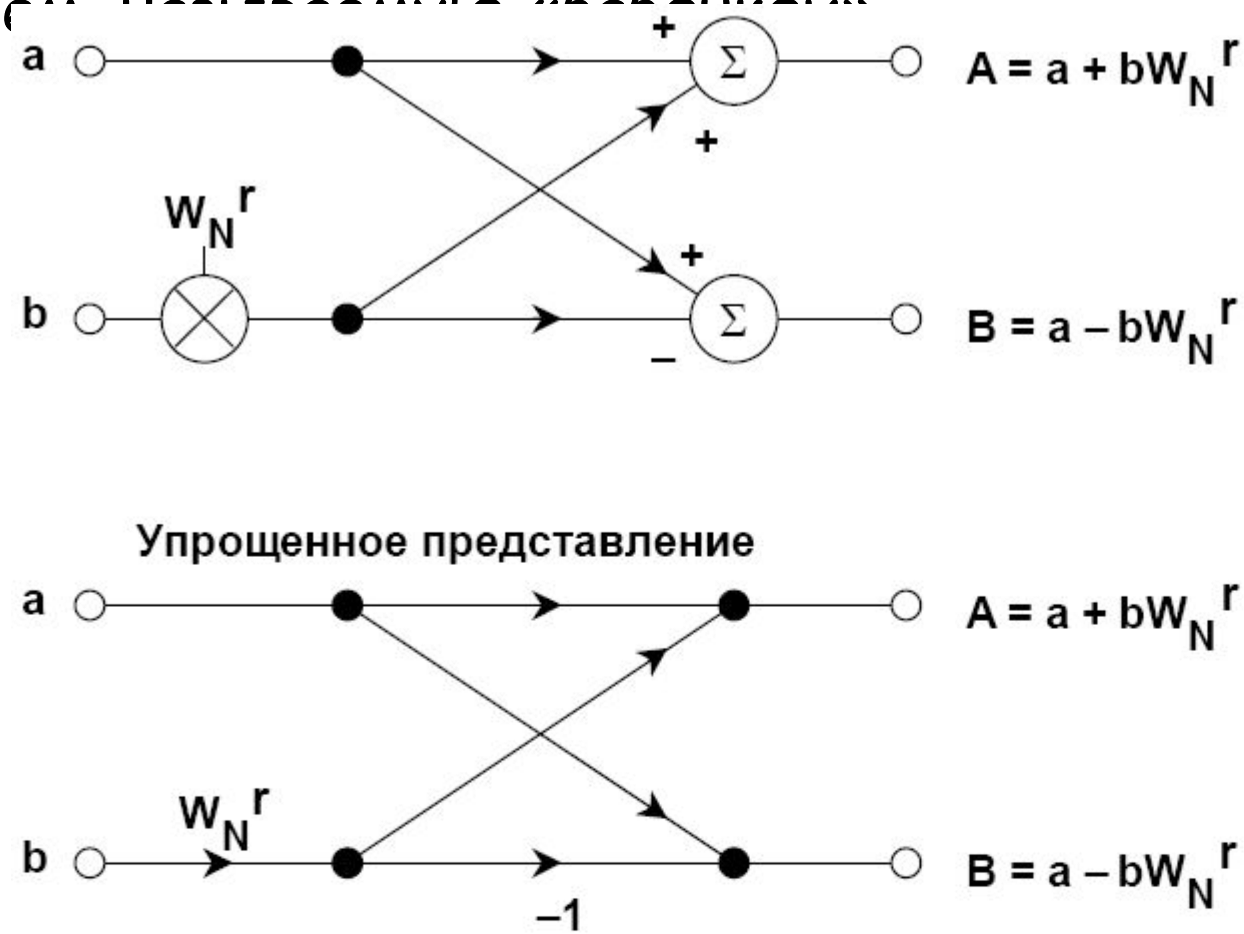
N = 8

$$W_8^4 = W_8^{0+4} = -W_8^0 = -1$$
$$W_8^5 = W_8^{1+4} = -W_8^1$$
$$W_8^6 = W_8^{2+4} = -W_8^2$$
$$W_8^7 = W_8^{3+4} = -W_8^3$$
$$W_8^8 = W_8^{0+8} = +W_8^0 = +1$$
$$W_8^9 = W_8^{1+8} = +W_8^1$$
$$W_8^{10} = W_8^{2+8} = +W_8^2$$
$$W_8^{11} = W_8^{3+8} = +W_8^3$$

• • •

13. Преобразование Фурье

- Алгоритм БПФ по основанию 2 разделяет полное вычисление ДПФ на комбинацию 2-точечных ДПФ. Каждое 2-точечное ДПФ содержит базовую операцию умножения с накоплением, называемую «бабочкой»

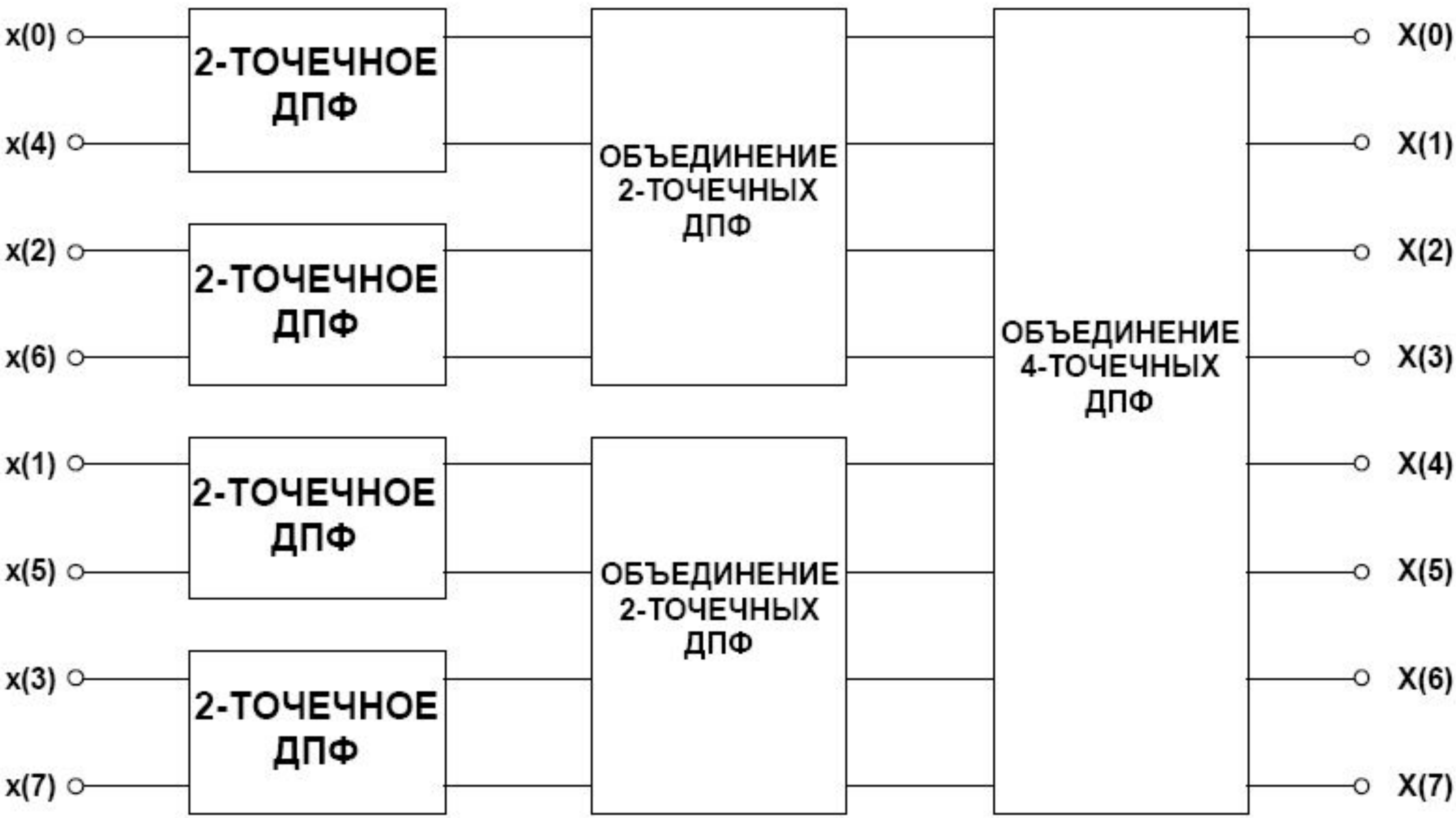


13. Преобразование Фурье

- Верхняя схема дает функциональное представление «бабочки», с цифровыми умножителями и сумматорами.
- В более простой нижней схеме операции умножения указана множителем на дуге, а сумма вычисляется на двух дугах, ведущих в узел.
- Так можно организовать линейные комбинации для поворотов, то есть, для экспоненты.
- Можно выполнить вначале 2-х точечные преобразования, по их результатам выполнить 4-х точечные, а из них скомбинировать 8-ми точечное.
- Так получается 3-х каскадная быстрая схема построения ДПФ, это и будет БПФ. Единственное ограничение: число исходных отсчетов сигнала должно быть степенью двойки.

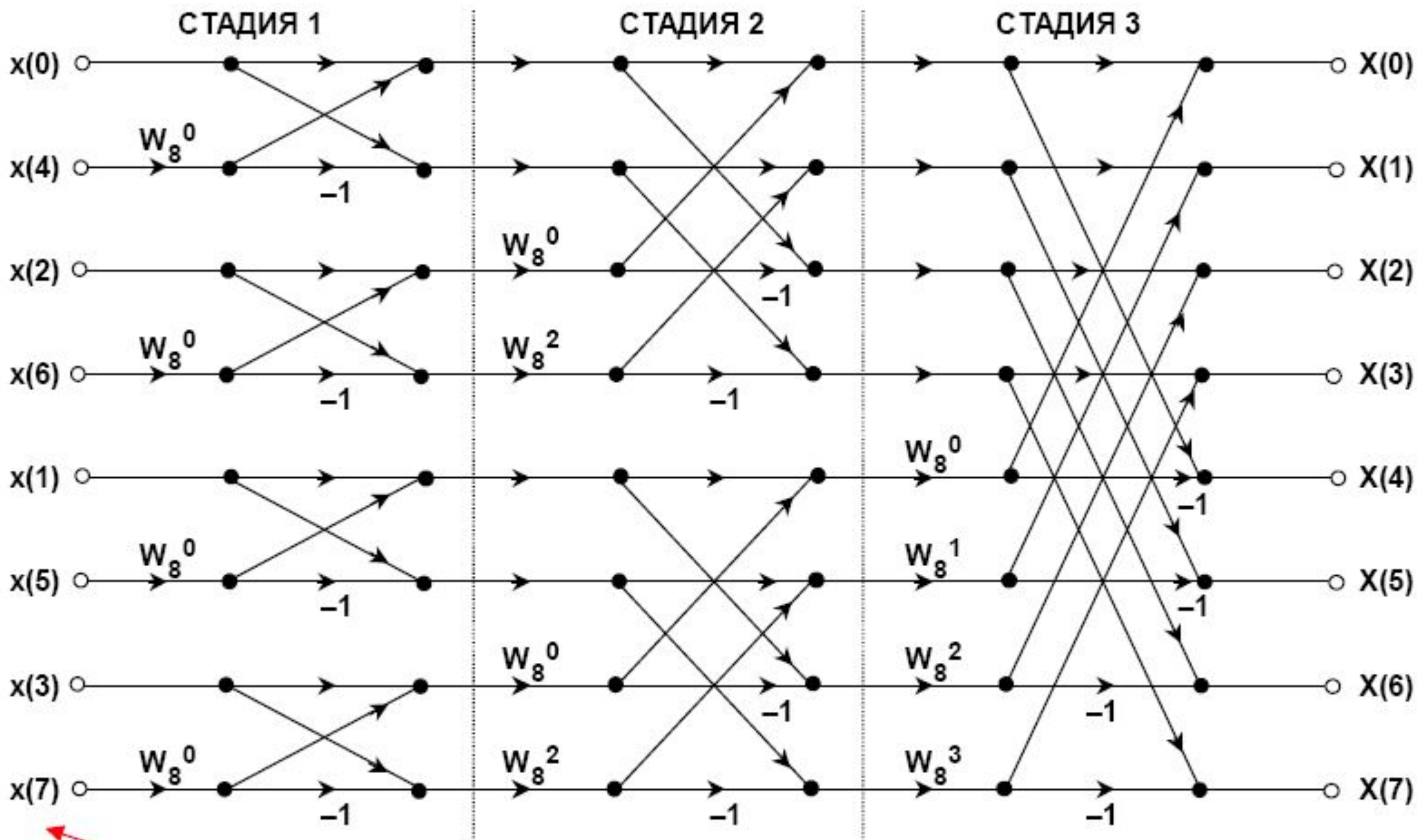
13. Преобразование Фурье

- 3-х каскадная схема 8-ми точечного БПФ (прореживание по времени)



13. Преобразование Фурье

- Алгоритм 8-ми точечного БПФ



Исходные данные в бит-реверсивном порядке

$\frac{N}{2}\log_2 N$ умножений с комплексными числами