Сегодня: *

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

- Переменный ток
- Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления
- Свободные затухающие электрические колебания
- Вынужденные электрические колебания
- Работа и мощность переменного тока

Переменный ток

При рассмотрении электрических колебаний приходится иметь дело с токами, изменяющимися во времени – ***переменными токами***:

$$I = I_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Закон Ома и вытекающие из него правила Кирхгофа были установлены для постоянного тока. Однако они остаются справедливыми и для мгновенных значений изменяющегося тока.

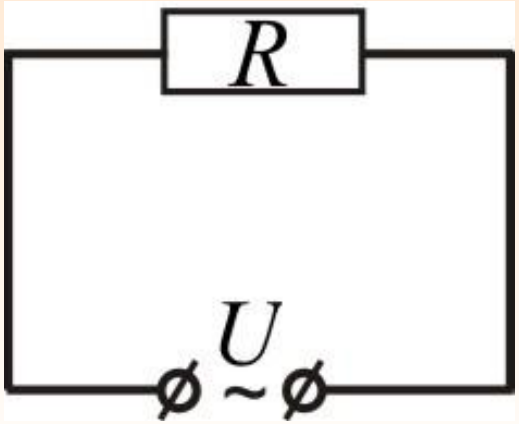
Электромагнитные сигналы распространяются по цепи со скоростью света c.

- Пусть l – длина электрической цепи.
- Время распространения сигнала в данной цепи

$$t = l / c.$$

- ***Если*** $t << T$ ***то такие токи называются квазистационарными*** (Т – период колебаний тока).
- При этом условии мгновенное значение силы тока во всех участках цепи будет постоянным.
- Для частоты $f = 50$ Гц условие квазистационарности будет выполняться при длине цепи ~ 100 км.
- Рассматривая в дальнейшем электрические колебания, мы будем считать, что ***токи квазистационарны***.

1. Сопротивление в цепи переменного тока



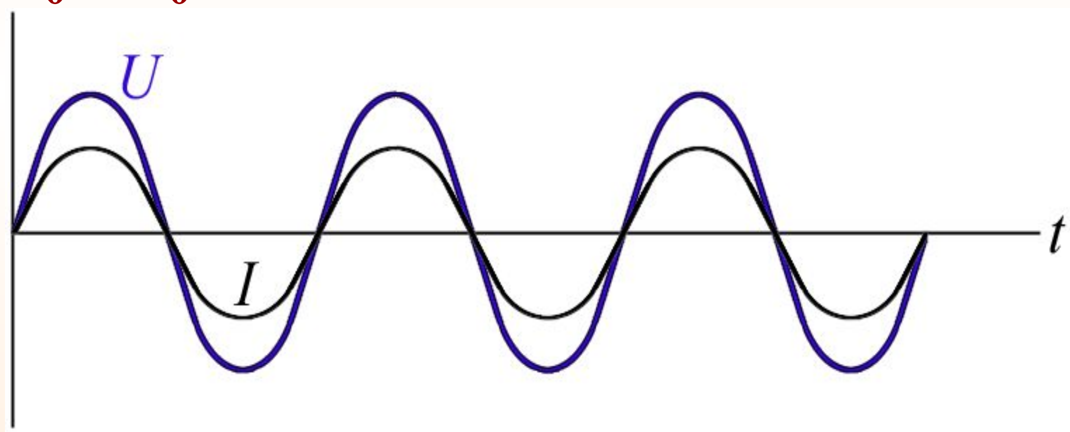
Ток в цепи $I = I_0 \sin \omega t$;

По закону Ома:

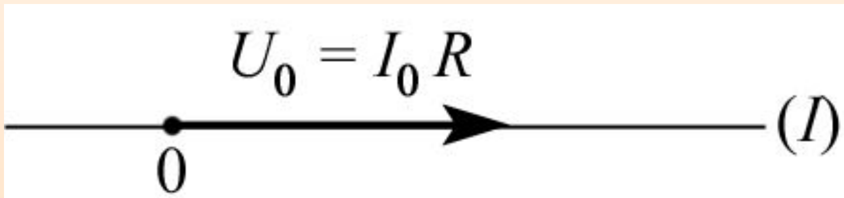
$U = IR = I_0 R \sin \omega t$ *- напряжение изменяется синфазно с током;*

$U_0 = I_0 R$ *- амплитуда напряжения.*

C, L пренебрежимо малы

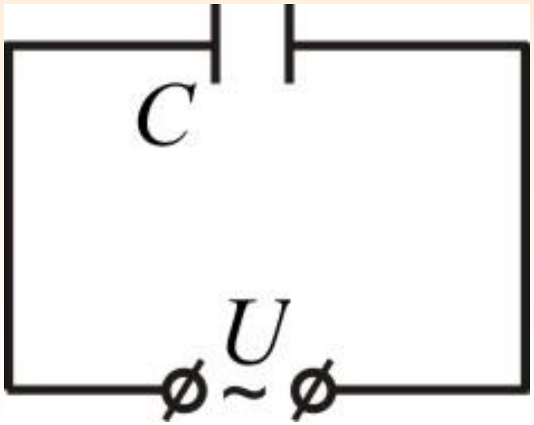


Векторная диаграмма напряжения на сопротивлении:



2. Емкость в цепи переменного тока

$R \to 0, \quad L \to 0$



Ток в цепи: $I = I_0 \sin \omega t,$

По определению $I = \dfrac{dq}{dt}$

Заряд конденсатора: $q = -\dfrac{I_0}{\omega} \cos \omega t$

$$\boxed{U = \frac{q}{C} = -\frac{I_0}{\omega C} \cos \omega t = \frac{I_0}{\omega C} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

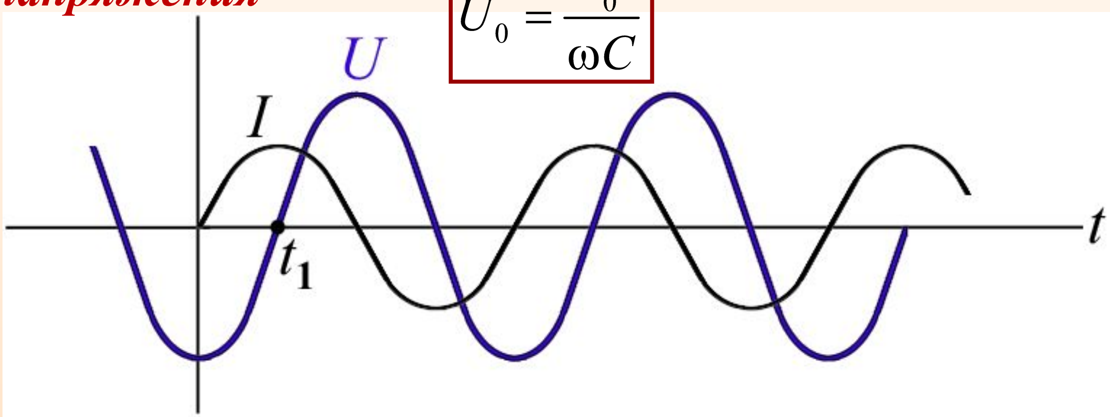
Напряжение отстает по фазе от тока на $\pi/2$

$$\boxed{R_C = \frac{1}{\omega C}}$$

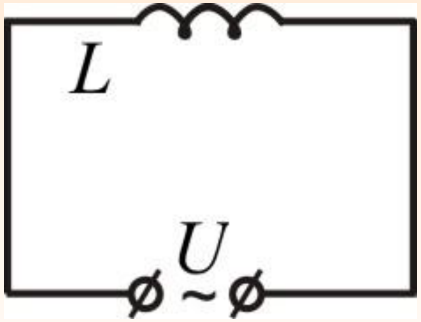
-кажущееся сопротивление емкости

$$\boxed{U_0 = \frac{I_0}{\omega C}}$$

-амплитуда напряжения



3. Индуктивность в цепи переменного тока



Рассмотрим цепь с $R \to 0$

при наличии переменного тока в катушке возникает ***ЭДС самоиндукции:*** $\varepsilon_C = -L\dfrac{dI}{dt}$

По закону Ома для участка цепи с ЭДС:

$U = IR - \varepsilon_C = -\varepsilon_C$

$$\boxed{U = L\frac{dI}{dt} = LI_0\omega\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

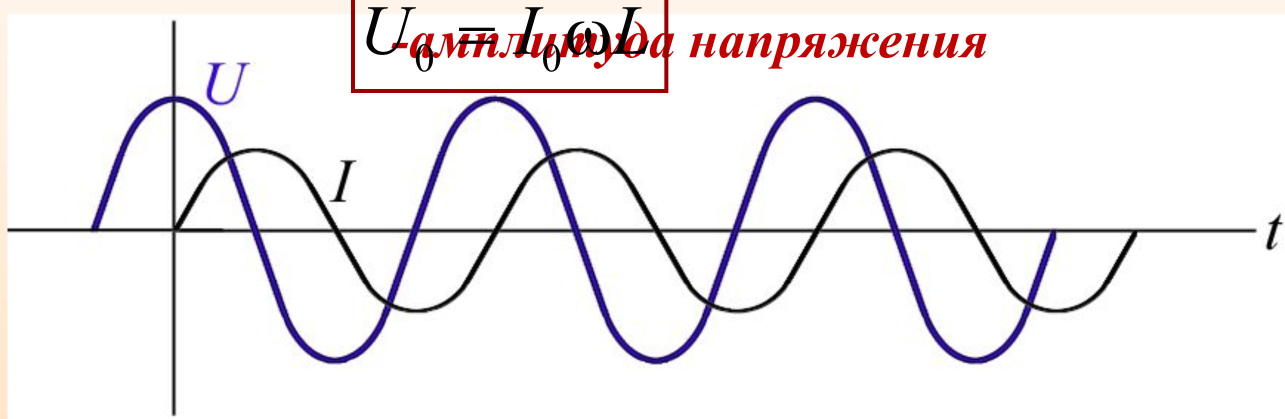
$$\boxed{R_L = \omega L}$$

Кажущееся сопротивление индуктивности

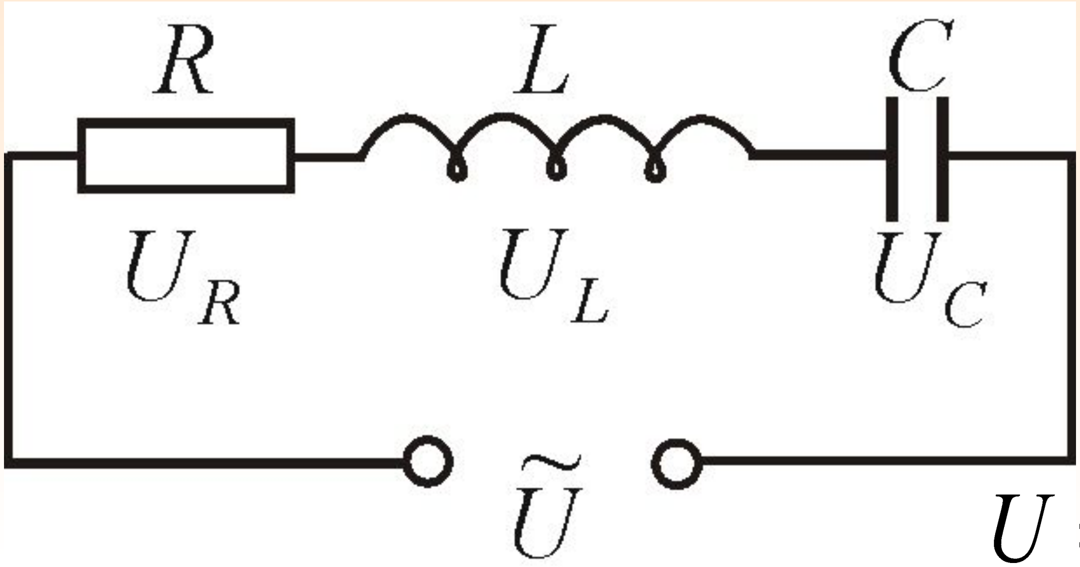
(основа работы дросселей)

Напряжение опережает по фазе ток на π/2

$\boxed{U_0 = I_0\omega L}$ *-амплитуда напряжения*



4. Закон Ома для переменного тока

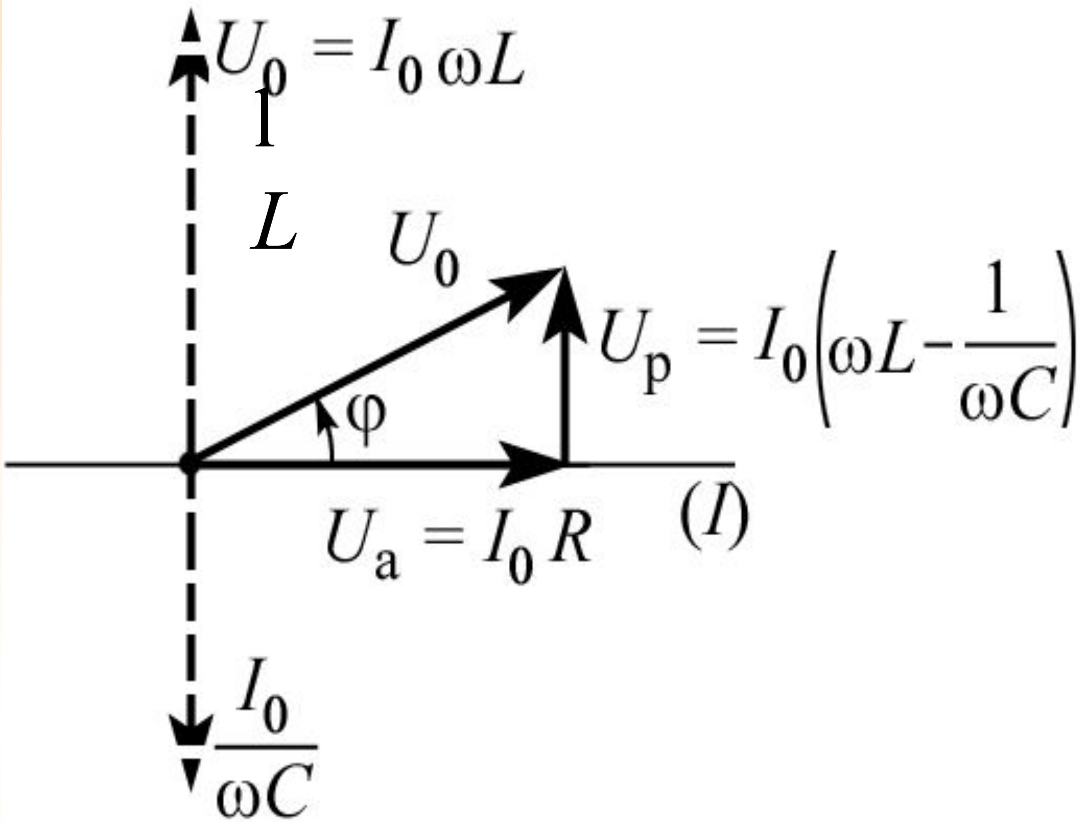


Напряжение при последовательном соединении R, L, C:

$$U = \sum U = U_R + U_C + U_L$$

Сумма $$\boxed{U_{0C} + U_{0L} = U_p = I_0\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$ ***- реактивная составляющая напряжения***

$$\boxed{U_{0R} \equiv U_a = I_0 R}$$ ***- активная составляющая напряжения***



Результирующее колебание:

$$U = U_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Фаза:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{U_p}{U_a} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$\boxed{U_0 = I_0 R_{пол}}$$

- закон Ома для переменного тока

Амплитуда напряжения:

$$\boxed{U_0 = I_0 \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Полное сопротивление цепи:

$$\boxed{R_{полн} = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

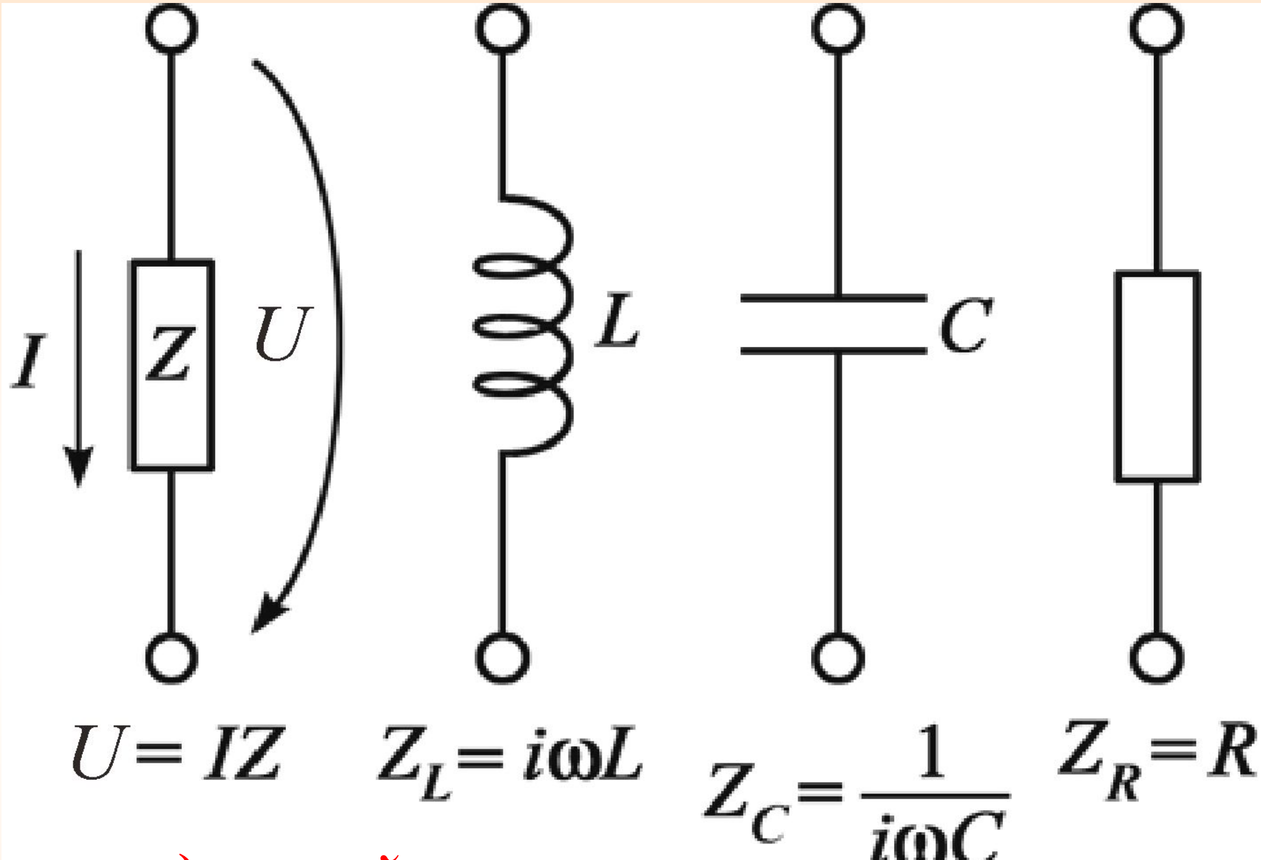
R – ***активное*** (омическое) ***сопротивление***

$$X = \boxed{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$ – ***реактивное сопротивление***

R – активное сопротивление отвечает за потерю мощности в цепи.

X – реактивное сопротивление, определяет величину энергии пульсирующей в цепи с частотой 2ω.

Элементы цепи и соответствующие им ***импедансы:***



Импеданс соединений:

Закон Ома в комплексной форме

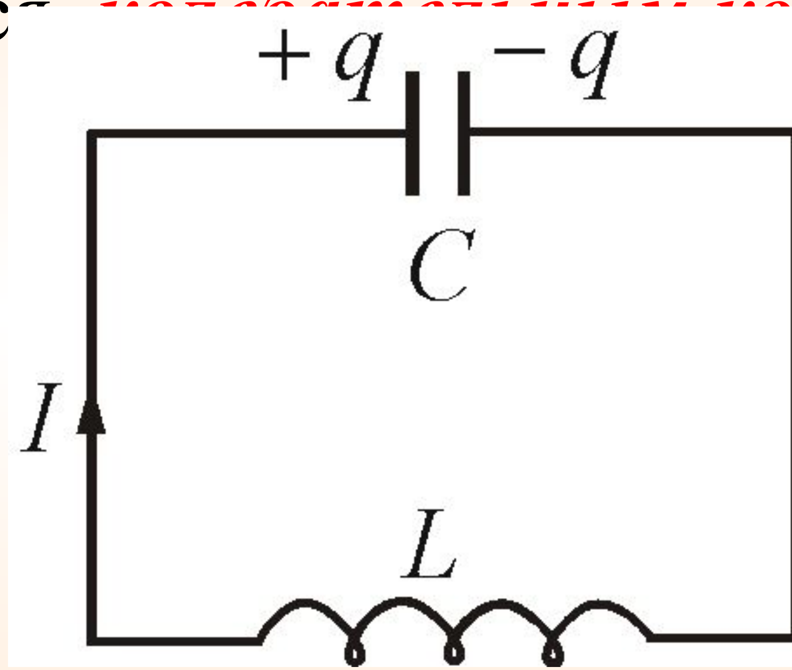
$$\boxed{Z = \sum_k Z_k}$$ - последовательного

$$\boxed{\frac{1}{Z} = \sum_k \frac{1}{Z_k}}$$ - параллельного

$$\boxed{I = \frac{\varepsilon}{Z} = \frac{\varepsilon}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}}$$

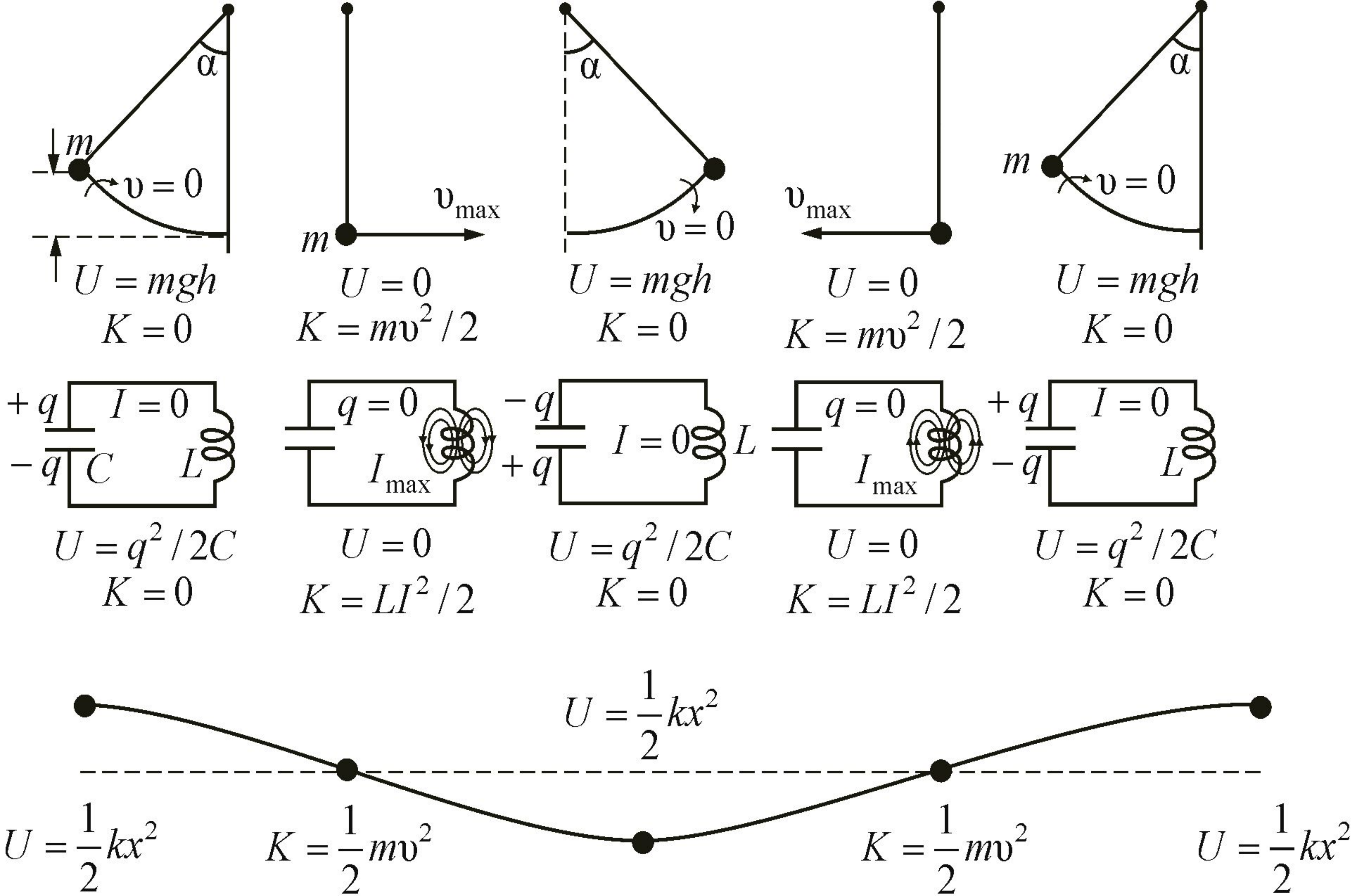
Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

Цепь, содержащая индуктивность (L) и ёмкость (C) называется ***колебательным контуром***.



Колебания в контуре можно вызвать либо зарядив конденсатор, либо вызвав в индуктивности ток.

Т.к. R=0, то полная энергия контура E=**const**



Если энергия конденсатора равна нулю (потенц. энергия), то энергия магнитного поля максимальна (кинетич.) и наоборот...

Из сопоставления электрических и механических колебаний следует, что:

- ***энергия электрического поля*** $U = \dfrac{q^2}{2C}$ ***аналогична потенциальной энергии упругой деформации***
- ***энергия магнитного поля аналогична кинетической энергии;***
- Индуктивность L играет роль массы m
- $1/C$ – роль коэффициента жесткости k
- Заряду q соответствует смещение маятника x
- Силе тока I ~ скорость υ
- Напряжению U ~ ускорение a

В соответствии с законом Кирхгофа (и законом сохранения энергии)

$R = 0$

$$\frac{q}{C} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}, \qquad \mathcal{E}_i = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Вновь мы получили ***диф. ур. второго порядка:***

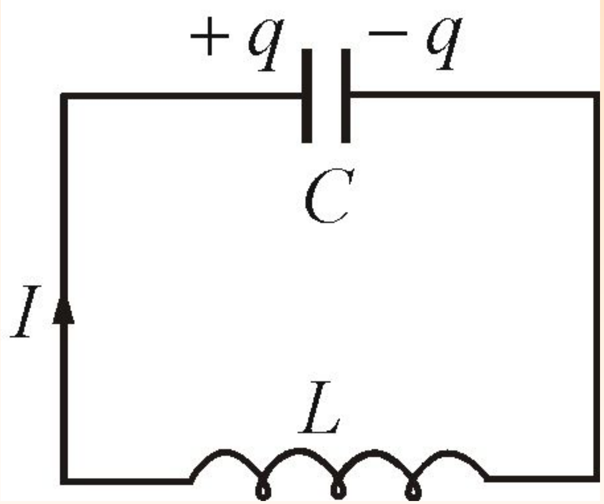
(4.2.2) $$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 q = 0,}$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Собственная частота контура

Решение уравнения - гармоническая функция:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \phi)$$



$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Таким образом, заряд на обкладке конденсатора изменяется по гармоническому закону с частотой

ω_0 – собственная частота контура.

Период колебаний определяется по ***формуле Томсона*:**

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{LC}}$$

$$U = \frac{q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \phi) = U_m \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Напряжение на конденсаторе

$$\boxed{U_m = I_m\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Закон Ома для контура

$\sqrt{\frac{L}{C}}$ **– волновое сопротивл.** [Ом].

Ток в цепи:

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \phi) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

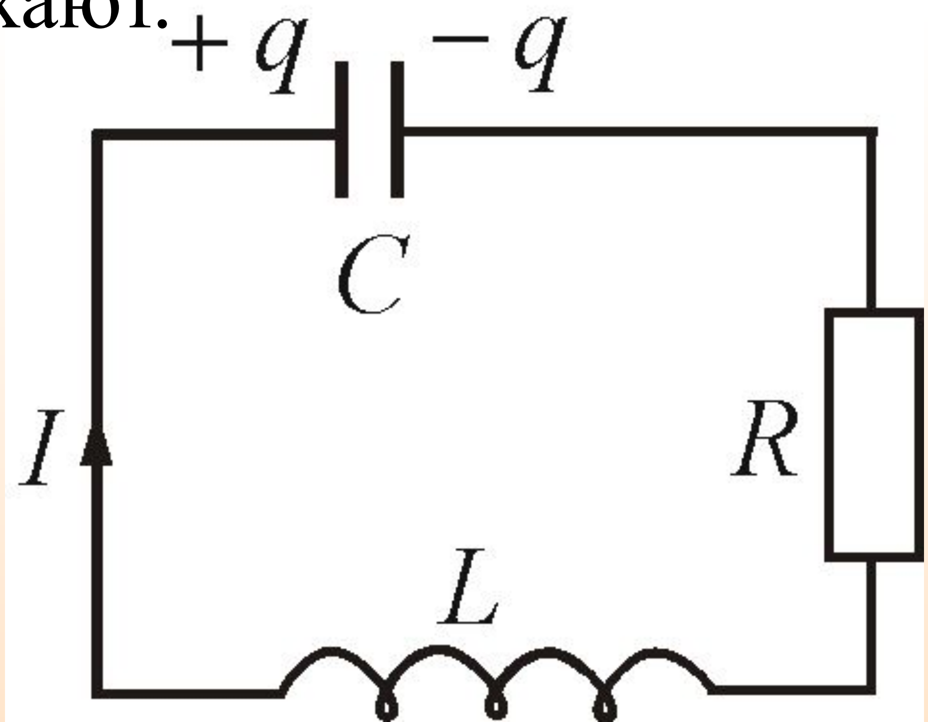
$$I_m = \omega_0 q_m$$

Амплитуда тока

На емкости ток опережает напряжение на π/2. На индуктивности наоборот напряжение опережает ток на π/2.

Свободные затухающие электрические колебания

Всякий реальный контур обладает ***активным сопротивлением R***. Энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется в этом сопротивлении на нагревание, вследствие чего колебания затухают.



По второму закону Кирхгофа $IR + \frac{q}{c} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 q = 0}$$

Уравнение свободных затухающих колебаний в контуре R,L и C

решение этого уравнения имеет вид:

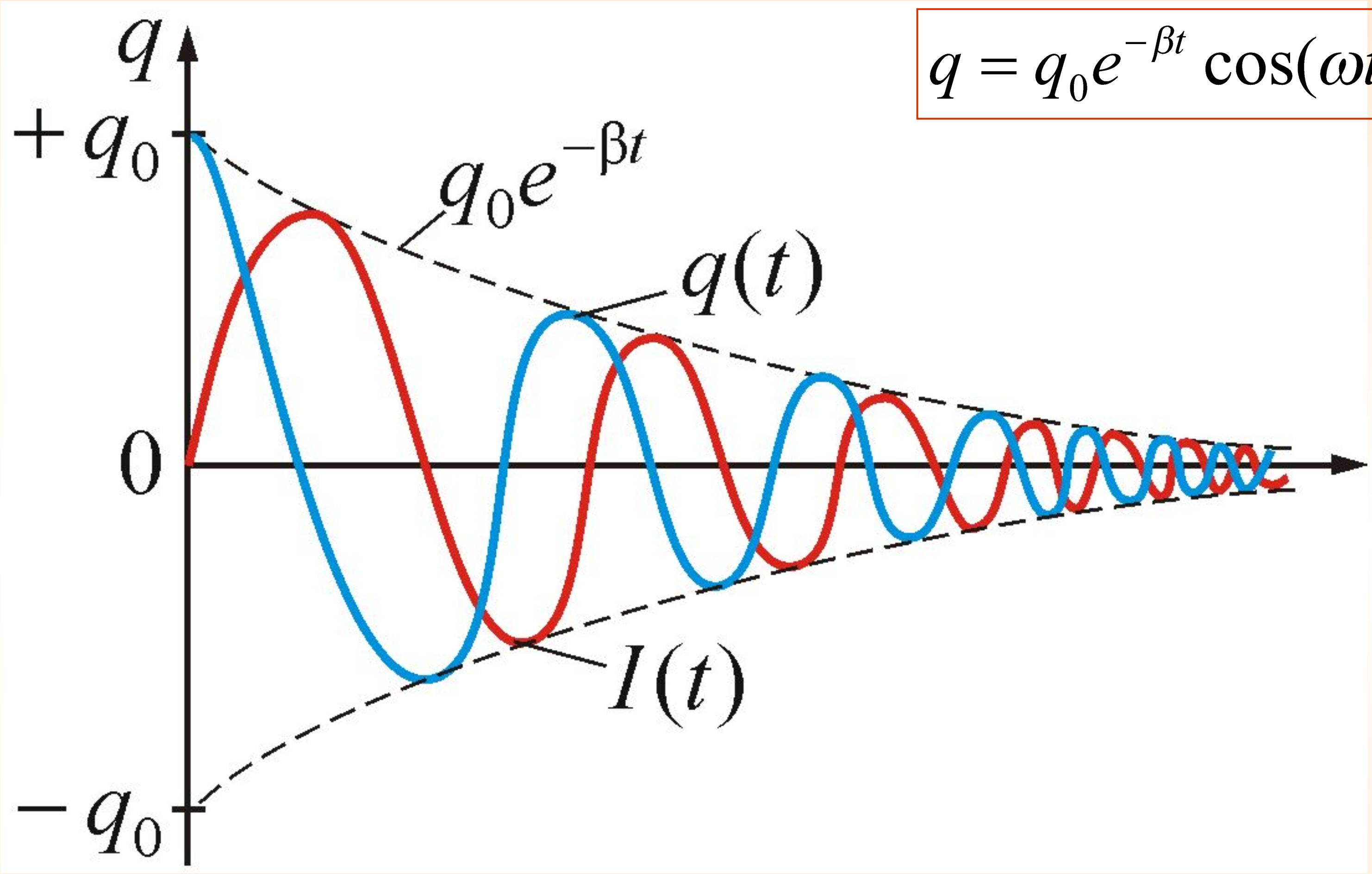
$$\boxed{q = q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \phi),}$$

$\beta = R/2L,$ ***- коэффициент затухания***

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ***- собственная частота контура***

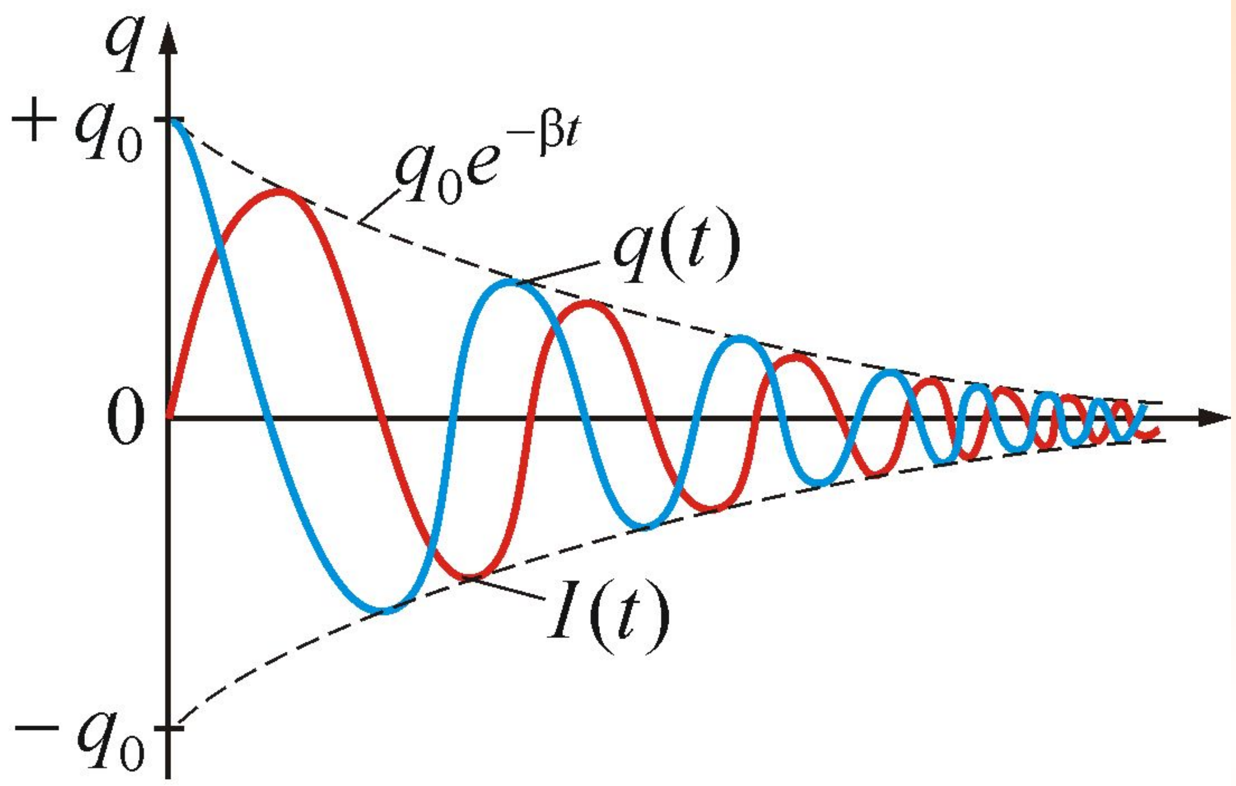
$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ или $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ ***Частота затухающих колебаний***

Вид затухающих колебаний заряда q и тока I:



$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi)$$

- Колебаниям ***q соответствует x*** – смещение маятника из положения равновесия,
- силе тока ***I – скорость v***.



$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}$$ **Декремент затухания**

$$\boxed{\chi = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T}$$

Логарифмический декремент затухания

Т.к. коэффициент затухания $\beta = \dfrac{R}{2L}$

Период затух. колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$;

Тогда $$\boxed{\chi = \beta T = \frac{\pi R}{L\omega}}$$

R, L, ω – определяются параметрами контура, следовательно, и χ является характеристикой контура.

Если затухание невелико $\beta^2 << \omega_0^2$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$\boxed{\chi = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

Добротность колебательного контура Q

определяется как величина обратно пропорциональная χ (***Чем меньше затухание, тем выше добротность***)

$$\boxed{Q = \frac{\pi}{\chi}}$$

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\beta}}$$

Время затухания – время за которое амплитуда колебаний уменьшается в ***e*** раз

$$\boxed{N_e = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T}}$$

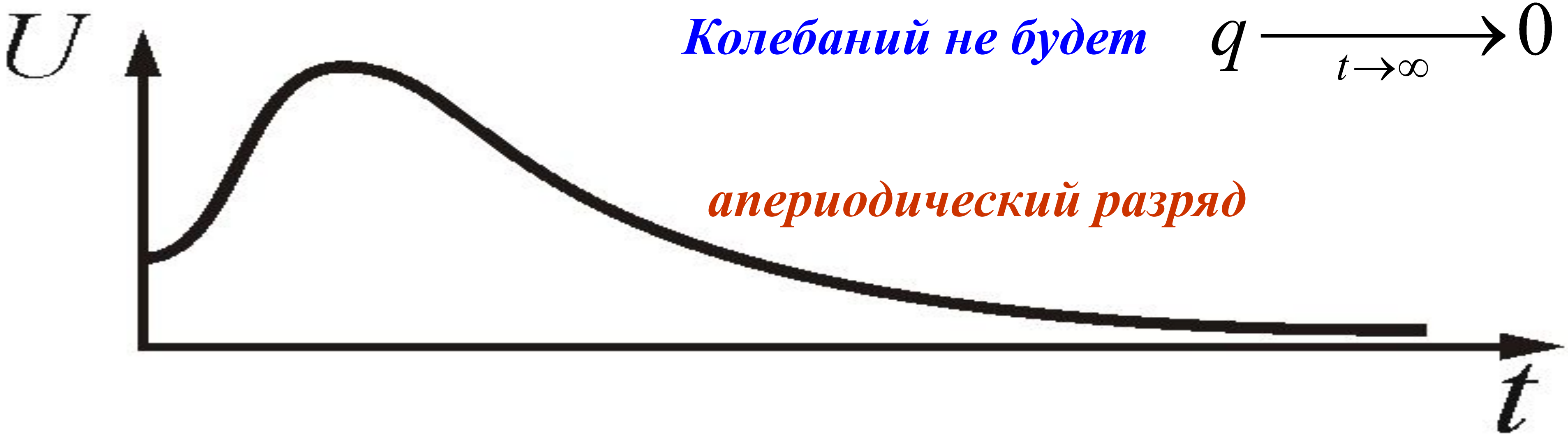
Число колебаний совершаемых за время затухания

$$\boxed{\chi = \frac{1}{N_e}}$$ то $$\boxed{Q = \pi N_e}$$

$$\boxed{Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}}$$

W – энергия контура в данный момент,
ΔW – убыль энергии за один период, следующий за этим моментом

При $\boxed{\beta^2 \geq \omega_0^2,}$ т.е. при $R^2/4L^2 \geq 1/LC$ **($T \to \infty$):**



Сопротивление контура, при котором колебательный процесс переходит в апериодический, называется ***критическим сопротивлением:***

$$\frac{R_k^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$$

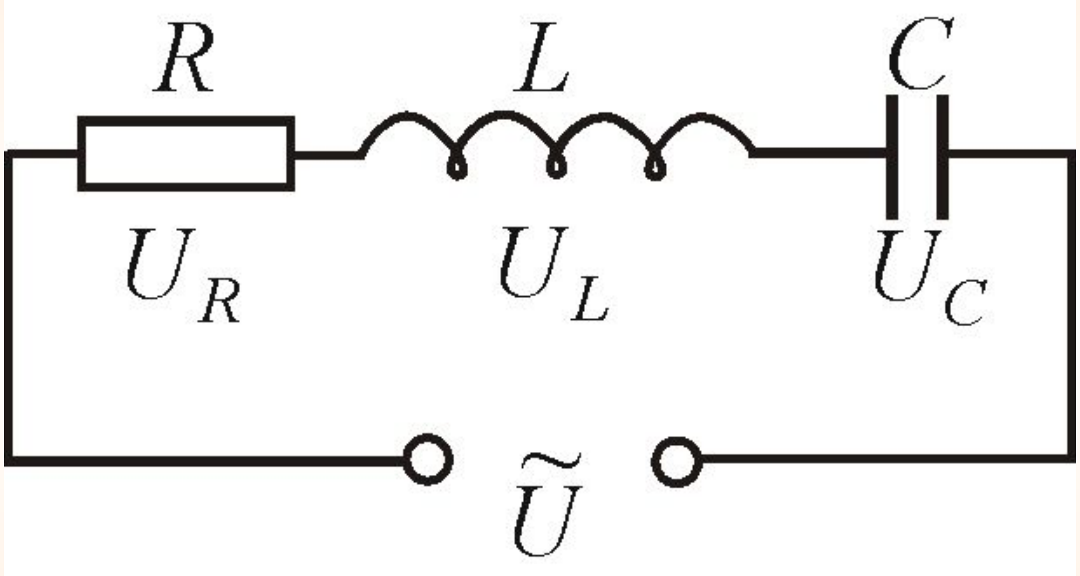
$$\boxed{R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2R_{\text{волн}}}$$

Критическое сопротивление

Вынужденные электрические колебания

К контуру, изображенному на рис. подадим переменное напряжение U :

$$U = U_m \cos\omega t \qquad (4.4.1)$$



$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L}\cos\omega t \qquad (4.4.2)$$

уравнение вынужденных электрических колебаний

совпадает с вынужденными механическими колебаниями.

Это уравнение совпадает с дифференциальным уравнением механических колебаний.

Решение уравнения при больших t:

(4.4.3)

$$\boxed{q = q_m \cos(\omega t + \varphi)}$$

Здесь амплитуда колебаний заряда:

$$q_m = U_m / \omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = U_m / \omega \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}$$

Как мы уже говорили величина

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

называется ***полным сопротивлением цепи*** (***импеданс***)

а величина

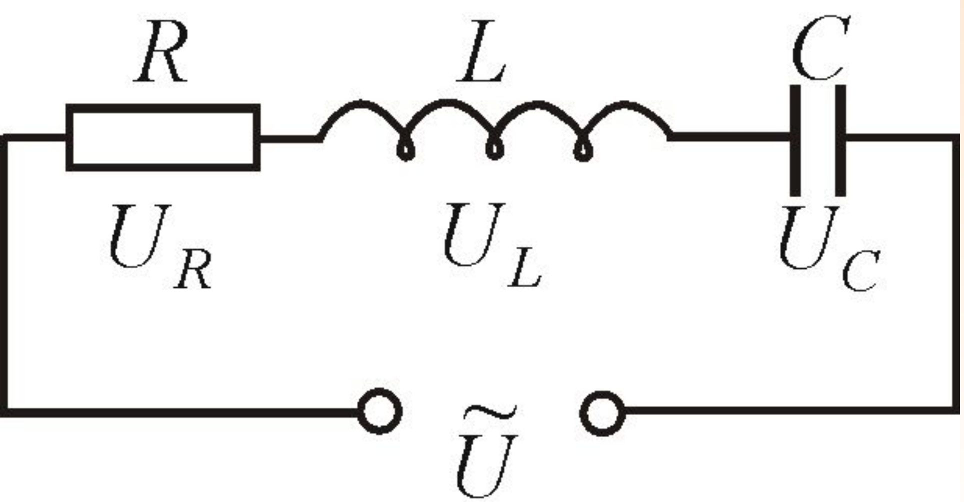
$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

– реактивным сопротивлением.

R – активное сопротивление отвечает за потерю мощности в цепи.

X – реактивное сопротивление, определяет величину энергии пульсирующей в цепи с частотой 2ω.

Резонанс напряжений (последовательный резонанс)



При последовательном соединении *R*, *L*, *C*, при

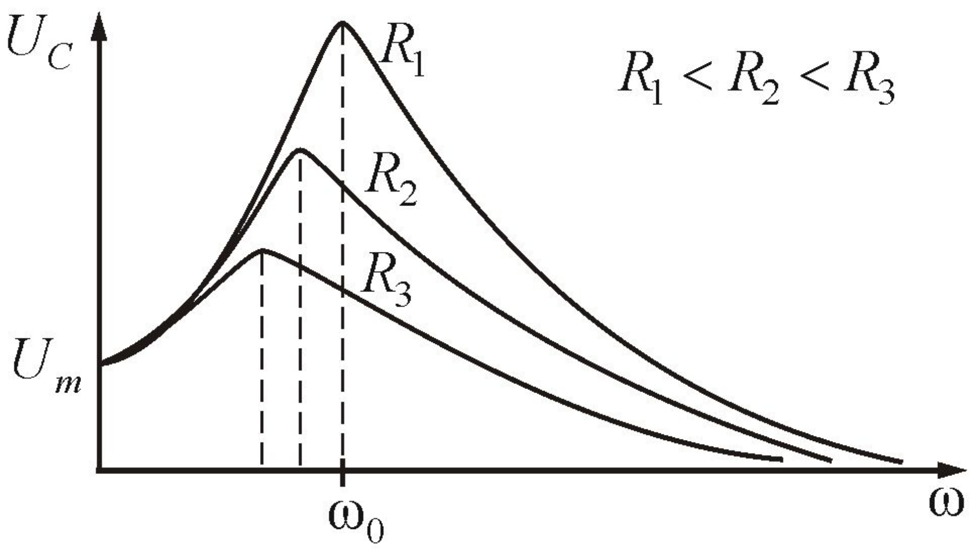
$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

– наблюдается ***резонанс.*** При этом угол сдвига фаз между током и напряжением обращается в нуль (φ = 0) и

$$Z = R$$

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Тогда $U = U_R$, а U_C и U_L одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Такой вид резонанса называется ***резонансом напряжения*** или ***последовательным резонансом.***



$$\boxed{U_{L\,рез} = U_{C\,рез} = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} U_m = QU_m}$$

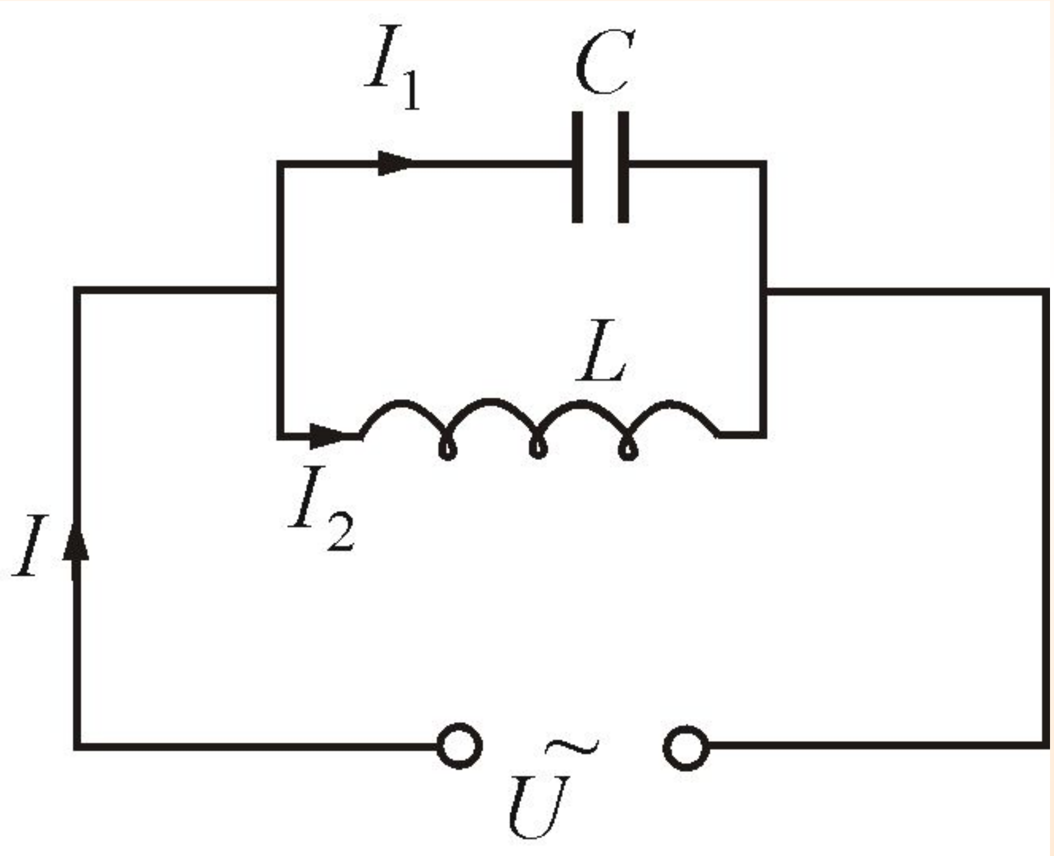
Таким образом, ***при последовательном резонансе***, на ёмкости можно получить напряжение с амплитудой

$QU \gg U$ в узком диапазоне частот.

Этот эффект ***широко используется в различных усилительных устройствах.***

Резонансом токов (параллельный резонанс).

В цепях переменного тока содержащих параллельно включенные ёмкость и индуктивность наблюдается другой тип резонанса:



$$I_1 = I_{m1}\cos(\omega t - \varphi_1)$$

$$I_2 = I_{m2}\cos(\omega t - \varphi_2)$$

$$\omega \to \omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = \pi}$$

$$\boxed{I_{mC} \to 0}$$

$$\boxed{I_{mL} \to \infty}$$

При $R = 0, L = 0$: $\boxed{I_1 = I_{m1} \cos(\omega t - \varphi_1)}$

$$I_{m1} = \frac{U_m}{1/\omega C}$$

$tg\,\varphi_1 = -\infty$ *т.к.* $\varphi_1 = (2n + 3/2)\pi$,

где $n = 1,2,3\ldots.$

$\boxed{\text{Аналогично, при } R = 0,\ C = \infty\text{: } I_2 = I_{m2} \cos(\omega t - \varphi_2)}$

$I_{m2} = U/\omega L$ $tg\,\varphi_2 = +\infty$, *т.е.* $\varphi_2 = (2n + 1/2)\pi$

где $n = 1,2,3\ldots..$

$$\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = \pi}$$

Из сравнения вытекает, что разность фаз в ветвях цепи $\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = \pi}$ т.е. токи противоположны по фазе

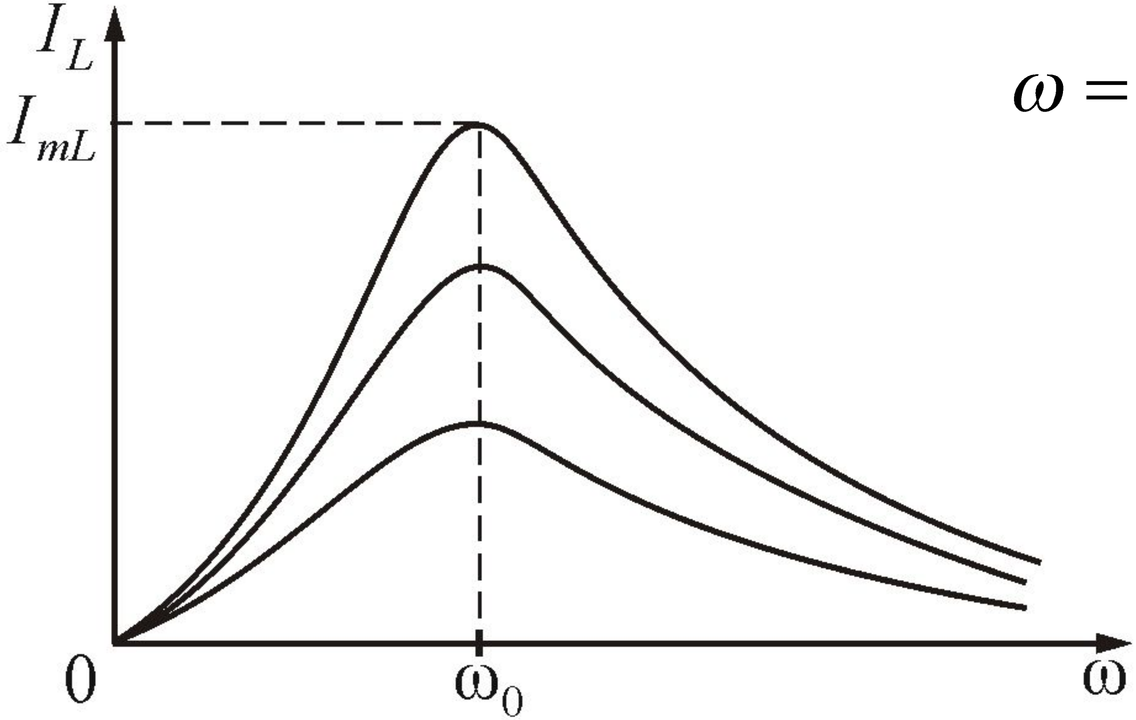
$$I_m = \left|I_{m1} - I_{m2}\right| = U_m \left|\omega C - \frac{1}{\omega L}\right|$$

Если $\omega = \omega_{\text{рез}} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$,

то $I_{m1} = I_{m2}$ и $\boxed{I_m \to 0}$

Ёмкость конденсатора можно подобрать так, что ***в результате резонанса ток в подводящих цепях резко уменьшается, зато ток через индуктивность возрастёт***

$$\omega = \omega_{\text{ðåç}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



Явление уменьшения амплитуды тока во внешней цепи и <u>резкого увеличения тока в катушке</u> индуктивности, при приближении частоты приложенного напряжения ω к $\omega_{рез}$ называется ***резонансом токов,*** или ***параллельным резонансом***

(Используется в резонансных усилителях, приемниках, а также в индукционных печах для разогрева металла).

Работа и мощность переменного тока

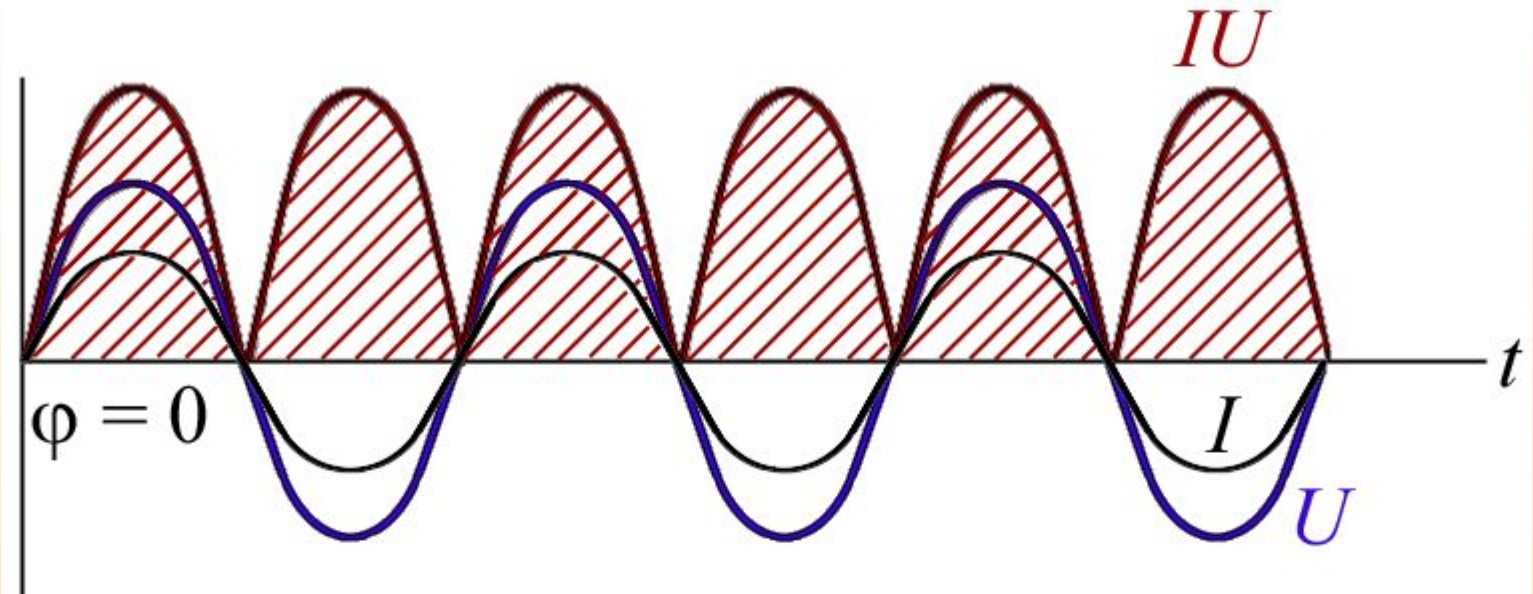
1. При наличии только активного сопротивления:

(вся работа переходит в тепло):

Напряжение на концах участка цепи: $U = U_0 \sin \omega t$

Переменный ток в цепи: $I = I_0 \sin \omega t$

Мгновенное значение мощности: $P_t = IU = I_0 U_0 \sin^2 \omega t$



Работа переменного тока за dt:

$$A = P_t\,dt = I_m U_m \sin^2 \omega t\,dt$$

Работа переменного тока за период T:

$$A = \frac{1}{2} I_m U_m T$$

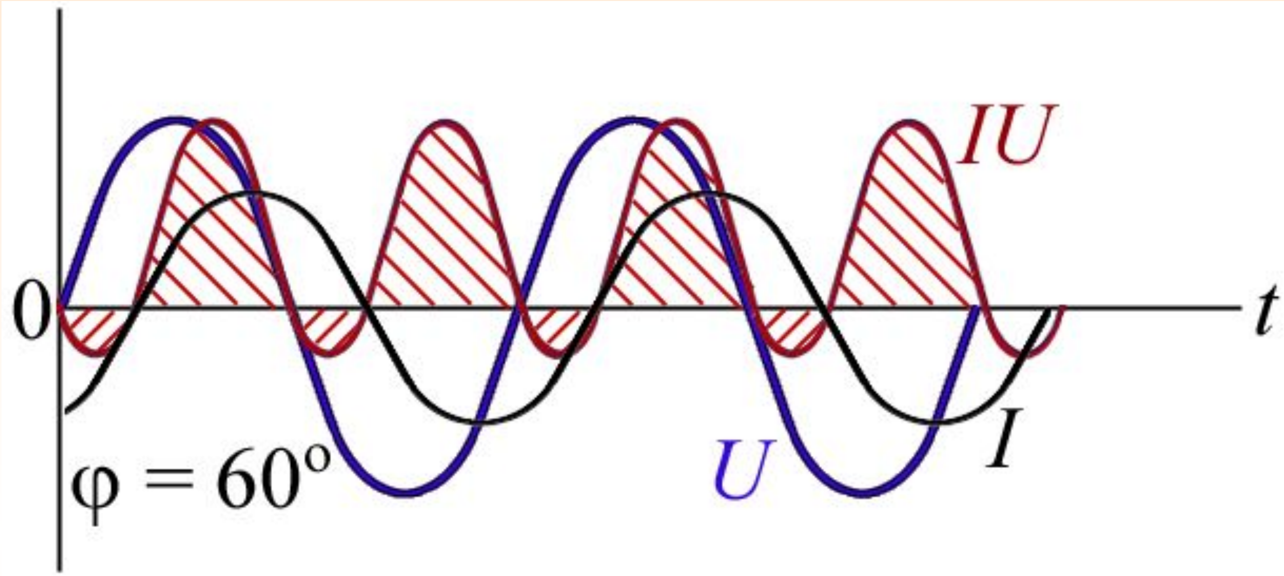
Средняя мощность $$< P >= \frac{1}{2} I_m U_m$$ ***или***

$$< P >= \frac{1}{2} R I_m^2$$

Действующие (или ***эффективные***) значения **тока** и **напряжения**:

$$\boxed{I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}} \qquad \boxed{U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}}$$

При наличии реактивного сопротивления



- колебания мгновенной мощности с переменой знака (средняя мощность уменьшается)

Работа переменного тока за период Т: $A = \frac{1}{2} I_m U_m T \cos\varphi$

Средняя мощность: $< P > \frac{A_T}{T} = \frac{1}{2} I_m U_m \cos\varphi$

Cos ф - *коэффициент мощности*.

При cos ф = 0 *P* = 0

Колебания			
механические		электромагнитные	
Дифференциаль-ное уравнение	$\ddot{x}+\frac{r}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0$ $\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2 x=0$	Дифференциаль-ное уравнение	$\ddot{q}+\frac{R}{L}\dot{q}+\frac{1}{LC}q=0$ $\ddot{q}+2\beta\dot{q}+\omega_0^2 q=0$
Масса	m	Индуктивность катушки	L
Коэффициент жесткости	k	Обратная величина емкости	$\frac{1}{C}$
Смещение	$x=x_m\sin(\omega t+\varphi)$	Заряд	$q=q_m\sin(\omega t+\varphi)$
Скорость	$\upsilon=dx/dt$	Сила тока	$I=dq/dt$
Потенциальная энергия	$W=\frac{kx^2}{2}$	Энергия электрич. поля	$W=\frac{q^2}{2C}=\frac{CU^2}{2}$
Кинетическая энергия	$K=\frac{m\upsilon^2}{2}$	Энергия магнитного поля	$K=\frac{LI^2}{2}$

Собств. частота пружинного маятника	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	Собств. частота колебательного контура	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Период колебаний	$T = 2\pi\sqrt{m/k}$	Период колеб. Формула Томсона	$T = 2\pi\sqrt{LC}$
Циклич. частота затухающих колебаний	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}$	Циклич. частота затухающих колебаний	$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$
Коэффициент затухания	$\beta = \frac{r}{2m}$	Коэффициент затухания	$\beta = \frac{R}{2L}$
Логарифмич. декремент затухания	$\chi = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$	Логарифмич. декремент затухания	$\chi = \beta T = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}}$
Добротность пружинного маятника	$Q = \frac{\pi}{\chi} = \frac{1}{r}\sqrt{km}$	Добротность колебательного контура	$Q = \frac{\pi}{\chi} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$
Резонансная частота	$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$	Резонансная частота	$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$