Бином Ньютона

Определение:

- Двучлен вида a+b называется биномом.

Часто встречающимися формулами сокращённого умножения являются :

квадрат суммы

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

квадрат разности

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

разность квадратов

$$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$$

куб суммы

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

куб разности

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

- Другие же степени представлены в общем виде:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots\ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n,$$

где C_n^k - число сочетаний из n элементов по k элементов.

Такая формула называется Бином Ньютона.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Биномиальные коэффициенты

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots\ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n,$$

$C_n^0, C_n^1, C_n^2, C_n^3\ C_n^4\ C_n^5\ C_n^6$ ….. являются коэффициентами в формуле бинома Ньютона и называются биномиальными коэффициентами.

Коэффицие́нт — числовой множитель при буквенном выражении.

Легко заметить, что степень первого числа уменьшается на единицу:

$$a^n, a^{n-1}, a^{n-2} \ldots a^1 = a, a^0 = 1$$

А степень второго числа наоборот увеличивается на единицу

$$b^0 = 1, b^1 = b, b^2, b^3 \ldots b^n$$

- Коэффициенты считаются по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

где k изменяется от 0 до n с шагом 1.

Факториа́л числа n— произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно.

Например:

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

$$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$$

$$11! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11$$

$$0! = 1 \qquad C_n^n = 1$$

Например

Если n=3

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^3 = a^3b^0 + C_3^1a^2b^1 + C_3^2a^1b^2 + C_3^3a^0b^3$$

$$C_3^1 = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot1\cdot2} = 3$$

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot2\cdot1} = 3$$

$$C_3^3 = 1$$

$$(a+b)^3 = a^3\cdot1 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1\cdot1\cdot b^3$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Треугольник Паскаля

Биномиальные коэффициенты легко находить с помощью треугольника Паскаля

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

- **«Треугольник Паскаля»** представляет собой набор строк, состоящий из чисел, сгруппированных по определенному закону таким образом, что получается фигура, напоминающая треугольник.
- Его можно получить, если слева и справа треугольник ограничен единицами, а каждое число, стоящее внутри него, представляет собой сумму чисел, стоящих над ним (в предыдущем ряду) слева и справа:

4=1+3; 6=3+3; 4=3+1; 5=1+4;

10=6+4; 5=4+1.

Свойства бинома Ньютона

1. Число слагаемых на 1 больше степени бинома.
2. Коэффициенты находятся по треугольнику Паскаля.
3. Коэффициенты симметричны.
4. Если в скобке знак минус, то знаки + и – чередуются.
5. Сумма степеней каждого слагаемого равна степени бинома.

$(a+b)^0$ =	1	=	1
$(a+b)^1$ =	1 1	=	$a+b$
$(a+b)^2$ =	1 2 1	=	$a^2+2ab+b^2$
$(a+b)^3$ =	1 3 3 1	=	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a+b)^4$ =	1 4 6 4 1	=	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
$(a+b)^5$ =	1 5 10 10 5 1	=	$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$
$(a+b)^6$ =	1 6 15 20 15 6 1	=	$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$
$(a+b)^7$ =	1 7 21 35 35 21 7 1	=	$a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$

Видео-объяснение:

Треугольник Паскаля

https://www.youtube.com/watch?v=0bhpfZgZIAk

Найти разложение бинома:

1) $(y-3)^9$
2) $(а+в)^7$