Информатика в задачах теплоэнергетики

Лекция №2

Решение задач интерполяции в теплоэнергетике

В результате эксперимента по определению холостого хода определена зависимость потребляемой из сети мощности (Po, Вт) от входного напряжения (U, В) для электрического асинхронного двигателя вращающего центробежный насос.

U, В	132	140	150	162	170	180	190	200	211	220	232	240	251
U, Вт	330	350	385	425	450	485	540	600	660	730	920	1020	1350

Построить график интерполяционной зависимости P(U).

Решение задач интерполяции каноническим полиномом

Канонический полином

$U := (132\ \ 140\ \ 150\ \ 162\ \ 170\ \ 180\ \ 190\ \ 200\ \ 211\ \ 220\ \ 232\ \ 240\ \ 251)^T$

$P := (330\ \ 350\ \ 385\ \ 425\ \ 450\ \ 485\ \ 540\ \ 600\ \ 660\ \ 730\ \ 920\ \ 1020\ \ 1350)^T$ $\quad n := 12$

Указываем точки: $i := 0..n$ $\quad j := 0..n$

Формируем матрицу: $A_{i,j} := (U_i)^j$

Решение системы уравнений (определяем коэффициенты полинома): $a := \text{lsolve}(A, P)$

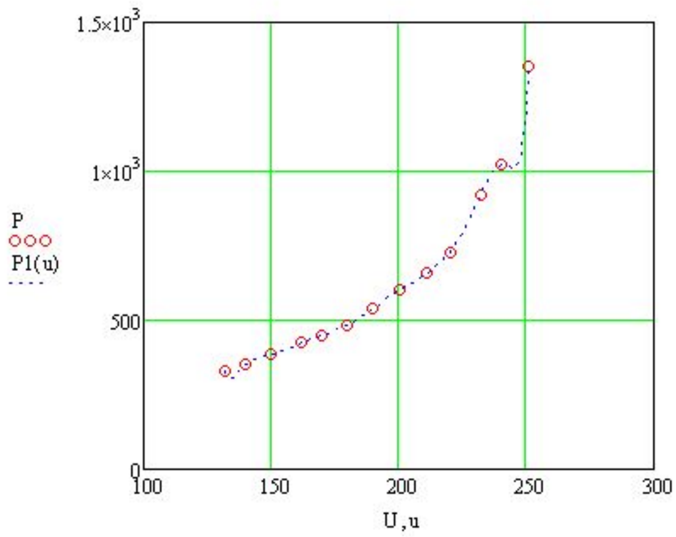
задаем исследуемый диапазон: $u := 132..251$

Формирование канонического полинома:

$$P1(u) := \sum_{i=0}^{n} \left(a_i \cdot u^i\right)$$

$P1(u) =$

330
311.966
306.22
308.246
314.77
323.488
332.85
341.874
350.001
356.975
362.749
367.412
371.135
374.125
376.598
...



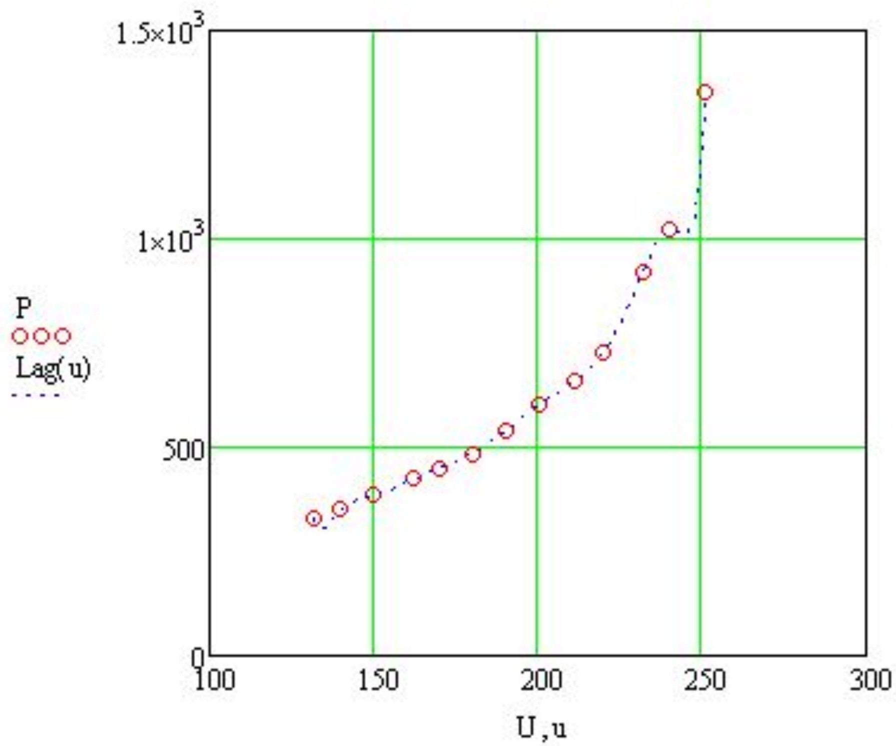
Решение задач интерполяции полиномом Лагранжа

Полином Лагранжа

$$Lag(u) := \sum_{i=0}^{n} \left(P_i \cdot \prod_{j=0}^{n} \text{if}\left(i = j, 1, \frac{u - U_j}{U_i - U_j} \right) \right)$$

$Lag(u) =$

330
312.018
306.292
308.319
314.831
323.533
332.878
341.886
350
356.964
362.731
367.391
371.113
374.104
376.581
...



Решение задач интерполяции полиномом Ньютона

Полином Ньютона

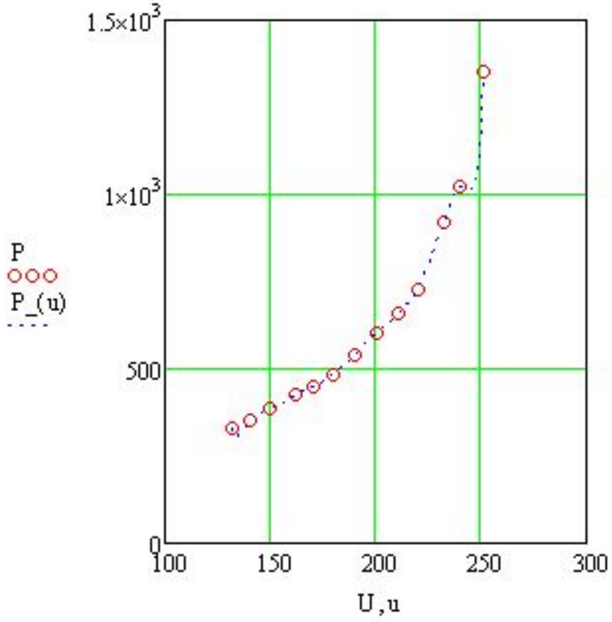
$c_{i,0} := P_i \qquad n := \mathrm{last}(P) \qquad i := 1..n \qquad j := 1..n$

$$c_{i,j} := \mathrm{if}\left(i \ge j, \frac{c_{i,j-1} - c_{j-1,j-1}}{U_i - U_{j-1}}, 0\right)$$

Формируем полином Ньютона:

$$P\_(u) := \sum_{i=0}^{n}\left[c_{i,i}\cdot\left(\prod_{j=0}^{n} \mathrm{if}(j \ge i, 1, u - U_j)\right)\right]$$

u =	P_(u) =
132	330
133	312.018
134	306.292
135	308.319
136	314.831
137	323.533
138	332.878
139	341.886
140	350
141	356.964
142	362.731
143	367.391
144	371.113
145	374.104
146	376.581
...	...



Сравнение решения задачи интерполяции разными методами

u =	P1(u) =	Lag(u) =	P_(u) =
132	330	330	330
133	311.966	312.018	312.018
134	306.22	306.292	306.292
135	308.246	308.319	308.319
136	314.77	314.831	314.831
137	323.488	323.533	323.533
138	332.85	332.878	332.878
139	341.874	341.886	341.886
140	350.001	350	350
141	356.975	356.964	356.964
142	362.749	362.731	362.731
143	367.412	367.391	367.391
144	371.135	371.113	371.113
145	374.125	374.104	374.104
146	376.598	376.581	376.581
...	...	...	...

Аппроксимация данных

Основная задача *аппроксимации* – построение приближенной (аппроксимирующей) функции, в целом наиболее близко проходящей около данных точек или около данной непрерывной функции. Такая задача возникает при наличии погрешности в исходных данных (в этом случае нецелесообразно проводить функцию точно через все точки, как в интерполяции) или при желании получить упрощенное математическое описание сложной или неизвестной зависимости.

Аппроксимация данных

Близость исходной и аппроксимирующей функций определяется числовой мерой – *критерием аппроксимации* (близости). Наибольшее распространение получил квадратичный критерий, равный сумме квадратов отклонений расчетных значений от "экспериментальных" (т.е. заданных), – критерий близости в заданных точках:

$$R = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i^{расчет.})^2 .$$

Квадратичный критерий обладает рядом "хороших" свойств, таких, как дифференцируемость, обеспечение единственного решения задачи аппроксимации при полиномиальных аппроксимирующих функциях.

Аппроксимация данных

$$R = \max_i \left| y_i - y_i^{расчет.} \right|.$$

Этот критерий менее распространен в связи с аналитическими и вычислительными трудностями, связанными с отсутствием гладкости функции и ее дифференцируемости.

В обоих рассмотренных случаях в качестве значения функции y можно брать не только абсолютные, но и относительные значения, например: y_i / y_n и другие.

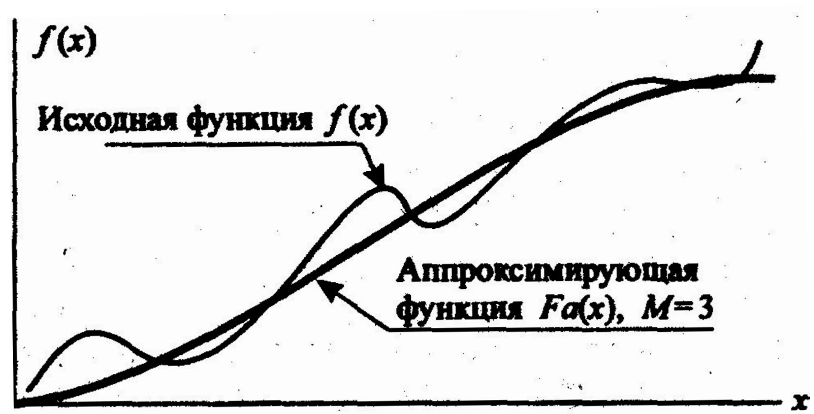
Выделяют две основные задачи аппроксимации:

1) получение аппроксимирующей функции, описывающей имеющиеся данные, с погрешностью не хуже заданной;

2) получение аппроксимирующей функции заданной структуры с наилучшей возможной погрешностью.

Чаще всего первая задача сводится ко второй путем перебора различных аппроксимирующих функций с последующим выбором наилучшей.

Аппроксимация данных



Метод наименьших квадратов

Метод базируется на применении в качестве критерия близости суммы квадратов отклонений заданных и расчетных значений. При заданной структуре аппроксимирующей функции $y_i^{расчет.}(x)$ необходимо подобрать параметры этой функции таким образом, чтобы получить наименьшее значение критерия близости, т.е. наилучшую аппроксимацию.

$$y_i^{расчет.}(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_0 = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j;$$

$$R = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \sum_{j=0}^{k} a_j x_i^j)^2.$$

Метод наименьших квадратов

Искомые переменные a_j можно найти из необходимого условия минимума R по этим переменным, т.е. $dR/da_p = 0$ (для $p = 0,1,2,\ldots, K$). Продифференцируем по a_p (p – текущий индекс):

$$dR/da_p = 2\sum(y - \sum a_j x_i^j)(-x_i^p) = 0,$$

где $p=0,1,2,\ldots,к$, $i=1,2,\ldots,n$.

Метод наименьших квадратов

После очевидных преобразований (сокращение на два, раскрытие скобок, изменение порядка суммирования) получим:

$$dR/da_p = \sum_j y_i\,(-x_i^p) + \sum_i \sum_j a_j x_i^j x_i^p = \sum_i y_j\,(-x_i^p) + \sum_j a_j \sum_i x_i^j x_i^p = 0,$$

где $p=0,1,2,\ldots,к.$

Перепишем последние равенства:

$$\sum_j a_j \sum_i x_i^j x_i^p = \sum_i y_i x_i^p,$$

Метод наименьших квадратов

Получилась система *n+1* уравнений с таким же количеством неизвестных a_j, причем линейная относительно этих переменных. Эта система называется *системой нормальных уравнений*. Из ее решения находятся параметры a_j аппроксимирующей функции, обеспечивающие *min R*, т.е. наилучшее возможное квадратичное приближение. Зная коэффициенты, можно (если нужно) вычислить и величину *R* (например, для сравнения различных аппроксимирующих функций). Следует помнить, что, при изменении даже одного значения исходных данных (или пары значений x_i, y_i, или одного из них), все коэффициенты изменят в общем случае свои значения, так как они полностью определяются исходными данными. Поэтому при повторении аппроксимации с несколько изменившимися данными (например, вследствие погрешностей измерения, помех, влияния неучтенных факторов и т.п.) получится другая аппроксимирующая функция, отличающаяся коэффициентами.

Метод наименьших квадратов

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

- полином 1 порядка

- полином n-го порядка

$$\begin{cases} m a_0 + \sum_{i=0}^{m} x_i a_1 + \sum_{i=0}^{m} x_i^2 a_2 + \cdots + \sum_{i=0}^{m} x_i^n a_n = \sum_{i=0}^{m} y_i \\ \sum_{i=0}^{m} x_i a_0 + \sum_{i=0}^{m} x_i^2 a_1 + \cdots + \sum_{i=0}^{m} x_i^{n+1} a_n = \sum_{i=0}^{m} x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{m} x_i^n a_0 + \sum_{i=0}^{m} x_i^{n+1} a_1 + \cdots + \sum_{i=0}^{m} x_i^{2n} a_n = \sum_{i=0}^{m} x_i^n y_i \end{cases}$$

Метод наименьших квадратов

Дана таблично заданная функция (табл. 1.1.). Требуется найти аппроксимирующую функцию в виде линейного полинома $y=a_0+a_1x$ по имеющимся экспериментальным данным.

Таблица 1.1.

Данные для аппроксимации по МНК

n (кол-во точек)	0	1	2	3
t, ^oC	10	20	30	40
h, кДж/кг	42,04	125,70	209,30	355,00

$$h^{расчет} = a_0 + a_1 t_i$$

$$R = \sum_{i=1}^{n} (h_i - a_0 - a_1 t_i)^2$$

Найдем производные по a_0 и a_1:

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{da_0} = 0 \\ \dfrac{dR}{da_1} = 0 \end{cases}$$

Метод наименьших квадратов

$$\begin{cases} 2\sum_{i=1}^{n}(h_i - a_0 - a_1 t_i)(-1) = 0 \\ 2\sum_{i=1}^{n}(h_i - a_0 - a_1 t_i)(-t_i) = 0 \end{cases}$$

Проведя преобразования, получим:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(a_0 + a_1 t_i - h_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}(a_0 t_i + a_1 t_i^2 - h_i t_i) = 0 \end{cases}$$

Метод наименьших квадратов

Система нормальных уравнений для полинома 1 степени будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} h_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} t_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} t_i^2 = \sum_{i=1}^{n} t_i h_i \end{cases}$$

Используя имеющиеся данные, получим:
$n=5$, $\Sigma t_i=150$, $\Sigma t_i^2=5500$, $\Sigma h_i=1233$, $\Sigma h_i t_i=48463$;

$$\begin{cases} a_0 5 + a_1 150 = 1233 \\ a_0 150 + a_1 5500 = 48463 \end{cases}$$

Решив полученную систему линейных уравнений относительно a_0 и a_1, получим $a_0=-97,6$; $a_1=11,47$.

Аппроксимирующая функция имеет вид: $h(t)= -97,6 + 11,47t_i$

Метод наименьших квадратов

	A	B	C	D	E	F	G
1	15	t	h	$(t_i)^2$	$(h_i)^2$	$(ti*h_i)$	$(ti*h_i)^2$
2	x_0	10	42,04	100	1767,36	420,4	176736,16
3	x_1	20	125,7	400	15800,5	2514	6320196
4	x_2	30	209,3	900	43806,5	6279	39425841
5	x_3	40	355	1600	126025	14200	201640000
6	x_4	50	501	2500	251001	25050	627502500
7	сумма:	150	1233	5500	438400	48463,4	875065273
8							
9				система уравнений:			
10	n=	5		5,0	150,0	1233,0	
11	$\Sigma t_i=$	150,00		150,0	5500,0	48463,4	
12	$\Sigma h_i=$	1 233,04		матрица A		матр b	
13	$\Sigma(t_i)^2=$	5 500,00		коэффициенты полинома:			
14	$\Sigma(h_i)^2=$	438 400,34				-97,558	
15	$\Sigma(ti*h_i)=$	48 463,40				11,4722	
16	$\Sigma(ti*h_i)^2=$	875 065 273,16					

$$h^{расчет} = a_0 + a_1 t_i$$

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} h_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} t_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} t_i^2 = \sum_{i=1}^{n} t_i h_i \end{cases}$$

Формируем полином:

a_0	+	$a_1 \cdot t_1$	=	74,52
-98	+	172	=	74,52

Метод наименьших квадратов

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	15	t	h	$(t_i)^2$	$(h_i)^2$	$(ti*h_i)$	$(ti*h_i)^2$					
2	x_0	10	42,04	=B2*B2	=C2*C2	=B2*C2	=(B2*C2)^2					
3	x_1	20	125,7	=B3*B3	=C3*C3	=B3*C3	=(B3*C3)^2					
4	x_2	30	209,3	=B4*B4	=C4*C4	=B4*C4	=(B4*C4)^2					
5	x_3	40	355	=B5*B5	=C5*C5	=B5*C5	=(B5*C5)^2					
6	x_4	50	501	=B6*B6	=C6*C6	=B6*C6	=(B6*C6)^2					
7	сумма:	=СУММ(B2:B6)	=СУММ(C2:(	=СУММ(D2:D6)	=СУММ(E2:E6)	=СУММ(F2:F6)	=СУММ(G2:G6)					
8												
9				система уравнений:								
10	n=	5		=B10	=B11	=B12						
11	Σt_i=	=СУММ(B2:B6)		=B11	=B13	=B15						
12	Σh_i=	=СУММ(C2:C6)		матрица А		матр b						
13	$\Sigma(t_i)^2$=	=D7		коэффициенты полинома:								
14	$\Sigma(h_i)^2$=	=E7				=МУМНОЖ(D14:E15;F10:F11)						
15	$\Sigma(ti*h_i)$=	=F7				=МУМНОЖ(D14:E15;F10:F11)						
16	$\Sigma(ti*h_i)^2$=	=G7										
17								Форм				
18								a_0	+	$a_1 t_1$	=	=L19
19								=F14	+	=F15*A1	=	=F14+F15*A1
20												

$$h^{расчет} = a_0 + a_1$$

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} h_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} t_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} t_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \end{cases}$$

Метод наименьших квадратов

$$t := \begin{pmatrix}10\\20\\30\\40\\50\end{pmatrix} \quad h := \begin{pmatrix}42.04\\125.7\\209.3\\355\\501\end{pmatrix} \quad i := 0..4 \quad T := 15$$

$$A := \begin{bmatrix} 5 & \sum_{i=0}^{4} t_i \\ \sum_{i=0}^{4} t_i & \sum_{i=0}^{4} (t_i)^2 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{4} h_i \\ \sum_{i=0}^{4} (h_i \cdot t_i) \end{bmatrix}$$

$$a := A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix}-97.558\\11.472\end{pmatrix}$$

$$H(t) := a_0 + a_1 \cdot t$$

$$H(15) = 74.525$$

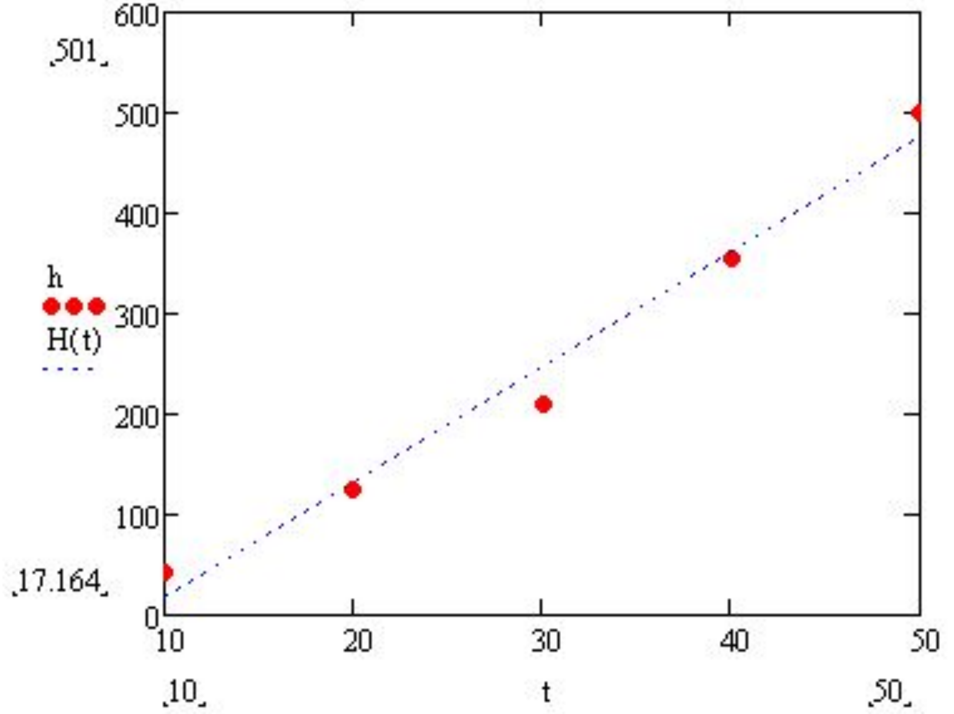
$$Pogr_i := H(t_i) - h_i$$

$$H(t) = \begin{pmatrix}17.164\\131.886\\246.608\\361.33\\476.052\end{pmatrix}$$

$Pogr_i =$

-24.876
6.186
37.308
6.33
-24.948

$$h := \begin{pmatrix}42.04\\125.7\\209.3\\355\\501\end{pmatrix}$$



Метод неопределенных коэффициентов

Метод базируется на составлении и решении системы линейных уравнений. При заданной системе уравнений необходимо подобрать параметры этой функции таким образом, чтобы получить наименьшее значение критерия близости, т.е. наилучшую аппроксимацию. При этом составляется система уравнений исходя из заданных начальных значений.

Метод неопределенных коэффициентов

$$y = P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n$$

Затем строим матрицу:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x + a_2 x + a_3 x + a_x x = y \\ a_0 + a_1 x + a_2 x + a_3 x + a_x x = y \\ a_0 + a_1 x + a_2 x + a_3 x + a_x x = y \\ a_0 + a_1 x + a_2 x + a_3 x + a_x x = y \\ a_0 + a_1 x + a_2 x + a_3 x + a_x x = y \end{cases}$$

Решаем систему (находим коэффициенты полинома) и формируем полином n-ой степени.

Метод неопределенных коэффициентов

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 10 & 10^2 & 10^3 & 10^4 \\ 1 & 20 & 20^2 & 20^3 & 20^4 \\ 1 & 30 & 30^2 & 30^3 & 30^4 \\ 1 & 40 & 40^2 & 40^3 & 40^4 \\ 1 & 50 & 50^2 & 50^3 & 50^4 \end{pmatrix} \qquad z := \begin{pmatrix} 42.04 \\ 125.7 \\ 209.3 \\ 355 \\ 501 \end{pmatrix}$$

$$fd := \mathrm{lsolve}(C, z)$$

$$fd = \begin{pmatrix} -227.8 \\ 45.596 \\ -2.43 \\ 0.062 \\ -5.165 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$P1(t) := fd_0 + fd_1 \cdot t + fd_2 \cdot t^2 + fd_3 \cdot t^3 + fd_4 \cdot t^4$$

$$P1(t) = \begin{pmatrix} 42.04 \\ 125.7 \\ 209.3 \\ 355 \\ 501 \end{pmatrix} \qquad P(t) = \begin{pmatrix} 42.04 \\ 125.7 \\ 209.3 \\ 355 \\ 501 \end{pmatrix} \qquad h := \begin{pmatrix} 42.04 \\ 125.7 \\ 209.3 \\ 355 \\ 501 \end{pmatrix}$$

Метод неопределенных коэффициентов

	A	B	C	D	E
7					
8	t^0	t^1	t^2	t^3	t^4
9	1	10	100	1000	10000
10	1	20	400	8000	160000
11	1	30	900	27000	810000
12	1	40	1600	64000	2560000
13	1	50	2500	125000	6250000
14					
15	5	-10	10	-5	1
16	-0,64	1,783	-1,95	1,016667	-0,20833333
17	0,03	-0,1	0,123	-0,06833	0,014583333
18	-0	0,002	-0	0,001833	-0,00041667
19	4E-06	-0	3E-05	-1,7E-05	4,16667E-06
20					
21			Коэффициенты полинома		
22					-227,8
23					45,596
24					-2,42965
25					0,06201
26					-0,0005165
27				Решение:	92,6046875
28					

МетНаимКвадр | МетНеопрКоэффициентов | Лист4 | Лист5

Готово