ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1. ЛЕКЦИИ
2. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
3. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Определители

Обратная матрица

Системы линейных уравнений

МАТРИЦЫ.
ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

Определение 1. Прямоугольная таблица из m строк и n столбцов, заполненная некоторыми математическими объектами, называется ***прямоугольной матрицей.***

Числа, составляющие матрицу, называются ее ***элементами*.**

$$\text{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

При записи, в общем виде элементы матрицы обозначаются одной буквой с *двумя индексами*, из которых первый указывает *номер строки*, а второй – *номер столбца* матрицы.

В сокращенной записи: $A = (a_{ij})$;

(кратко $i = 1,2,\dots,m$, $j = 1,2,\dots,n$).

$i = \overline{1,m}$ $j = \overline{1,n}$

Выражение $m \times n$ называют ***размерностью*** матрицы.

Матрица называется ***квадратной*** порядка *n*, если число ее строк равно числу столбцов и равно *n*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Размерность квадратной матрицы записывают одним числом, которое называется ***порядком*** матрицы.

Упорядоченный набор элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ называется *главной диагональю*, в свою очередь, $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ – *побочной диагональю* матрицы.

Квадратная матрица, элементы которой удовлетворяют условию:

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \neq 0, i = j \\ a_{ij} = 0, i \neq j, \end{cases}$$

называется ***диагональной***, т.е. диагональная матрица имеет вид:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица порядка *n* называется ***единичной***, если все элементы ее главной диагонали равны 1. Матрица любого размера называется ***нулевой*** или ***нуль матрицей***, если все ее элементы равны нулю. Единичная матрица обозначается буквой *E*, нулевая – *O*. Матрицы имеют вид:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Определение 2. Две матрицы называются ***равными***, если равны их размерности и равны их соответствующие элементы, т.е. элементы, расположенные на пересечениях строк и столбцов с одинаковыми номерами в обеих матрицах.

Матрица, состоящая из одной строки $\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$, называется ***матрицей-строкой.***

Матрица, состоящая из одного столбца $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}$, называется ***матрицей-столбцом.***

Определение 1. ***Суммой матриц*** $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одинаковых размеров $m \times n$ называется матрица $C=(c_{ij})$ тех же размеров, такая что $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ для всех i и j.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} .. & \ldots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, чтобы сложить матрицы A и B, достаточно сложить их элементы, стоящие на одинаковых местах.

Например

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & 2-4 \\ 3+0 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Свойства операции сложения матриц

Пусть A, B, C – матрицы одинаковой размерности:

1. *A*+ *B*= *B*+*A* – *коммутативность* сложения;
2. (*A*+*B*)+*C*= *A*+(*B*+*C*) – *ассоциативность* сложения;
3. $A+O=A$;

Матрица *O*, состоящая из нулей, играет роль нуля.

4. *A*+(-*A*)=*O*.

Для любой матрицы существует *противоположная*, будем ее обозначать *-A,* элементы которой отличаются от элементов *A* знаком.

Разность матриц *A* и *B* можно определить равенством

$$A\text{-}B=A+(-1)B.$$

Например

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-4 & 2-(-4)\\ 3-0 & 4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 3 & 3\end{pmatrix}.$$

Определение 2. ***Произведением матрицы A на число λ*** называется матрица $\lambda A = (\lambda\, a_{ij})$, получаемая умножением всех элементов матрицы A на число λ.

$$\lambda \mathrm{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например

$$3 \cdot \mathrm{A} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

Свойства умножения матрицы на число

Пусть A, B – матрицы одинакового размера; α, β - действительные числа:

1. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = (\alpha A)\beta$ – *ассоциативный закон;*
2. $(\alpha+\beta)A = \alpha A+\beta A$ – *дистрибутивный закон (для чисел);*
3. $\alpha(A+B) = \alpha A+\alpha B$ – *дистрибутивный закон (для матриц);*
4. $1 * A = A;$
5. $0 * A = O.$

Определение 3. ***Произведением*** матрицы $A=(a_{ij})$ размера $m\times k$ и прямоугольной матрицы $B=(b_{ij})$ размера $k\times n$ называется прямоугольная матрица $C=(c_{ij})$ размера $m\times n$, такая что

$$\boldsymbol{c_{ij}=a_{i1}+b_{1j}+a_{i2}+b_{2j}+\ldots+a_{ik}+b_{kj};}$$

$i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

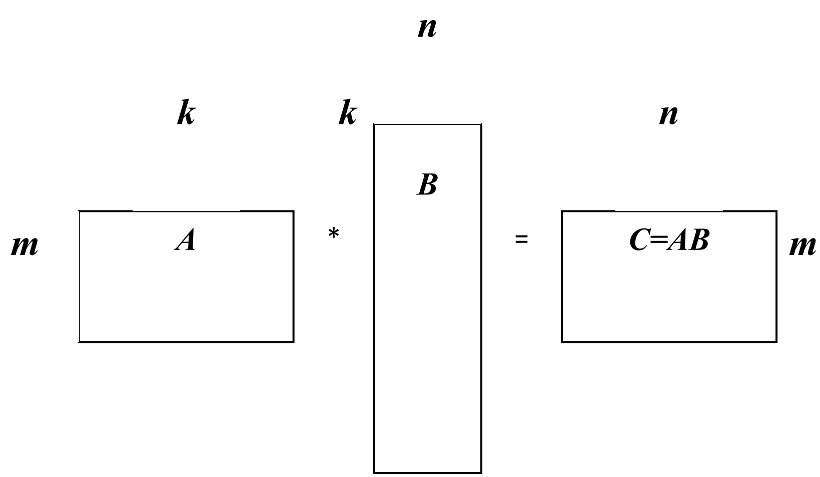
Таким образом, элемент произведения матриц A и B, стоящий в i-ой строке и j-ом столбце, равен сумме произведений элементов i-ой строки первой матрицы A на соответствующие элементы j-ого столбца второй матрицы B т.е.

$$c_{ij}=(a_{i1}a_{i2}\ldots a_{ik})\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{pmatrix}.$$

Произведение $C=AB$ определено, если число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В, такие матрицы называются *соответственными*.

Перемножать можно только соответственные матрицы.

Это условие, а также размеры матриц можно представить схемой:



Очевидно, что операция умножения квадратных матриц всегда определена.

Например

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 4+2\cdot 0 & 1\cdot(-4)+2\cdot 1\\ 3\cdot 4+4\cdot 0 & 3\cdot(-4)+4\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 12 & -8\end{pmatrix}.$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}4 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot 1-4\cdot 3 & 4\cdot 2-4\cdot 4\\ 0\cdot 1+1\cdot 3 & 0\cdot 2+1\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-12 & 8-16\\ 0+3 & 0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -8\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Свойства умножения матриц

1. *Коммутативный* (переместительный) *закон* умножения матриц, вообще говоря, *не выполняется*, т.е. $A \times B \neq B \times A$.

В частном случае коммутативным законом обладает произведение любой квадратной матрицы *n*-го порядка на единичную матрицу такого же порядка, т.е. $AE = EA$

Матрицы называются *перестановочными*, если выполняется закон коммутативности, т.е. $AB = BA$.

Пусть A, B, C – матрицы соответствующих размеров (т.е. произведения матриц определены), λ - действительное число. Тогда на основании определений операций и свойств действительных чисел имеют место следующие свойства:

2. $(AB)C = A(BC)$ – *ассоциативность;*

Справедливы следующие законы дистрибутивности:

3. $(A+B)C = AC + BC$ - правый закон дистрибутивности ;

4. $A(B+C) = AB + AC$ - левый закон дистрибутивности;

5. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$;

6. $EA = AE = A$.

Определение 4. Если A – матрица размерности $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

то ***транспонированием*** этой матрицы называется такое преобразование, при котором ее строки становятся столбцами с теми же номерами и наоборот, т. е. переход к следующей матрице размерности $n \times m$:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Данная матрица называется ***транспонированной*** матрицей.

Эта операция имеет общий характер, т. е. применима к любой матрице.

Определители.
Свойства определителей.
Понятие минора и алгебраического дополнения

Для обозначения определителя пользуются следующими ***обозначениями:***

$$D(A)$$

детерминант

$|A|$ или $|a_{ij}|$

$$\Delta$$

дельта

Числа, составляющие определитель, называются его ***элементами.***

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

При записи, в общем виде элементы определителя обозначаются одной буквой с *двумя индексами*, из которых первый указывает *номер строки*, а второй – *номер столбца* матрицы.

В сокращенной записи: $|A| = |a_{ij}|$; где a_{ij} - действительные числа, $i,j=1,\dots,n$.

Главная диагональ

Побочная диагональ

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Число строк равное числу столбцов и равное n называется ***порядком*** определителя.

Упорядоченный набор элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ называется ***главной диагональю***, в свою очередь, $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ – ***побочной диагональю***.

Определителем первого порядка

$$|A| = |a_{11}|$$

называют число a_{11}.

Определение. ***Определителем*** **матрицы** ***второго порядка*** **называется число, получаемое следующим образом:**

Главная диагональ *Побочная диагональ*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Определение. ***Определителем*** **матрицы** ***второго порядка*** **называется число равное разности произведений элементов главной и побочной диагоналей.**

Например:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-1) \cdot 4 = 14.$$

Формула вычисления *определителя третьего порядка*, которая называется ***правилом треугольников (правилом Саррюса)***

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Рассмотрим первую группу слагаемых. Первое слагаемое – это произведение всех элементов главной диагонали определителя, а в каждом из следующих множители образуют в определителе треугольники, у которых одна сторона параллельна главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} * & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & * & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & * \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & * & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & * \\ * & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & * \\ * & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & * & a_{33} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

Слагаемые, которые имеют знак минус, иллюстрируются аналогично, только вначале перемножаются все элементы побочной диагонали, а затем выбираются такие тройки элементов определителя, которые образуют треугольники со стороной, параллельной его побочной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & * \\ a_{21} & * & a_{23} \\ * & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} * & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & * \\ a_{31} & * & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & * & a_{13} \\ * & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & * \end{vmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Например:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot 5\cdot 7 + 2\cdot 0\cdot 6 + 3\cdot(-1)\cdot 4 -$$

$$-2\cdot 5\cdot 4 - 3\cdot 0\cdot 7 - 1\cdot(-1)\cdot 6 = -1$$

.

Перейдем теперь к формулированию понятия определителя любого порядка $\boldsymbol{n}$ $(\boldsymbol{n} \geq 2)$.

Понятие такого определителя мы введем индуктивно, предполагая, что нам уже известно, как находятся определители всех квадратных матриц, порядок которых строго меньше n.

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу порядка n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} (4).$$

Выберем в A любой элемент a_{ij} и вычеркнем из A i- строку и j- столбец. Из оставшихся элементов, не меняя их взаимного расположения, составим матрицу. Это будет квадратная матрица порядка *(n-1)*. По индуктивному предположению, мы умеем находить определитель полученной матрицы. Обозначим его M_{ij} и назовем ***минором*** элемента a_{ij} .

Определение 2. ***Минором*** элемента a_{ij} называется определитель *(n-1)* – порядка, полученный путем вычеркивания *i* – строки и *j*– столбца.

Например:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cancel{3} & 7 \\ \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{7} & \cancel{1} \\ 0 & 2 & \cancel{3} & -1 \\ 1 & -1 & \cancel{2} & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 14 + 1 = -21.$$

Определение 3. Определителем порядка n, соответствующим матрице (4), называется число, равное

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}. \qquad (5)$$

Формула (5) при вычислении определителя использует все элементы первой строки (*разложение определителя по первой строке*).

Теорема 1. При любом номере строки *i(i = 1,2, ...,n)*, для определителя *n*-го $(n \geq 2)$ порядка матрицы A (4) справедлива формула

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \qquad (6)$$

называемая *разложением этого определителя по i-й строке*.

Теорема 2. При любом номере столбца *j (j =(,2,...,n)*, для определителя *n*-го $(n \geq 2)$ порядка матрицы A (4) справедлива формула

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}. \qquad (7)$$

Например:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Определение 4. Пусть дан определитель A порядка n. Выберем целое число k, удовлетворяющее условию $1 \le k \le n-1$, и в определителе A выберем произвольные k строк и k столбцов. Элементы, стоящие на пересечениях выбранных строк и столбцов, очевидно составляют квадратную матрицу порядка k. Определитель этой матрицы называется ***минором k-го порядка*** определителя A.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} (8).$$

Пусть в определителе A порядка n выбран минор M k-го порядка. Вычеркнем те строки и столбцы, на пересечениях которых расположен этот минор.

Оставшиеся элементы образуют квадратную матрицу порядка *(n-k)*, определитель которой называется дополнительным к минору M и обозначается M'. Если мы вычеркнем, наоборот, те строки и столбцы, в которых расположены элементы минора M', то, очевидно, останется минор M. Таким образом можно говорить о паре взаимно дополнительных миноров определителя. В частности, определенный выше минор M_{ij} является <u>*дополнительным к минору*</u> первого порядка a_{ij} и наоборот.

Определение 5. Если минор k-го порядка M расположен в строках с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и в столбцах с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$, то образуем сумму

$$s_M = i_1 + i_2 + \ldots + i_k + j_1 + j_2 + \ldots + j_k . \qquad (9)$$

Алгебраическим дополнением для минора M будем называть число $(-1)^{s_M} M'$.

В частности, алгебраическим дополнением элемента $\grave{A}_{ij}$ будет число

$$A_{ij} = (-1)^{s_M} \; M_{ij} . \qquad (10)$$

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} . \qquad (11)$$

Например:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 6 \\ -2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot A_{11} + 0\cdot A_{12} + 3\cdot A_{13} + 4\cdot A_{14} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & 2 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$-4\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -280.$$

Теорема 3 (Лапласа). Пусть в определителе A порядка n произвольно выбраны k строк (или k столбцов), $1 \le k \le n-1$. Тогда сумма произведений всех миноров k-го порядка, содержащихся в выбранных строках (или столбцах), на их алгебраические дополнения равна определителю A.

Например: $|A| = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

Разлагая определитель по первому и третьему столбцам, содержащим „удачно" расположенные нули, мы получим:

$$|A| = (-1)^{1+3+1+3} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4+1+3} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -3 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{3+4+1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-8) \cdot (-20) - (-10) \cdot (-62) - 7 \cdot 87 = -1069.$$

Свойства определителей n-го порядка

1. Определитель матрицы A равен определителю транспонированной матрицы A^T, т.е. определитель не меняется при транспонировании.

2. Если одна из строк (один из столбцов) определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.

3. Определитель, содержащий две одинаковые строки или два одинаковых столбца, равен нулю.

4. Определитель, содержащий две пропорциональные строки (два пропорциональных столбца), равен нулю.

5. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя умножить на некоторое число *k*, то сам определитель умножится на *k*.

6. Если все элементы *i*-й строки определителя Δ *n*-го порядка представлены в виде суммы двух слагаемых: $a_{ij} = b_j + c_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, то определитель равен сумме двух определителей Δ_1 и Δ_2, у которых все строки, кроме *i*-й, такие же, как и в

7. Определитель не меняется, если к элементам одной из его строк (столбцов) прибавляются соответственно элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

8. Сумма произведений всех элементов некоторой строки определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю.

9. Определитель произведения двух квадратных матриц одинаковых размерностей равен произведению определителей этих матриц:

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

Обратная матрица

Матрица

Вырожденная (особенная)

- **определитель равен нулю**

Например:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 12 - 12 = 0$$

Невырожденная (неособенная)

- **определитель отличен от нуля**

Например:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 16 - 15 = 1 \neq 0$$

Теорема 1. Произведение матриц есть вырожденная матрица тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей есть вырожденная матрица

$$|AB| = 0 \leftrightarrow |A| = 0 \ (|B| = 0)$$

Замечание. Данная теорема справедлива для любого числа множителей.

Определение. Квадратная матрица B называется ***обратной*** по отношению к матрице A такого же размера, если

$$AB = BA = E. \qquad (1)$$

Теорема 1. Если для данной матрицы обратная существует, то она определяется однозначно.

Теорема 2 (*необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы*). Обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда исходная матрица A невырожденная.

Теорема 2 (*необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы*). Обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда исходная матрица A невырожденная.

Доказательство.

Необходимость.

Дано: для матрицы A существует обратная A^{-1}.

Доказать: A – невырожденная.

Доказательство:

Для матрицы A существует обратная A^{-1}, т.е.

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = E.$$

Тогда, $|A \times A^{-1}| = |A| \times |A^{-1}| = |E| = 1$, *т.е.* $|A| \neq 0$ *и* $|A^{-1}| \neq 0$; A – невырожденная.

Теорема 2 (*необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы*). Обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда исходная матрица A невырожденная.

Доказательство.

Достаточность.

Дано: невырожденная матрица порядка n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

так что ее определитель $\Delta \neq 0$.

Доказать: существует обратная матрица A^{-1}.

Рассмотрим матрицу, составленную из алгебраических дополнений к элементам матрицы A:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

ее называют ***присоединенной*** к матрице A.

Следует обратить внимание на то, что алгебраические дополнения к элементам i-ой строки матрицы A стоят в j-ом столбце матрицы A^*, для $i = \overline{1, n}$.

Найдем произведение $AA^{*}=C$:

$$C=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}\cdot A_{1i} & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}\cdot A_{2i} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}\cdot A_{ni} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}\cdot A_{1i} & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}\cdot A_{2i} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}\cdot A_{ni} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{n1}\cdot A_{1i} & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni}\cdot A_{2i} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni}\cdot A_{ni} \end{pmatrix}.$$

На главной диагонали получим суммы произведений элементов k-той строки матрицы A ($k=\overline{1,n}$) на алгебраические дополнения элементов этой же строки, такие ***суммы равны определителю матрицы А, т.е.*** Δ. ***На всех других местах*** имеем суммы произведений элементов некоторой строки матрицы A на алгебраические дополнения элементов другой строки. Такие ***суммы равны нулю***. Таким образом, матрица С имеет вид:

$$C=\begin{pmatrix} \Delta & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Delta & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \Delta \end{pmatrix}.$$

Аналогично доказывается, что произведение $\boldsymbol{A^*}$ на $\boldsymbol{A}$ равно той же матрице $\boldsymbol{C}$. Таким образом, имеем $\boldsymbol{AA^*=A^*A=C}$.

Отсюда следует, что

$$A\left(A^{*}\times\frac{1}{\Delta}\right)=\left(\frac{1}{\Delta}\times A^{*}\right)A=\frac{1}{\Delta}C=E.$$

Поэтому, если в качестве ***обратной матрицы*** взять

$$\frac{1}{\Delta}A^{*}=A^{-1},$$

то

$$A^{-1}\times A=A\times A^{-1}=E.$$

Итак, ***обратная матрица*** существует и имеет вид:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}}{\Delta} & \dfrac{A_{21}}{\Delta} & \cdots & \dfrac{A_{n1}}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}}{\Delta} & \dfrac{A_{22}}{\Delta} & \cdots & \dfrac{A_{n2}}{\Delta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{A_{1n}}{\Delta} & \dfrac{A_{2n}}{\Delta} & \cdots & \dfrac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, чтобы найти матрицу, обратную для матрицы *A*, требуется:

1) вычислить ее определитель. Если $|A|=0$ - матрица A – вырожденная, для нее обратной не существует. Если $|A|\neq 0$, то перейти к следующему пункту
2) составить присоединенную матрицу A^{*}
3) найти произведение $\frac{1}{\Delta}A^{*}=A^{-1}$
4) сделать проверку: $A\cdot A^{-1}=E$.

Системы линейных уравнений

1. Матричные уравнения

Рассмотрим ***произвольную систему линейных уравнений***

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2.1)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неизвестные переменные,

$a_{11}, \ldots, a_{mn}$ – коэффициенты при неизвестных,

$b_1, b_2, \ldots, b_m$ – свободные члены системы.

Определение 1. Любой числовой набор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ называется ***решением системы*** (2.1), если после подстановки этих чисел в систему вместо соответствующих неизвестных все уравнения системы обращаются в верные числовые равенства (тождества):

$$b_1 = b_1, b_2 = b_2, \ldots, b_m = b_m.$$

Система линейных уравнений

Совместной

(существует хотя бы одно решение)

Несовместной

(решений нет)

Определенная

(одно решение)

Неопределенная

(больше одного решения)

Определение 2. Система линейных уравнений (2.1) называется ***совместной***, если существует хотя бы одно ее решение, в противном случае система ***несовместна***. Система называется ***определенной***, если она имеет только одно решение и ***неопределенной***, если ее решений больше одного.

Определение 3. ***Решить систему линейных уравнений*** – это значит найти все ее решения или доказать несовместность системы.

Часто бывает целесообразно заменить систему линейных уравнений эквивалентным матричным уравнением.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Для этого следует ввести матрицы:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где A — основная матрица системы, X — столбец неизвестных и B – столбец свободных членов системы.

Каждую систему вида (2.1) можно записать в виде одного матричного уравнения:

$$AX = B. \qquad (2.2)$$

К матричным уравнениям относятся уравнения вида

$$\boxed{A \cdot X = B} \quad (2.2)$$

$$\boxed{X \cdot A = B} \quad (2.3)$$

$$\boxed{A \cdot X \cdot B = C} \quad (2.4)$$

где $A, B, C, X -$ матрицы.

Определение 4. ***Решением матричного уравнения*** называется матрица, обращающая при подстановке уравнение в верное равенство.

Если в уравнениях (2.1), (2.2), (2.3) матрицы A, B, C - квадратные, порядка *n*, то решение может быть получено в виде:

$\boxed{A \cdot X = B}$, $|A| \neq 0$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B,$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$$\boxed{\underline{\underline{X = A^{-1} \cdot B.}}} \qquad (2.1.1)$$

$$\boxed{X \cdot A = B}$$

$$\boxed{\underline{\underline{X = B \cdot A^{-1}}}}, \quad |A| \neq 0 \quad (2.2.2)$$

$$\boxed{A \cdot X \cdot B = C}$$

$$\boxed{\underline{\underline{X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}}}},$$

$$|A| \neq 0 \text{ и } |B| \neq 0. \qquad (2.3.3)$$

$$\boxed{\underline{X = A^{-1} \cdot B.}}$$

$$\boxed{\underline{X = B \cdot A^{-1}}}$$

$$|A| \neq 0$$

Уравнения решений не имеют

$\|A\| = 0$	$\|B\| \neq 0$

Уравнения решений не имеют

Уравнения имеют бесконечное множество решений

$\|A\| = 0$	$\|B\| = 0$

2. Системы линейных уравнений

2. Квадратные системы линейных уравнений. Однородные системы. Правило Крамера

Рассмотрим ***квадратную систему линейных уравнений***

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2.2.1)$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — неизвестные переменные,

$a_{11}, \dots, a_{nn}$ – коэффициенты при неизвестных,

$b_1, b_2, \dots, b_n$ – свободные члены системы.

Теорема Крамера. Если основная матрица квадратной системы линейных уравнений невырожденная, то такая система имеет единственное решение.

Теорема 1.4 (Крамера). Если основная матрица квадратной системы линейных уравнений невырожденная, то такая система имеет единственное решение.

Доказательство.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

где A — основная матрица системы, X — столбец неизвестных и B – столбец свободных членов системы.

Систему вида (2.2.1) можно записать в виде одного матричного уравнения:

$$AX = B. \qquad (2.2.2)$$

Доказательство.

Поскольку A – невырожденная матрица, то существует обратная матрица A^{-1}. Обе части уравнения (2.2.2) умножим слева на A^{-1} и получим решение системы в матричной форме

$$\boxed{A \cdot X = B}, \; |A| \neq 0$$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B,$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$$\boxed{\underline{\underline{X = A^{-1} \cdot B.}}} \qquad (2.2.3)$$

Запишем формулу (2.2.3) в развернутом виде:

$$\boxed{\underline{X = A^{-1} \cdot B.}}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$x_i = \frac{1}{\Delta}\left(b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \cdots + b_n A_{ni}\right), \quad i = \overline{1,n}$$

Сумма в скобках правой части этого равенства есть разложение определителя Δ_i, полученного из определителя матрицы A, заменой *i*-го столбца столбцом свободных членов.

$$x_i = \frac{1}{\Delta}\left(b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \dots + b_n A_{ni}\right), \quad i = \overline{1, n}$$

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad i = \overline{1, n}. \qquad (1.2.4)$$

Они получили название ***формул Крамера***.

Решение системы (2.2.1) с применением формул Крамера называют ***правилом Крамера***.

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad i = \overline{1,n}}$$

Δ - ***основной определитель системы*** (определитель, состоящий из коэффициентов при неизвестных),

Δ_i – ***определитель,*** полученный из определителя Δ , ***заменой i-го столбца столбцом свободных членов***.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{matrix} & \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{matrix} \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{matrix}} & \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} & \begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{matrix} \end{vmatrix}$$

$$\dots \; \Delta_n = \begin{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{matrix} & \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{matrix} & \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{matrix}} \end{vmatrix}$$

Определение. Линейное уравнение называется ***однородным***, если свободный член уравнения равен ***0***. Система, состоящая из однородных уравнений, сама называется ***однородной***.

Общий вид однородной системы m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (2.2.4)$$

Однородная система всегда <u>*совместна*</u>: одно из ее решений есть

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \dots, x_n = 0.$$

Это решение называется <u>*нулевым*</u>.

Особую важность представляет вопрос, имеет ли данная однородная система ненулевые решения.

<u>**Теорема 1.**</u> Однородная система, в которой число уравнений меньше числа неизвестных, всегда имеет ненулевое решение.

<u>**Теорема 2.**</u> Если квадратная однородная система линейных уравнений имеет ненулевые решения, то определитель ее основной матрицы необходимо равен нулю.

2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод Гаусса

(*метод последовательного исключения неизвестных*)

Определение. Две системы линейных уравнений с одним и тем же числом неизвестных называются ***эквивалентными,*** или ***равносильными***, если они обе несовместны, либо обладают одними и теми же решениями, т. е. всякое решение одной системы является решением другой и наоборот.

СЛЕДУЮЩИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ БУДЕМ НАЗЫВАТЬ *ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ*:

-перемена местами любых двух уравнений системы;

-умножение обеих частей любого уравнения системы на число, отличное от нуля;

-прибавление к любому уравнению системы любого уравнения этой системы, умноженного на число;

- удаление из системы уравнений, у которых все коэффициенты и свободный член равны нулю.

ТЕОРЕМА 1.

Применение любого элементарного преобразования к системе линейных уравнений приводит к эквивалентной системе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ + \; \boxed{a_{21}}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ + \; \boxed{a_{31}}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \vdots \\ + \; \boxed{a_{m1}}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Мы считаем, что в системе n неизвестных, а потому для каждого неизвестного в системе (1) имеется хотя бы один коэффициент, отличный от нуля.

Тогда, если надо, переставив уравнения в системе и переобозначив соответствующим образом коэффициенты, добьемся, чтобы $a_{11} \neq 0$.

Теперь исключим последовательно неизвестное x_1 из всех уравнений системы (1), начиная со второго. Для этого сначала обе части первого уравнения умножим на число $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ и прибавим к соответствующим частям второго уравнения, затем обе части первого уравнения, умноженные на $\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$, прибавим к соответствующим частям третьего уравнения, и т. д.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3 \quad (2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

Здесь a'_{ij} и b'_k — получившиеся после описанных преобразований новые коэффициенты и свободные члены. Так как все примененные преобразования являются элементарными, то, по теореме 1, системы (1) и (2) эквивалентны.

Анализ

Эти уравнения следует отбросить, учитывая, что это одно из элементарных преобразований системы

$a'_{ij} = 0$	$b'_k = 0$

Это уравнение не может обращаться в тождество ни при каких значениях неизвестных, поэтому система (2), а значит, и (1) решений не имеют, т.е. они обе несовместны. В этом случае процесс заканчивается.

$a'_{ij} = 0$	$b'_k \neq 0$

Анализ

Процесс завершится, так как в этом случае система (1) будет эквивалентна своему первому уравнению

$все a'_{ij} = 0$	$все b'_k = 0$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$\left(-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}\right)\ \left(-\frac{a'_{m2}}{a'_{22}}\right)$$

$$\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\
\mathbf{+}\ \boxed{a'_{32}}x_2 + a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathbf{+}\ \boxed{a'_{m2}}x_2 + a'_{m3}x_3 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m
\end{cases} \quad (2)$$

В силу сделанного выше замечания, можем считать, что среди коэффициентов имеются ненулевые; однако может случиться, что $a'_{ij} = 0$ для всех $i = 2,\ldots, n$. Тогда следует изменить соответствующим образом порядок следования неизвестных, мы можем без ограничения общности считать, что $a_{22} \neq 0$.

На следующем этапе преобразования системы (1) первое уравнение останется неизменным; неизвестное x_2 исключим из всех уравнений эквивалентной системы (2), начиная с третьего.

Для этого прибавим к обеим частям третьего и каждого из следующих уравнений обе части второго уравнения, умноженного соответственно на числа:

$$\left(-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}\right),\left(-\frac{a'_{42}}{a'_{22}}\right),\ldots,\left(-\frac{a'_{m2}}{a'_{22}}\right).$$

По окончании этого этапа преобразования системы следует сделать такой же анализ, который был проведен после исключения x_1.

Доказательство

k=n (определенная)

k < n (неопределенная)

- **Треугольная**

- **Трапецеидальная**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \ldots + & a'_{1n}x_n = b_1 \\ & a'_{22}x_2 + \ldots + & a'_{2n}x_n = b_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & & a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \ldots + & a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a'_{22}x_2 + \ldots + & a'_{2k}x_k + \ldots + a'_{2n}x_n = b_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & & a_{kn}^{(k-1)}x_n = b_k^{(k-1)} \end{cases} \quad (4)$$

Решение для системы треугольного типа

Из последнего уравнения системы (3) находим вполне определенное значение неизвестного x_n. Подставляя найденное значение для неизвестного x_n в предпоследнее уравнение системы (3), найдем вполне определенное значение неизвестного x_{n-1}. Продолжая процесс нахождения значений следующих неизвестных, мы найдем, что система (3), а поэтому и система (1) обладают единственным решением, т. е. совместны и определены.

Решение для системы трапецеидального типа

Выделим k неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_k$, оставим слагаемые всех уравнений системы, содержащие эти неизвестные в левых частях уравнений, а все остальные перенесем в правые части.

Относительно неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_k$ система примет «треугольный» вид. Из последнего уравнения найдем значение неизвестного x_k, выраженное через свободные неизвестные $x_{k+1}, \dots, x_n$. Двигаясь по системе (4) снизу вверх, мы, как и в случае «треугольного» вида, найдем для неизвестных $x_k, \dots, x_1$ значения, выраженные через свободные неизвестные $x_{k+1}, \dots, x_n$. **Количество свободных переменных *n-k*.**

Применяя метод Гаусса к любой системе линейных уравнений, можно получить следующие окончательные результаты:

Исходная система несовместна

Уравнение, в левой части которого все коэффициенты при неизвестных равны нулю, а свободный член нулю не равен

Исходная система совместна и определенна, т. е. имеет единственное решение

Система преобразовалась к «треугольному» виду

Исходная система также совместна, но неопределенна, т. е. имеет бесчисленное множество решений

Система преобразовалась к «трапецеидальному» виду

ТЕОРЕМА 2.

Любую произвольную систему линейных уравнений с помощью элементарных преобразований можно привести к равносильной ей ступенчатого вида.

РАСШИРЕННАЯ МАТРИЦА

При практическом использовании метода Гаусса для решения систем линейных уравнений удобно проводить элементарные преобразования для строк расширенной матрицы системы:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

I	II	III	IV	V
VI	VII	VIII	IX	X
XI	XII	XIII	XIV	XV
XVI	XVII	XVIII	XIX	XX

1. Найти $-7A + AB$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$

2. Разложить определитель по элементам первой строки

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение: $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему по правилу *Крамера:*

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}.$$

5. Решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных (методом *Гаусса*). Найти ранг основной и расширенной матрицы.

$$\begin{cases} -x_1 \qquad\qquad + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 - 8x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -6 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 5 \end{cases}$$

1. Найти A^2+BC, если $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -3\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 4\\ 1 & -3\end{pmatrix}$.

2. Разложить определитель по элементам первого столбца

$$\begin{vmatrix}a & 2 & -1 & 3\\ b & 0 & 1 & -1\\ c & 4 & 3 & 2\\ d & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение: $AX=B$

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix}.$$

4. Решить систему по правилу *Крамера:*

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2\\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=1\\ 2x_1+x_2+3x_3+2=-3\\ x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3\end{cases}.$$

5. Решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных (методом *Гаусса*). Найти ранг основной и расширенной матрицы.

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3+3x_4=4\\ 2x_1-5x_2-x_3+7x_4=13\\ -3x_1+4x_2-6x_3-8x_4=-5\\ -x_1-x_2-8x_3+x_4=-1\end{cases}$$

1. Найти $-A - AB$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -5 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Разложить определитель по элементам второй строки

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 & -2 \\ a & b & c & d \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение: $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему по правилу *Крамера:*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 4 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \quad = 2 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 - 6x_4 = -6 \end{cases}.$$

5. Решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных (методом *Гаусса*). Найти ранг основной и расширенной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + 5x_2 - x_3 - 3x_4 = -5 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 \qquad 7x_3 - 4x_4 = 2 \end{cases}$$

1. Найти $3A + AB$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Разложить определитель по элементам второго столбца

$$\begin{vmatrix} -2 & a & 1 & 3 \\ 3 & b & -2 & 1 \\ -1 & c & 4 & 0 \\ 4 & d & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение: $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему по правилу *Крамера:*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 19 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -2 \end{cases}.$$

5. Решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных (методом *Гаусса*). Найти ранг основной и расширенной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -4 \\ -x_1 \qquad + 3x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

1. Найти $-7A + AC$, если

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Разложить определитель по элементам третьей строки

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 2 & -4 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение: $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему по правилу *Крамера:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}.$$

5. Решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных (методом *Гаусса*). Найти ранг основной и расширенной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 \qquad\quad - x_4 = 2 \\ x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 10x_4 = -3 \\ -x_1 - 7x_2 + 6x_3 - 11x_4 = -1 \end{cases}$$

1. Найти $A^2 + 2BC$, если $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Разложить определитель по элементам четвертой строки

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение: $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему по правилу *Крамера:*

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 \qquad - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases}.$$

5. Решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных (методом *Гаусса*). Найти ранг основной и расширенной матрицы.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 5x_1 - 8x_2 + 6x_3 - x_4 = 15 \end{cases}$$

1. Найти $-5B + AC$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Разложить определитель по элементам третьего столбца

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & a & 0 \\ -1 & -2 & b & -3 \\ 2 & 2 & c & 1 \\ 1 & 4 & d & 2 \end{vmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение: $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему по правилу *Крамера:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7 \end{cases}.$$

5. Решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных (методом *Гаусса*). Найти ранг основной и расширенной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 \qquad = 4 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 - 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

1. Найти 2A+BC, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Разложить определитель по элементам четвертого столбца

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & 0 & b \\ 3 & 3 & 1 & c \\ 1 & 4 & -2 & d \end{vmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение: $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему по правилу *Крамера:*

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ -3x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 5x_4 = -6 \\ -x_1 - 11x_2 \qquad - 7x_4 = 2 \end{cases}.$$

5. Решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных (методом *Гаусса*). Найти ранг основной и расширенной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 14x_2 + 9x_3 - x_4 = 10 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

1. Найти $-B^2 + AC$, если $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Разложить определитель по элементам первой строки

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение: $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему по правилу *Крамера:*

$$\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

5. Решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных (методом *Гаусса*). Найти ранг основной и расширенной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -2 \\ -x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 5x_4 = -2 \end{cases}$$

1. Найти $-7A + AC$, если $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Разложить определитель по элементам первого столбца

$$\begin{vmatrix} a & -3 & 2 & 1 \\ b & 2 & 5 & 3 \\ c & -1 & 0 & 1 \\ d & -4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение: $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему по правилу *Крамера:*

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -4 \\ 9x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 13 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 \qquad + 2x_4 = 11 \end{cases}.$$

5. Решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных (методом *Гаусса*). Найти ранг основной и расширенной матрицы.

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ -3x_1 \qquad -2x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 8x_4 = 5 \end{cases}$$

1. Найти $AB+3C$, если $A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 2\\ 8 & 7 & -5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -6 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}, C=$ $\begin{pmatrix}1 & 0 & 6\\ -2 & 3 & -5\end{pmatrix}$.

2. Разложить определитель по элементам второй строки

$$\begin{vmatrix}0 & -3 & -1 & 2\\ a & b & c & d\\ 2 & 1 & -3 & 2\\ -3 & 2 & 1 & 1\end{vmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение: $XA=B$

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}.$$

4. Решить систему по правилу *Крамера:*

$$\begin{cases}x_1+2x_2-3x_3+4x_4=4\\ 2x_1+x_2-3x_3+3x_4=6\\ 3x_1+x_2-4x_3+3x_4=5\\ 2x_1+3x_2-5x_3+2x_4=5\end{cases}.$$

5. Решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных (методом *Гаусса*). Найти ранг основной и расширенной матрицы.

$$\begin{cases}2x_1+x_2-4x_3-x_4=0\\ x_1+x_2-3x_3\qquad=-1\\ x_1+3x_2-7x_3+2x_4=-5\\ 3x_1+x_2-x_3-4x_4=5\end{cases}$$

1. Найти $A^2 - 7BC$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Разложить определитель по элементам второго столбца

$$\begin{vmatrix} -1 & a & 2 & 1 \\ 2 & b & -3 & 3 \\ 3 & c & -4 & 1 \\ 0 & d & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение: $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему по правилу *Крамера:*

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 7 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \end{cases}.$$

5. Решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных (методом *Гаусса*). Найти ранг основной и расширенной матрицы.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$$

1. Найти $A^2 - 2BC$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Разложить определитель по элементам третьей строки

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ a & b & c & d \\ -3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение: $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему по правилу *Крамера:*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 6x_3 + 8x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad = 4 \end{cases}.$$

5. Решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных (методом *Гаусса*). Найти ранг основной и расширенной матрицы.

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

1. Найти $AB + 7C$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Разложить определитель по элементам третьего столбца

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & a & 3 \\ 3 & 5 & b & 2 \\ 2 & 0 & c & 2 \\ 1 & 1 & d & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение: $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему по правилу *Крамера:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}.$$

5. Решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных (методом *Гаусса*). Найти ранг основной и расширенной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$$

1. Найти $-5A + BC$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Разложить определитель по элементам четвертой строки

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}.$$

.

3. Решить матричное уравнение: $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему по правилу *Крамера:*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}.$$

5. Решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных (методом *Гаусса*). Найти ранг основной и расширенной матрицы.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ -x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 5 \end{cases}$$

1. Найти $(-A)B + 5C$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Разложить определитель по элементам четвертого столбца

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 & a \\ -1 & 2 & 4 & b \\ 3 & 1 & 5 & c \\ 2 & 1 & 0 & d \end{vmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение: $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему по правилу *Крамера:*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \end{cases}.$$

5. Решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных (методом *Гаусса*). Найти ранг основной и расширенной матрицы.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

1. Найти $AC + AB$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

2. Разложить определитель по элементам первой строки

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение: $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему по правилу *Крамера:*

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 7 \end{cases}.$$

5. Решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных (методом *Гаусса*). Найти ранг основной и расширенной матрицы.

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ 7x_1 + 6x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 0 \\ 5x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 1 \end{cases}$$

1. Найти $AB - 3C$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Разложить определитель по элементам первого столбца

$$\begin{vmatrix} a & -3 & 1 & 0 \\ b & 2 & -3 & 1 \\ c & 4 & 2 & 4 \\ d & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение: $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему по правилу *Крамера:*

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_4 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -6 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}.$$

5. Решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных (методом *Гаусса*). Найти ранг основной и расширенной матрицы.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

1. Найти $AB + CB$, если $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$.

2. Разложить определитель по элементам второй строки

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 & 3 \\ a & b & c & d \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение: $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему по правилу *Крамера:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}.$$

5. Решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных (методом *Гаусса*). Найти ранг основной и расширенной матрицы.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 7x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

1. Найти $(AB)C$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Разложить определитель по элементам второго столбца

$$\begin{vmatrix} -1 & a & 3 & 5 \\ 3 & b & 4 & 0 \\ 2 & c & -1 & 2 \\ 4 & d & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

3. Решить матричное уравнение: $AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему по правилу *Крамера:*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}.$$

5. Решить систему линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных (методом *Гаусса*). Найти ранг основной и расширенной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 4 \end{cases}$$

Основная литература

1. *Бойко А.С.* Основы линейной алгебры: учебное пособие / Пермский филиал МЭСИ, 2011. – 60 с.

2. *Клиот-Дашинский М.И.* Алгебра матриц и векторов: учеб. пособие / М.И. Клиот-Дашинский. – 3. изд. – СПб.: Лань , 2001 – 156 с.

3. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры: учебник / А. Г. Курош. –18-е изд. –Спб: Лань, 2011. – 431 с.

Дополнительная литература

1. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц / Р. Беллман – 2-е изд. – М.: Наука,1976. – 351 с.
2. *Блох Э.Л.* Основы линейной алгебры и некоторые ее приложения / Э.Л, Блох, Л.И. Лошинский, В.Я. Турин. – М.: Высшая школа, 1971. – 256 с.
3. *Варпаховский Ф. Л.* Алгебра и теория чисел: учеб. Пособие / Ф. Л. Варпаховский Г. А. Гальперин, В. Б. Гисин. – М.: МОГПИ, 1994. – 223 с.
4. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел / Виноградов И. М. – 10-е изд., стер. – СПб.:Лань, 2004. – 176 с.
5. Воеводин, В.В. Линейная алгебра / В.В. Воеводин. – 2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
6. *Гантмахер, Ф.Р.* Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – 4-е изд., доп. – М.: Наука, 1988. – 548 с.
7. Гельфанд, И.М. Лекции по линейной алгебре/И.М. Гельфанд. – 3-е изд. – М.: Наука, 1966. – 280с.
8. *Головина, Л.И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения / Л.И.Головина. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
9. *Ильин В.А.* Позняк Э.Г. Линейная алгебра / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: Наука, 1984. – 296с.