МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения»

Учебный военный центр
Кафедра метрологии
ВУС 670200 «Метрологическое обеспечение
вооружения и военной техники»

Средства измерений военного назначения и их поверка

Раздел 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МЕТРОЛОГИЧЕСКОМ ОБСЛУЖИВАВНИИ ВВТ ВВС

Тема № 2. ОСНОВНЫЕ МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Лекция № 3

«Погрешности измерений и СИ»

Вопросы:

1. Погрешности измерений

2. Законы распределения случайных величин, применяемые в метрологии

3. Доверительные интервалы

4. Погрешности СИ

В результате измерения (сравнения ФВ с ЕФВ) мы получаем результат измерений этой ФВ – $X_{изм}$, отличный от $X_{ист.}$

Погрешность измерения: $\Delta X = X_{изм} - X_{ист}$

На практике оцениваем: $\Delta X = X_{изм} - X_{д}$

ΔX зависит от многих факторов:

- метода измерений (методическая погрешность),

- использованных СИ и их погрешностей (инструментальная, основная, систематическая исключённая и неисключённая погрешность),

- от свойств органов чувств операторов, проводящих измерения (субъективная, грубая, систематическая погрешность),

- от условий, в которых проводятся измерения и т.д.

Сегодня существует два подхода определения точности измерений:

1) Теория погрешности (учитывает природу возникновения погрешности).

2) Теория неопределённости (включает в себя способы оценки неопределённости).

Согласно второй теории:

вместо погрешности – неопределённость;

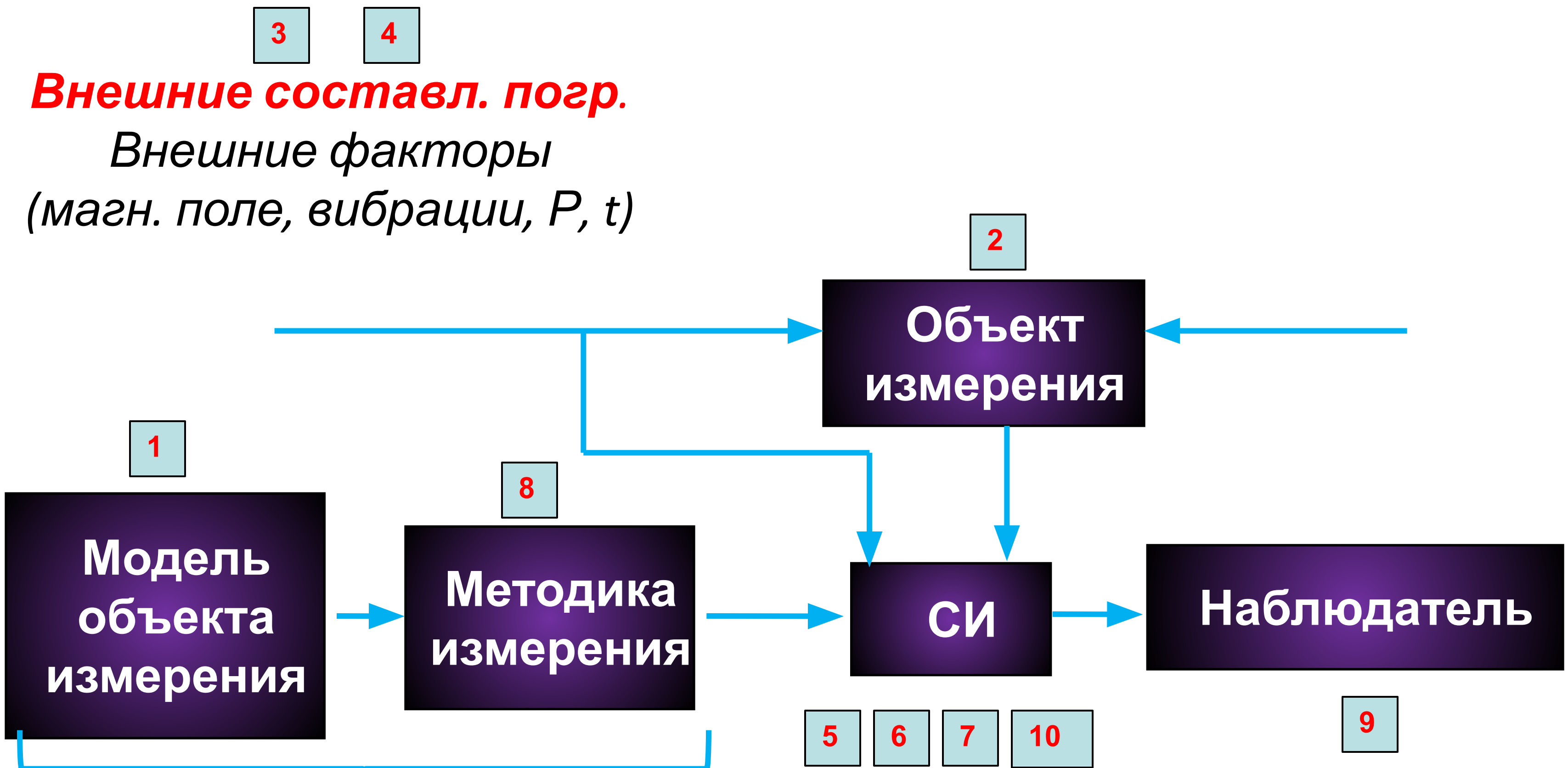
вместо истинного значения измеряемой величины - оцениваемое значение измеряемой величины.

1. Погрешности измерений

Погрешность (измерения) [VIM 3.10] - отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины. Так как истинное значение не может быть определено, на практике применяется действительное.

В лекции даны определения из Международного словаря основных и общих терминов в метрологии (сокращенно VIM)] и из Международного стандарта ISO 3534-1

Источники появления погрешностей измерений



Методическая погрешность
(несовершенство методики измерения)

Инструмент. погрешность
(несоверш. измер. механизма)

Субъект. погрешн.
(несоверш. органов чувств, квалификация)

Источники появления погрешностей измерений

1) неполное соответствие объекта измерений принятой его модели;
2) неполное знание измеряемой величины;
3) неполное знание влияния условий окружающей среды на измерение;
4) несовершенное измерение параметров окружающей среды;
5) конечная разрешающая способность прибора или порог его чувствительности;
6) неточность передачи значения единицы величины от эталонов к РСИ;
7) неточные знания констант и других параметров, используемых в алгоритме обработки результатов измерения;
8) аппроксимации и предположения, реализуемые в методе измерений;
9) субъективная погрешность оператора при проведении измерений;
10) изменения в повторных наблюдениях измеряемой величины при очевидно одинаковых условиях и другие.

ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ и СИ

По способу выражения:

- абсолютные
- относительные
- приведенные

$$\Delta X = X_{изм} - X_{ист}$$

$$\delta = \left(\pm\frac{\Delta}{X_{и}}\right)\cdot 100$$

$$\gamma = \left(\pm\frac{\Delta}{X_{N}}\right)\cdot 100$$

По закономерности (характеру, природе) проявления

- Случайные
- Систематические
- Грубые (промахи)

$$\sigma_{\Delta} = \sqrt{\sigma_0 + \sigma_s}$$

По источнику возникновения:

- методические
- внешние
- инструментальные
- субъективные

$$\Delta X = \Delta_{м} + \Delta_{и} + \Delta_{л}$$

По зависимости измеряемой величины от времени

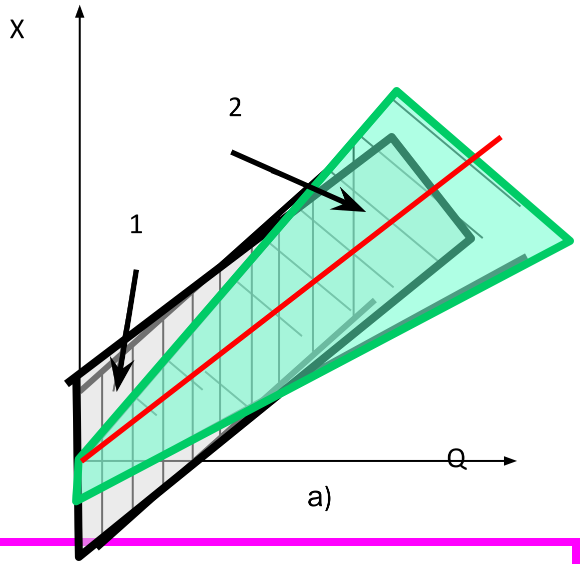
- Статические
- Динамические

По условиям измерений

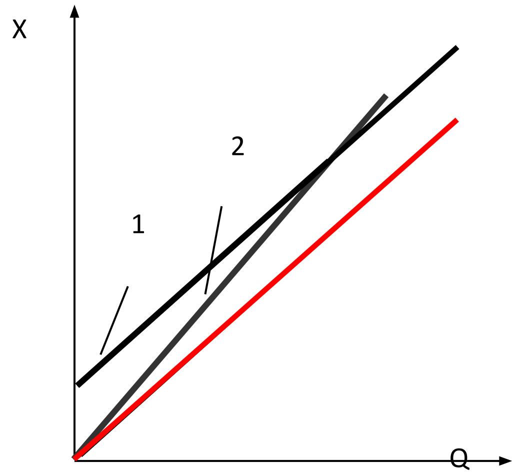
- Основная
- Дополнительная

В зависимости от характера влияния на результат измерения погрешности делят на:

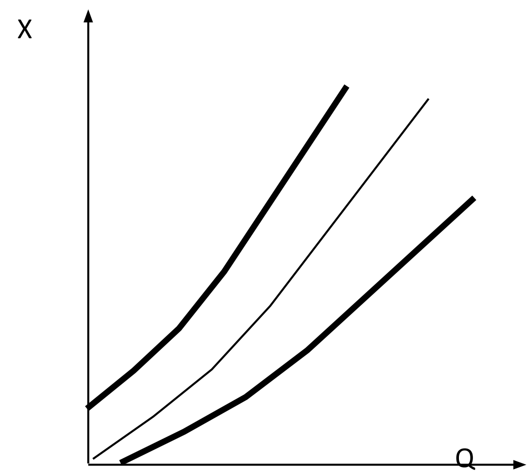
аддитивные и мультипликативные



а)



б)



в)

Область возможных значений измеряемой величины при наличии *случайной аддитивной* (1) и *мультипликативной* (2) *погрешности*

Системати-ческая аддитивная (1) и мультипликативная (2) погрешности

область возможных значений измеряемой величины при наличии *случайных и систематических погрешностей с аддитивными и мультипликативными составляющими*

Абсолютная погрешность измерения (ΔX)

$$\Delta X = X_{изм} - X_{ист} \quad \text{или} \quad \Delta = X_{изм} - X_{д}$$

Обратную величину называют *точностью измерения*

Относительная погрешность (δ)

$$\delta = \pm \frac{\Delta}{X_{и}}$$

или

$$\delta = \left(\pm \frac{\Delta}{X_{и}} \right) \cdot 100$$

Приведенная погрешность измерения (γ)

$$\gamma = \left(\pm \frac{\Delta}{X_{N}} \right) \cdot 100$$

В качестве <u>истинного значения</u>, как правило, используют *среднее арифметическое значение*:

$$X_{ср} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Для оценки возможных отклонений величины X_i от $X_{ср}$ определяют *среднее квадратическое отклонение* (средняя квадратическая погрешность результата измерения):

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n_i} (X_i - X_{ср})^2}$$

- используется при оценке погрешности метода измерения

Для оценки возможных отклонений $X_{ср}$ от $X_{ист}$ определяют *среднее квадратическое отклонение среднего арифметического* (средняя квадратическая погрешность результата измерения среднего значения):

$$\sigma_{X_{ср}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n_i} (X_i - X_{ср})^2} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

Вывод: если необходимо повысить точность результата в 2 раза, то число измерений нужно увеличить в 4 раза; если в 3 раза, то число измерений увеличивается в 9 раз и т. д.

Случайная погрешность Δ_0 [VIM 3.13] - разность результата измерения $X_{изм}$ и среднего значения $X_{СР}$, которое могло бы быть получено при бесконечно большом числе повторных измерений одной и той же измеряемой величины, проводимых в условиях сходимости (т.е. <u>систематическая погр. сводится</u> (подстраивается, юстируется) <u>к нулю</u> за счёт того, что измерения проводят многократно в одинаковых условиях, одним оператором, на одном и том же СИ).

Систематическая погрешность Δ_S [VIM 3.14] - разность между средним значением $X_{СР}$, получаемым при бесконечном числе измерений одной и той же измеряемой величины в условиях сходимости, и истинным значением измеряемой величины $X_{ист}$, либо $X_Д$.

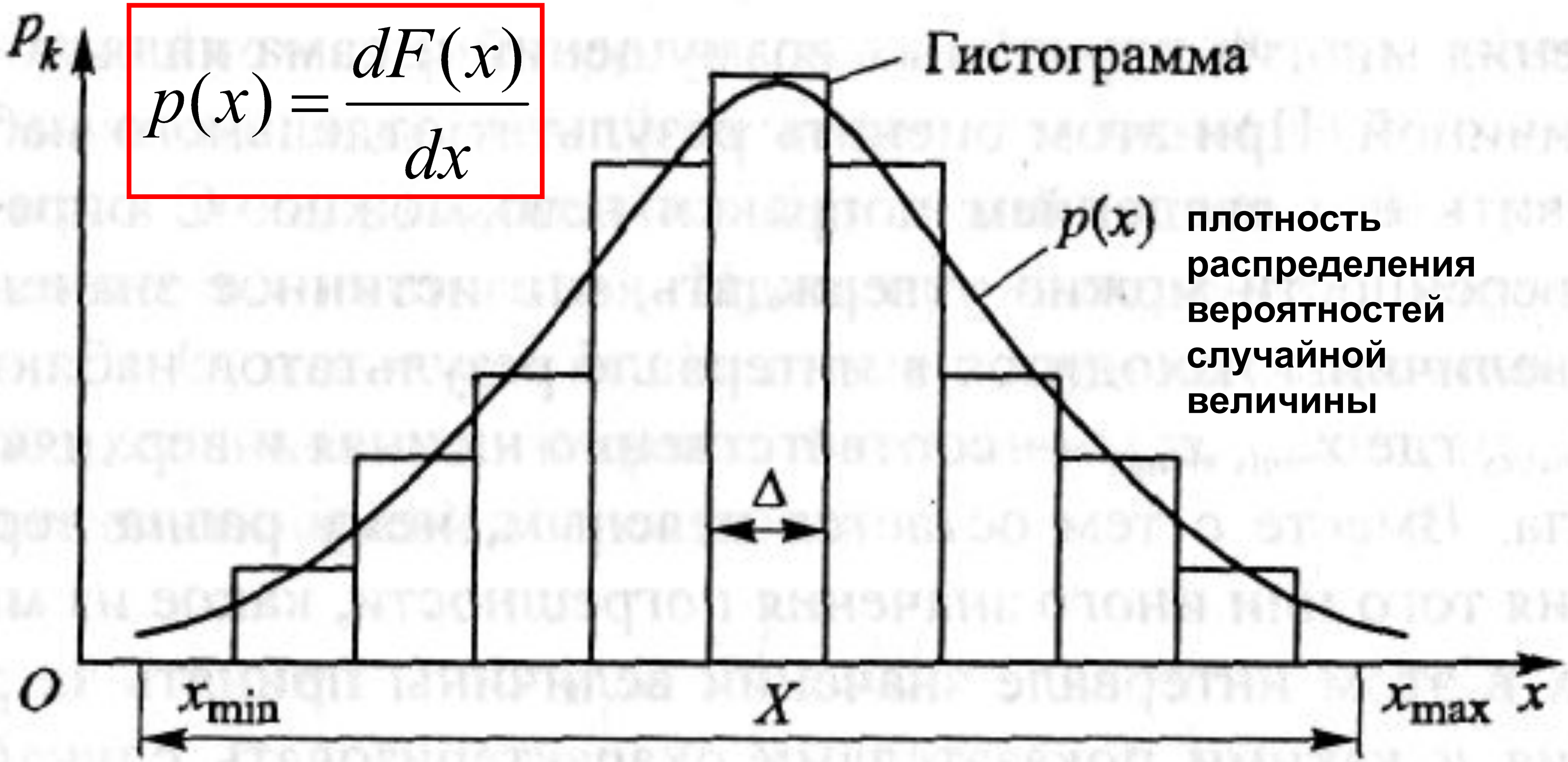
Систематическая погрешность Δ_s равна погрешности измерения Δ минус случайная погрешность Δ_0.

Систематическая погрешность делится на исключаемую и неисключаемую. Вторая составляющая погрешности опаснее случайной: если случайная составляющая вызывает вариацию (разброс) результатов, то систематическая − устойчиво их искажает (смещает).

2. Законы распределения случайных величин, применяемые в метрологии

1) Дифференциальный закон распределения плотности вероятностей случайной величины X (либо Δ)

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1.$$

$$F\{x_1 \le x \ge x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$$

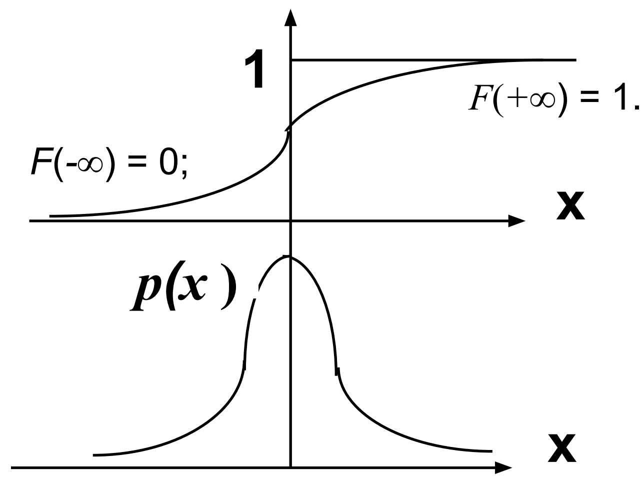
$$p(\Delta) = \frac{dF(\Delta)}{d\Delta},$$

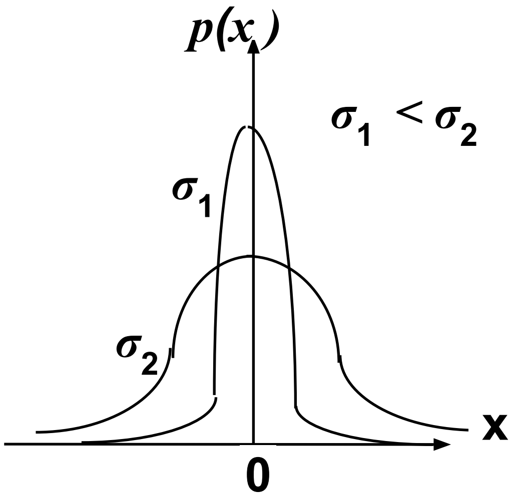
***dF*(Δ) –** вероятность нахождения значений погрешности *Δ* в интервале ***dΔ*.**

2) Интегральный закон распределения случайной величины X (либо Δ)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx$$

$F(x)=P(x_i<x)$





Вероятность P, что случайная величина в i-ом отсчёте x_i примет значения меньше текущего значения x_1 описывается функцией $F(x)$ при $x = x_1$: $F(x_1) = P(x_1 < x)$

Вероятность того, что случайная величина x примет значение, лежащее в интервале (x_1, x_2) : $P(x_1 \le x \le x_2) = F(x_1) - F(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$

Инт. закон распределения случайной погрешности Δ :

$$\mathrm{F}(\Delta_x) = \mathrm{P}\{-\infty < \Delta_x < \Delta_\Gamma\} = \int_{-\infty}^{\Delta_\Gamma} \mathrm{p}(\Delta_x)d\Delta$$

Между законами имеется связь: $P(-\Delta_\Gamma \le \Delta_x \le +\Delta_\Gamma) = \int_{-\Delta_\Gamma}^{+\Delta_\Gamma} p(\Delta)d\Delta$

Построение функции распределения вероятности случайной величины *x*

x_i	m_i	$p(x_i)$	$F(x_i)$	x_i	m_i	$p(x_i)$	$F(x_i)$
90,10	1	$\frac{1}{100} = 0.01$	0,01	**90,16**	19	$\frac{19}{100} = 0.19$	0,62+0,19 = 0,81
90,11	2	$\frac{2}{100} = 0.02$	0,01 +0,02 = 0,03	**90,17**	11	$\frac{11}{100} = 0.11$	0,81 + 0,11 = 0,92
90,12	5	$\frac{5}{100} = 0.05$	0,03 + 0,05 = 0,08	**90,18**	5	$\frac{5}{100} = 0.05$	0,92 + 0,05 = 0,97
90,13	10	$\frac{10}{100} = 0.1$	0,08 + 0,1 = 0,18	**90,19**	2	$\frac{2}{100} = 0.02$	0,97 + 0,02 = 0,99
90,14	20	$\frac{20}{100} = 0.2$	0,18+0,2 = 0,38	**90,20**	1	$\frac{1}{100} = 0.01$	0,99 + 0,01 = 1,00
90,15	24	$\frac{24}{100} = 0.24$	0,38 + 0,24 = 0,62				

Каждое *i*-е число появилось *m*, раз

Графическое представления распределения (плотности) вероятностей $p(x_i)$ и функции распределения вероятности $F(x_i)$

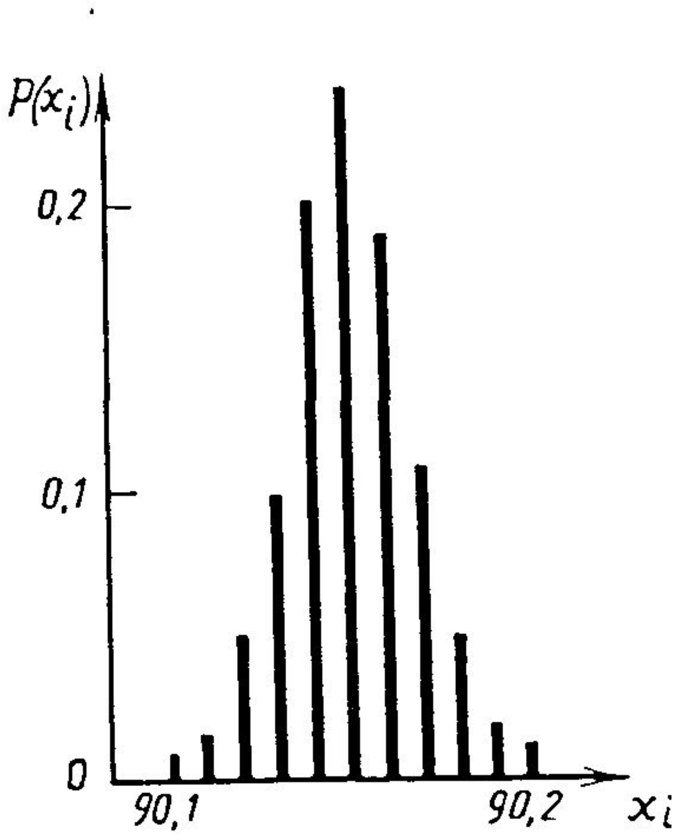


Рис. 4. Распределение вероятности отсчета цифрового измерительного прибора

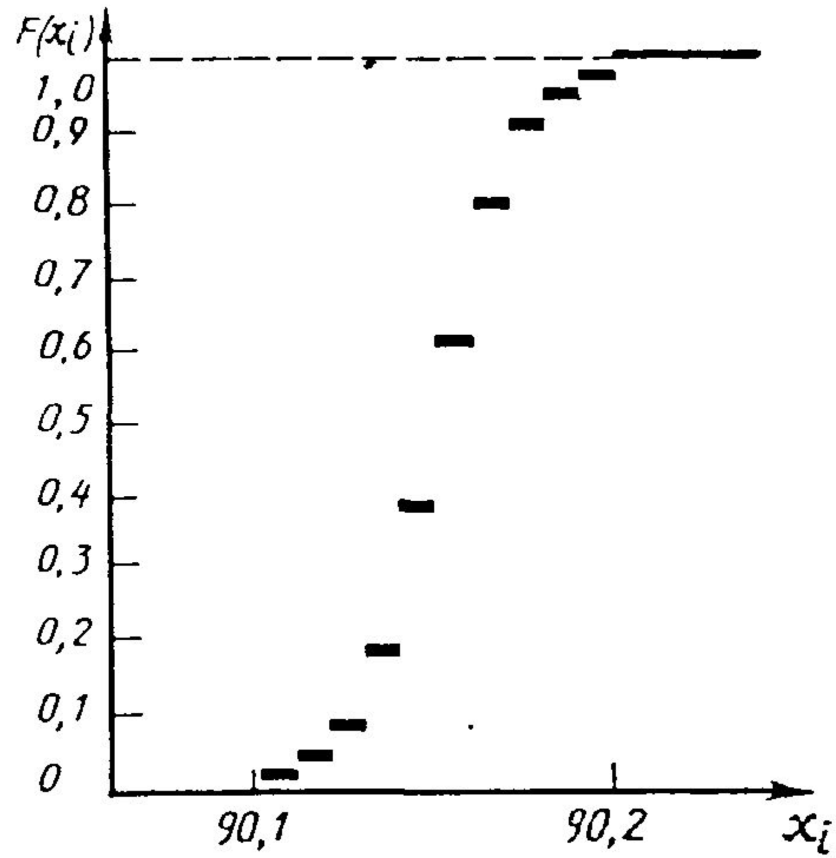


Рис. 5. Функция распределения вероятности отсчета цифрового измерительного прибора

Нахождение **диф. (инт.) закона** требует проведения многочисленных измерений, поэтому **на практике** для описания свойств случайной величины используют различные числовые характеристики распределений:

Начальный момент k-го порядка:

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x)dx$$

Начальный момент 1-го порядка - математическое ожидание случайной величины:

$$m_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$$

Центральный момент k-го порядка:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1)^k p(x)dx$$

Центральный момент 2-го порядка дисперсия:

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1)^2 p(x)dx$$

На практике чаще используется среднее квадратическое отклонение σ случайной величины:

$$\sigma = \sqrt{D}$$

Способы нахождения значений случайной величины зависят от вида функции её распределения (закона распределения).

Законы распределения:

1) Нормальный закон (Гауса).

2)

1) *Нормальный закон распределения плотности вероятностей случайной величины X (либо Δ) с математическим ожиданием m_1 и ско σ :*

Плотность распределения величины X и её погрешности:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$p(\Delta_x) = \frac{1}{\Delta_{\Sigma x}\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\Delta_{Xi}^2}{2\Delta_{\Sigma x}^2}}$$

где m_x – матожидание величины X; σ_x - ско (теоретическое);

$\Delta_{\Sigma x} = \sqrt{\Delta_{X1}^2 + \ldots + \Delta_{Xn}^2}$ - квадратичное значение суммарной абсолютной погрешности.

Функция распределения величины X и её погрешности :

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{\frac{-(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx$$

$$P(\Delta_x) = \frac{1}{\Delta_{\Sigma x}\sqrt{2\pi}} \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} e^{\frac{-\Delta_{Xi}^2}{2\Delta_{\Sigma x}^2}} d\Delta$$

После замены: $t = (x - m_x)/\sigma_x$, $dt = dx/\sigma_x$, *т.е.* $dx = dt/\sigma_x$

$t = \Delta_{xi}/\Delta_{\Sigma x}$, $d\Delta = dt/\Delta_{\Sigma x}$, $\Delta_{\Sigma x}/\sigma = t_p$ *получим:*

$$p(\Delta_x) = \frac{1}{\Delta_{\Sigma x}\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}$$

$$P(\Delta_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{\frac{-t}{2}} dt = 2 \cdot \Phi(t_p)$$

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}$$

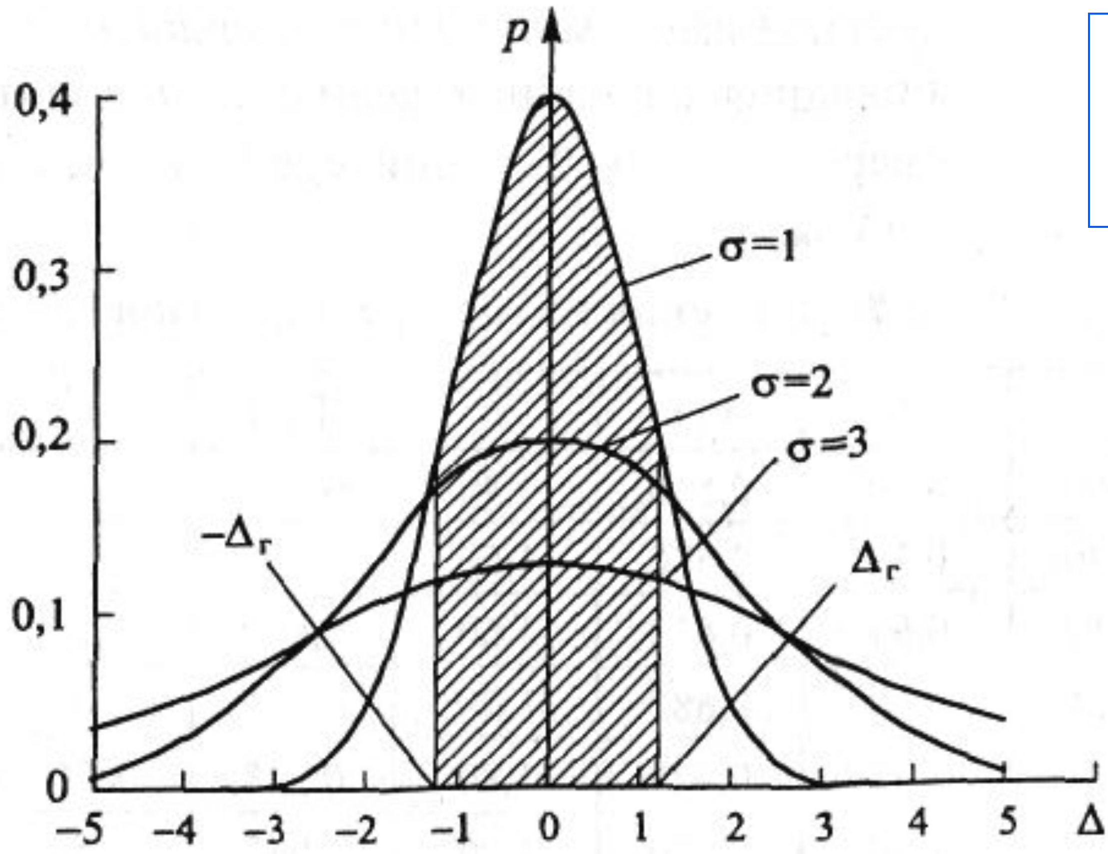
$$P(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x_1 - m_x}{\sigma_x}}^{\frac{x_2 - m_x}{\sigma_x}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = 2 \cdot \Phi(t_p)$$

Функция $\Phi(t_p)$ ***называется интегралом вероятностей (интегралом Лапласа). На основании уравнения получена зависимость:***

t_p	2/3	1	0,95	0,997
P_t	0,5	0,68	2	3

tр **Нормальное распределение характеризуется двумя параметрами:**

- **математическим ожиданием - m_1 и**
- **средним квадратическим отклонением - σ.**



Оценкой m_1 для группы из n наблюдений является среднее арифметическое:

$$x_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Оценка S среднего квадратического отклонения (рассеяние x_i относительно среднего значения x_{cp}):

$$S(x)^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{cp})^2$$

Оценка S среднего квадратического отклонения x_{cp}:

$$S(x_{cp}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{cp})}{n(n-1)}}$$

Нормальное распределение погрешностей имеет следующие свойства:

-*симметричность, т.е. погрешности, одинаковые по величине, но противоположные по знаку, встречаются одинаково часто;*

-*математическое ожидание случайной погрешности равно нулю;*

-*малые погрешности более вероятны, чем большие;*

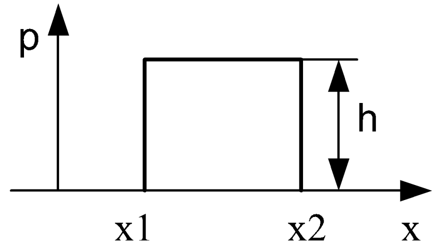
- *чем меньше σ, тем меньше рассеяние результатов наблюдений и больше вероятность малых погрешностей.*

2) Равномерное распределение:

Плотность распределения x:

$p(x) = h$ при $x_1 \le x \le x_2$,

$p(x) = 0$ при $x_2 < x < x_1$.

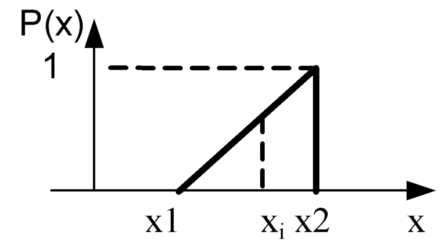


Тогда:

$h(x_2 - x_1) = 1;$

$p(x) = h = 1/(x_2 - x_1)$

Вероятность: $P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$



Математическое ожидание:

$$m_x = \int_{x_1}^{x_2} xp(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{x}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2(x_2 - x_1)} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Дисперсия и СКО:

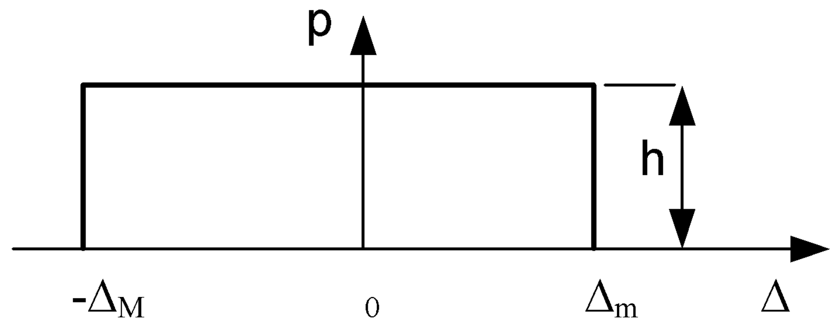
$$D = \int_{x_1}^{x_2} (x - m_x)^2 p(x)dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 dx = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12}$$

$$\sigma = \sqrt{D} = \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{3}}$$

Плотность распределения Δ_x:

$p(\Delta) = h$ при $-\Delta_m \le \Delta \le +\Delta_m$

$p(\Delta) = 0$ при $-\Delta_m < \Delta < +\Delta_m$



Тогда:

$h(2\Delta_m) = 1;$

$p(\Delta) = h = 1/(2\Delta_m)$

Математическое ожидание*:*

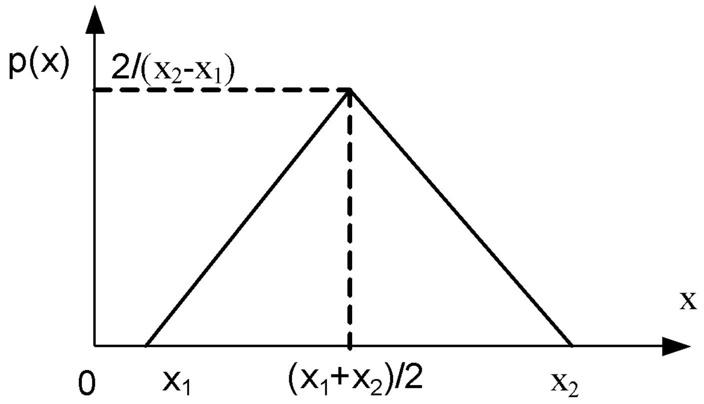
$$\boxed{m_x(\Delta_x) = \int_{-\Delta_m}^{\Delta_m} \Delta_x p(\Delta_x) d\Delta = \int_{-\Delta_m}^{\Delta_m} \frac{\Delta}{2\Delta_m} = \frac{\Delta_m^2 - \Delta_m^2}{4\Delta_m} = 0}$$

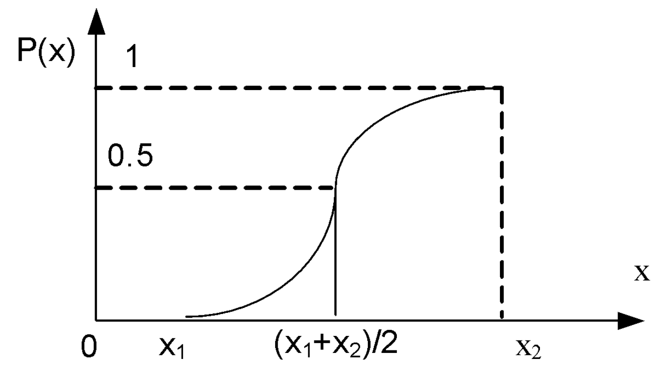
Дисперсия и СКО*:*

$$\boxed{D_{\Delta_x} = \int_{x_1}^{x_2} (\Delta_x)^2 p(\Delta_x) d\Delta = \frac{\Delta_x^2}{3}}$$

$$\boxed{\sigma = \sqrt{D} = \frac{\Delta_x}{\sqrt{3}}}$$

3) Треугольный закон распределения (закон Симпсона):





Математическое ожидание:

$$m_x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Дисперсия :

$$D = \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{6}}$$

3. Доверительные интервалы

Знание точечной оценки m_x, D_x, σ_x является не всегда достаточным и зависит от количества измерений n.

Наиболее корректной и наглядной оценкой случайной погрешности измерений является оценка с помощью доверительных интервалов.

Симметричный интервал с границами $\pm\Delta_x(P)$ называется доверительным интервалом случайной погрешности с доверительной вероятностью ***P***, если площадь кривой распределения между абсциссами $-\Delta_x$ и $+\Delta_x$ составляет *P*-ю часть всей площади под кривой плотности распределения вероятностей.

При нормировке всей площади на единицу ***P*** представляет собой часть этой площади в долях единицы (или в процентах). Другими словами, в интервале от $-\Delta_x(P)$ до $+\Delta_x(P)$ с заданной вероятностью ***P*** встречаются $P \cdot 100\%$ всех возможных значений случайной погрешности.

Взаимосвязь граничных значений Δ_x, с доверительной вероятностью определяется соотношением:

$$P_t = P[-\Delta_x < \varepsilon < +\Delta_x] = \int_{-\Delta_x}^{+\Delta_x} p(\varepsilon) d\varepsilon$$

Доверительный интервал для нормального распределения случайной погрешности находится по формуле:

$$\Delta_x(P) = \varepsilon = t\,\sigma$$

Для нормального распределения существуют следующие варианты ***t*** :

1σ (P = 0,68), 2σ (P = 0,95), 3σ (P = 0,997), 4σ (P = 0,999)

При проведении многократных измерений величины X, подчиняющейся нормальному распределению, доверительный интервал может быть построен для любой доверительной вероятности:

$$\Delta_x(P) = t \cdot S(X_{cp})$$

$S(X_{cp})$ – оценка СКО среднего арифметического

При малом числе наблюдений $n \le 20$, коэффициент t_q подчиняется распределению Стьюдента

n	t_q		
	$P = 0{,}9$	$P = 0{,}95$	$P = 0{,}99$
3	2,5	3,18	5,84
5	2,02	2,57	4,03
10	1,81	2,23	3,17
15	1,75	2,13	2,95
20	1,72	2,09	2,84
25	1,64	1,96	2,58

Истинное значение измеряемой величины находится с доверительной вероятностью P внутри интервала:

$$\boxed{\left(X_{cp} - t_q \cdot S(X_{cp});\ \ X_{cp} + t_q \cdot S(X_{cp})\right)}$$

Недостатком доверительных интервалов при оценке случайных погрешностей является то, что при произвольно выбираемых доверительных вероятностях нельзя суммировать несколько погрешностей, т.к. доверительный интервал суммы не равен сумме доверительных интервалов.

Суммируются дисперсии независимых случайных величин: $D_{\sum} = \sum D_i$

4. Погрешности СИ

Погрешность СИ — разность между показаниями СИ и истинным (действительным) значением измеряемой ФВ. $\Delta X = X_{изм} - X_{д}$

Классификация погрешностей СИ похожа на классификацию погрешностей измерений:

1) по характеру проявления на:

- систематические и - случайные (нет грубых);

2) по способу выражения на:

- абсолютные, - относительные и – приведенные (добавились приведённые);

3) по условиям измерений на:

- основные и – дополнительные (добавились);

4) по изменяемости измеряемой величины на:

- динамические и - статические (добавились)

Основная погрешность СИ – погрешность СИ, применяемого в нормальных условиях

Наиболее типичными нормальными условиями являются:

- температура (20 ± 5)° С;

- относительная влажность (65±15) %;

- атмосферное давление (100±4) кПа или (750±30) мм рт. ст.;

- напряжение питания электрической сети 220 В ± 2 % с частотой 50 Гц.

От понятия нормальные условия нужно отличать понятие рабочие условия и предельные условия.

***Рабочими** называют условия, при которых прибор может длительно работать, сохраняя свойства, определенные техническими условиями, хотя погрешности его при этом могут и выходить из пределов допустимых значений для основной погрешности.*

***Предельными** называют условия, превышение которых может привести к повреждению прибора.*

***Дополнительная погрешность СИ** – составляющая погрешности СИ, возникающая дополнительно к основной погрешности вследствие отклонения какой-либо из влияющих величин от нормального ее значения.*

END