



Подготовка экспертов для работы в региональной предметной комиссии при проведении итоговой аттестации по общеобразовательным программам основного общего и среднего общего образования

Тема 5.

Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задания 23 и 26)

Семенов Андрей Викторович, к. пед. н, ведущий научный сотрудник ФГБНУ «ФИПИ»



Тема 5. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задания 23 и 26)

**Для предметных комиссий
субъектов РФ**

**Методические материалы для председателей и членов РПК по проверке
выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ОГЭ 2016**

МАТЕМАТИКА (14.9 Mb)

Тема 5. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задания 23 и 26)

23

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

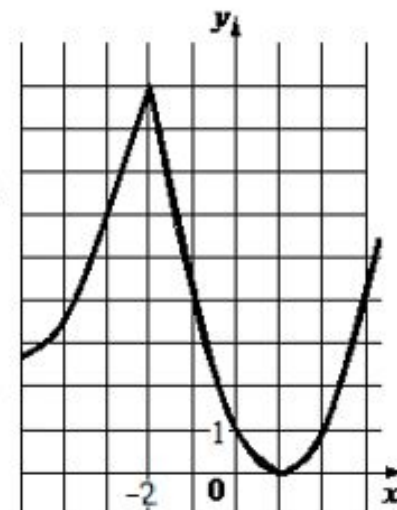
и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Решение.

Построим график функции $y = -\frac{18}{x}$ при $x < -2$ и график функции $y = x^2 - 2x + 1$ при $x \geq -2$.

Прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки при $m = 0$ и при $m \geq 9$.

Ответ: $0; [9; +\infty)$.



Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл



Тема 5. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задания 23 и 26)

Решение.

Построим график функции $y = -\frac{18}{x}$.

Графиком является гипербола, состоящая из двух ветвей, расположенных во второй и четвертой четвертях.

Так как нужна ветвь гиперболы при $x < -2$, то строим ветвь во второй четверти.

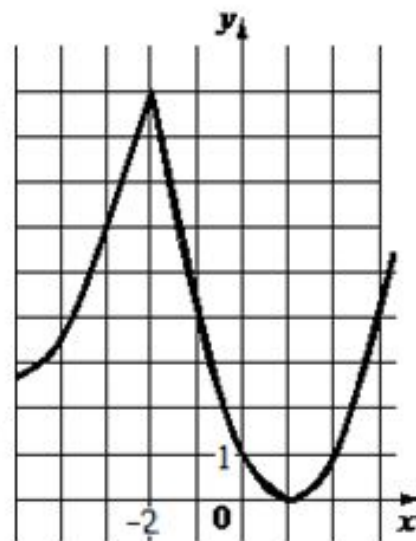
x	-1	-2	-3	-6	-9	-18
y	18	9	6	3	2	1

Построим график функции $y = x^2 - 2x + 1$. Квадратичная функция, графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

Вершина параболы – (1; 0). Так нам нужна часть параболы при $x \geq -2$, то вычислим координаты точек при $x \geq -2$, учитывая симметрию относительно прямой $x = 1$.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	9	4	1	0	1	4	9

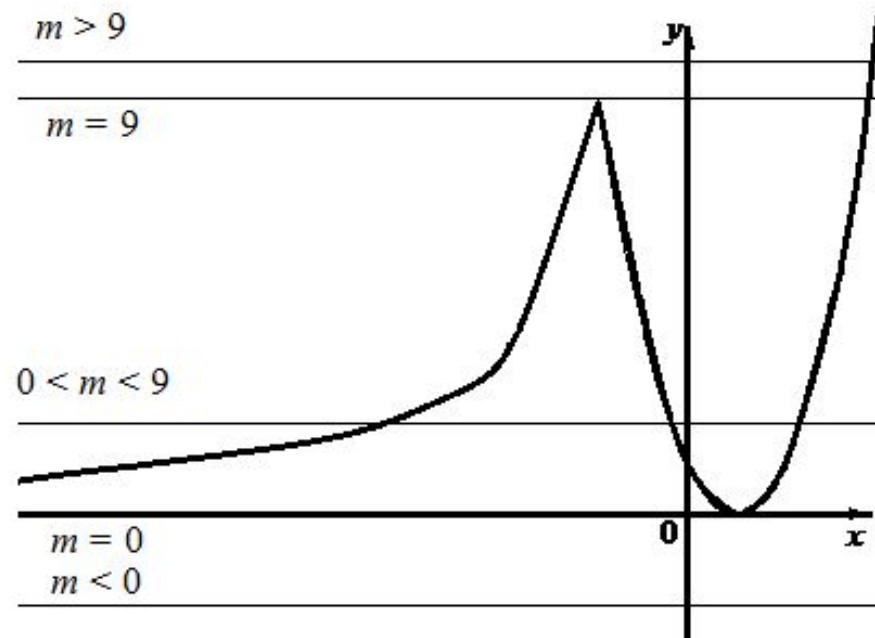
Оставим ветвь гиперболы при $x < -2$ и часть параболы при $x \geq -2$. (В точке $x = -2$ происходит «склейка» графиков.)





Тема 5. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задания 23 и 26)

Построим семейство прямых $y = t$, параллельных или совпадающих с осью Ox .



При $t < 0$ прямая $y = t$ с графиком функции не имеет общих точек;
при $t = 0$ прямая $y = t$ с графиком функции имеет одну общую точку;
при $0 < t < 9$ прямая $y = t$ с графиком функции имеет три общих точки;
при $t = 9$ прямая $y = t$ с графиком функции имеет две общие точки;
при $t > 9$ прямая $y = t$ с графиком функции имеет одну общую точку.

Прямая $y = t$ имеет с графиком одну или две общие точки при $t = 0$ и при $t \geq 9$.

Ответ: $0; [9; +\infty)$.



Тема 5. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задания 23 и 26)

23) $y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq -2) \\ -\frac{18}{x} & (x < -2) \end{cases}$

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

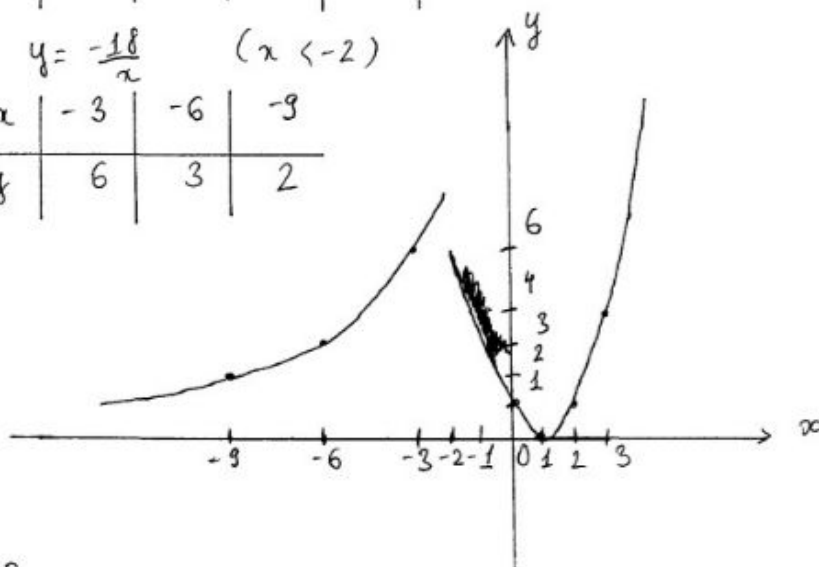
⊕ $y = x^2 - 2x + 1 \quad (x \geq -2)$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

x	-1	0	1	2	3
y	4	1	0	1	4

⊗ $y = -\frac{18}{x} \quad (x < -2)$

x	-3	-6	-9
y	6	3	2



Рассмотрим на график:

При $x = -2$ прямая $y = m$ имеет с графиком две общие точки

$$x = -2 \Rightarrow m = y = 9$$

Ответ: 9

? баллов



Тема 5. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задания 23 и 26)

$$23) \quad y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq -2) \\ -\frac{18}{x} & (x < -2) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

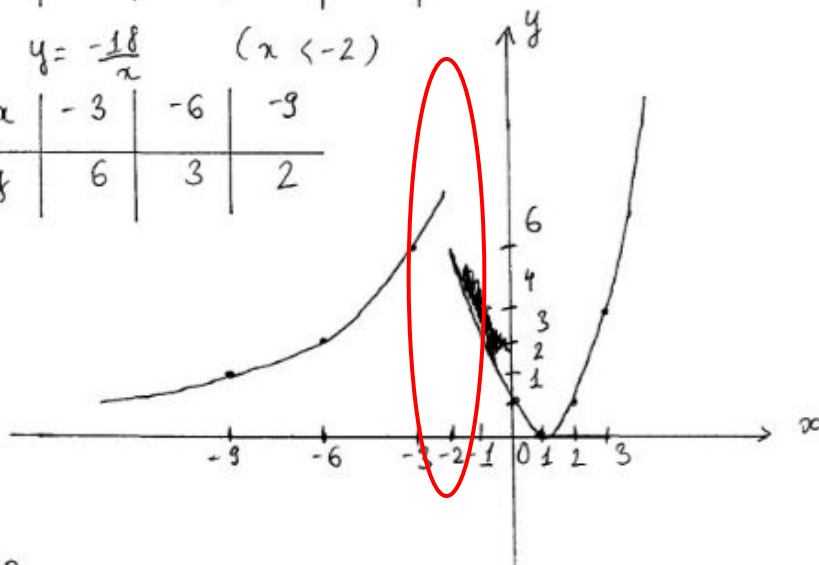
$$* \quad y = x^2 - 2x + 1 \quad (x \geq -2)$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

x	-1	0	1	2	3
y	4	1	0	1	4

$$* \quad y = -\frac{18}{x} \quad (x < -2)$$

x	-3	-6	-9
y	6	3	2



Рассмотрим на график:

При $x = -2$ прямая $y = m$ имеет с графиком две общие точки

$$x = -2 \Rightarrow m = y = 9$$

Ответ: 9

2

График построен верно, верно найдены искомые значения параметра

1

График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены

0 баллов



Тема 5. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задания 23 и 26)

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1; & \text{при } x \geq -2 \\ -\frac{18}{x}; & \text{при } x < -2 \end{cases}$$

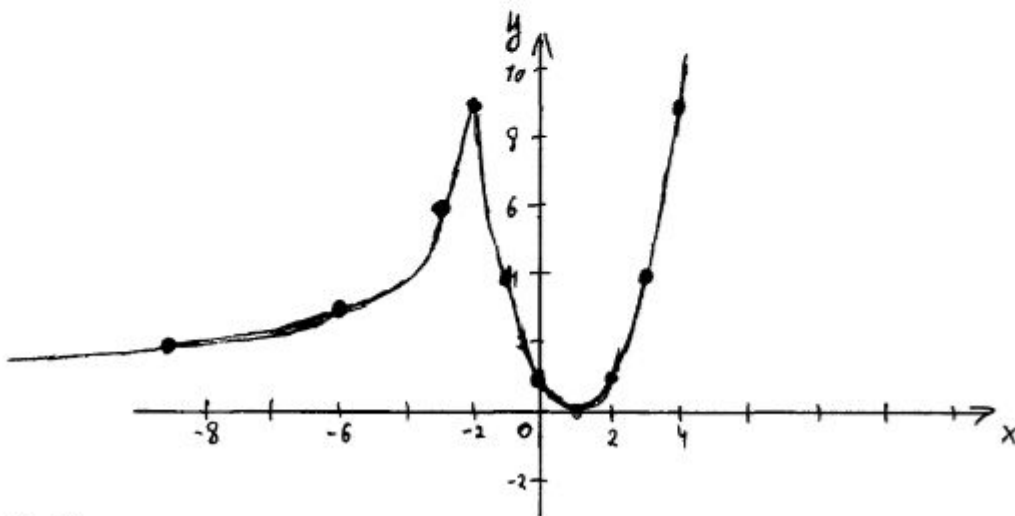
$$-\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \quad y = 1 - 2 + 1 = 0$$

x	-2	-1	0	1	2
y	9	4	1	4	9

$$y = x^2 - 2x + 1; \text{ при } x \geq -2$$

x	-3	-4	-6
y	2	3	6

$$y = -\frac{18}{x}, \text{ при } x < -2$$



Ответ: при $m=0$ и $m \in [9; +\infty)$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены

? баллов

Тема 5. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задания 23 и 26)

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1; & \text{при } x \geq -2 \\ -\frac{18}{x}; & \text{при } x < -2 \end{cases}$$

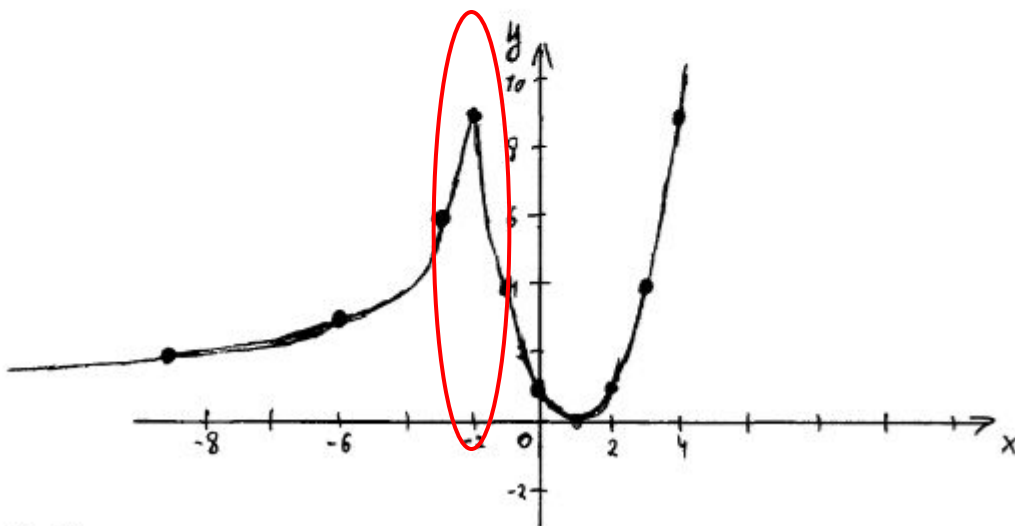
$$-\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \quad y = 1 - 2 + 1 = 0$$

x	-2	-1	0	1	2
y	9	4	1	4	9

$$y = x^2 - 2x + 1; \text{ при } x \geq -2$$

x	-3	-4	-5	-6
y	2	3	6	8

$$y = -\frac{18}{x}, \text{ при } x < -2$$



Ответ: при $m=0$ и $m \in [9; +\infty)$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены

0 баллов



Тема 5. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задания 23 и 26)

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{при } x \geq -2 \\ -\frac{18}{x}, & \text{при } x < -2 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

$$1) y = x^2 - 2x + 1$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

$(1; 0)$ – вершина

x	2	3	4
y	1	4	9

x	0	-1	-2
y	1	4	9

$$y = m$$

m – ? (имеем с графиком одну или две общие точки)

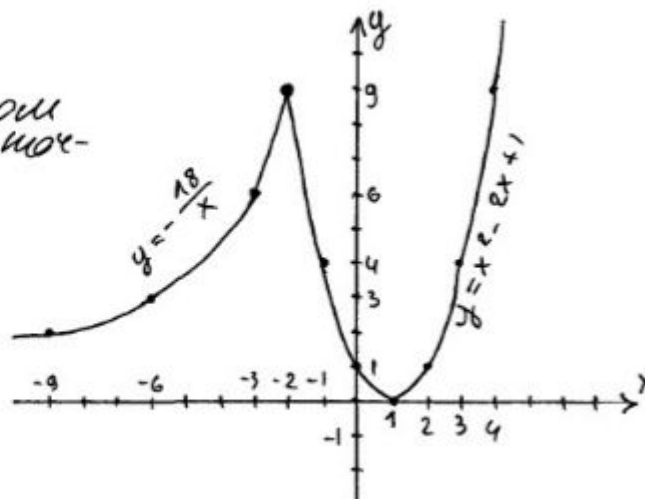
$$m = 0; [9; +\infty)$$

Ответ: $0; [9; +\infty)$ – m

$$2) y = -\frac{18}{x}$$

x	3	6	2
y	-6	-3	-9

x	-3	-6	-2
y	6	3	9



2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены

? баллов

Тема 5. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задания 23 и 26)

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{при } x \geq -2 \\ -\frac{18}{x}, & \text{при } x < -2 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

$$1) y = x^2 - 2x + 1$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

$(1; 0)$ - вершина

x	2	3	4
y	1	4	9

x	0	-1	-2
y	1	4	9

$$y = m$$

m - ? (имеем с графиком одну или две общие точки)

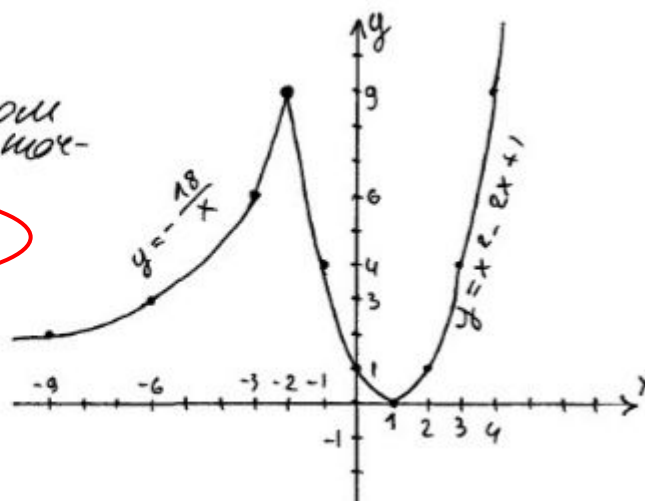
$$m = 0; [9; +\infty)$$

Ответ: $0; [9; +\infty)$ - m

$$2) y = -\frac{18}{x}$$

x	3	6	2
y	-6	-3	-9

x	-3	-6	-2
y	6	3	9



2 График построен верно, верно найдены искомые значения параметра

1 График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены

1 балл

Тема 5. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задания 23 и 26)

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

23. $D(y): x \in (-\infty; 0); (0; +\infty)$.

$$y = x^2 - 2x + 1$$

квадратичная функция

график - парабола

ветви вверх.

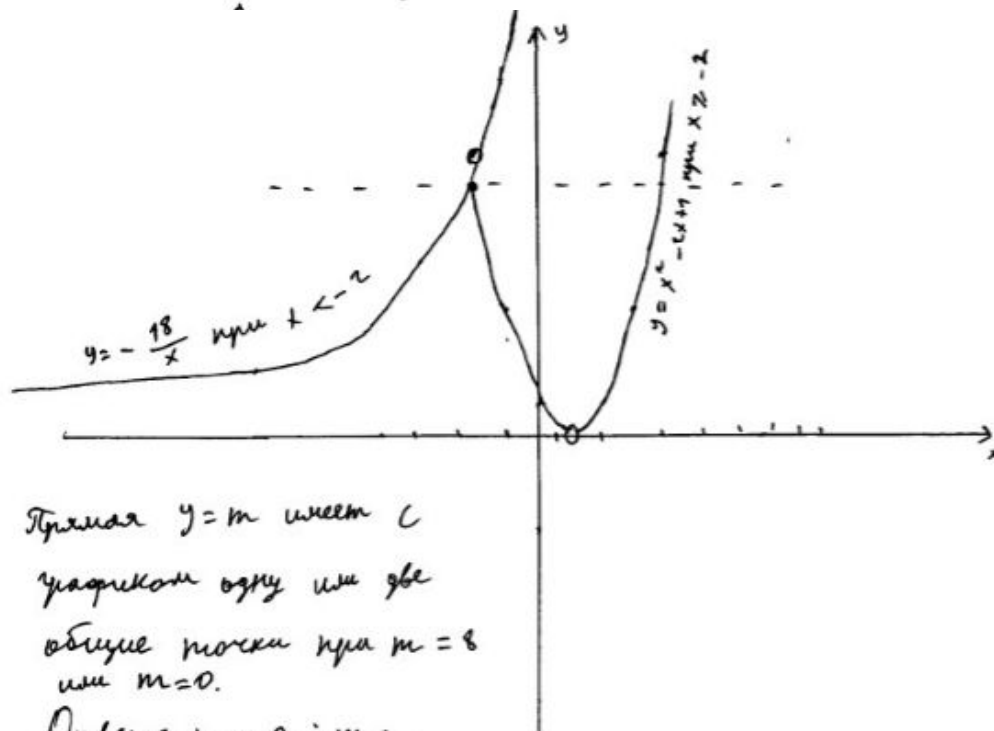
$$x_0 = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_0 = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$y = -\frac{18}{x}$$

график - гиперболоа.

x	1	18	2	9	...
y	-18	-1	-9	-2	...



Прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки при $m = 8$ или $m = 0$.

~~Ответ: $m = 0$; $m = 8$~~

Ответ: 0; 8

2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены

? баллов

Тема 5. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задания 23 и 26)

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

23. $D(y): x \in (-\infty; 0); (0; +\infty)$.

$$y = x^2 - 2x + 1$$

Квадратичная функция

график - парабола

ветви вверх.

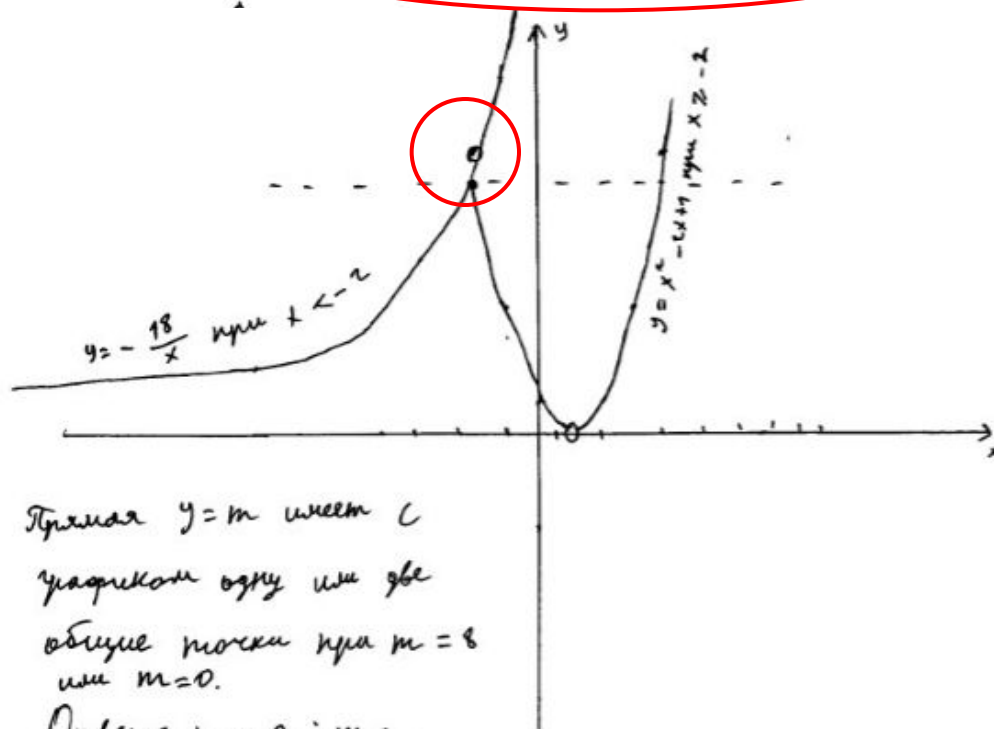
$$x_0 = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_0 = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$y = -\frac{18}{x}$$

график - гиперболы.

x	1	18	2	9	...
y	-18	-1	-9	-2	...



Прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки при $m = 8$ или $m = 0$.

Ответ: $m = 0; m = 8$

Ответ: 0; 8

2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены

0 баллов

Тема 5. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задания 23 и 26)

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

23.

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{при } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x} & \text{при } x < -2 \end{cases}$$

$$y = x^2 - 2x + 1 = 0$$

~~XXXXXXXXXXXX~~

↑, 0(1; 0)

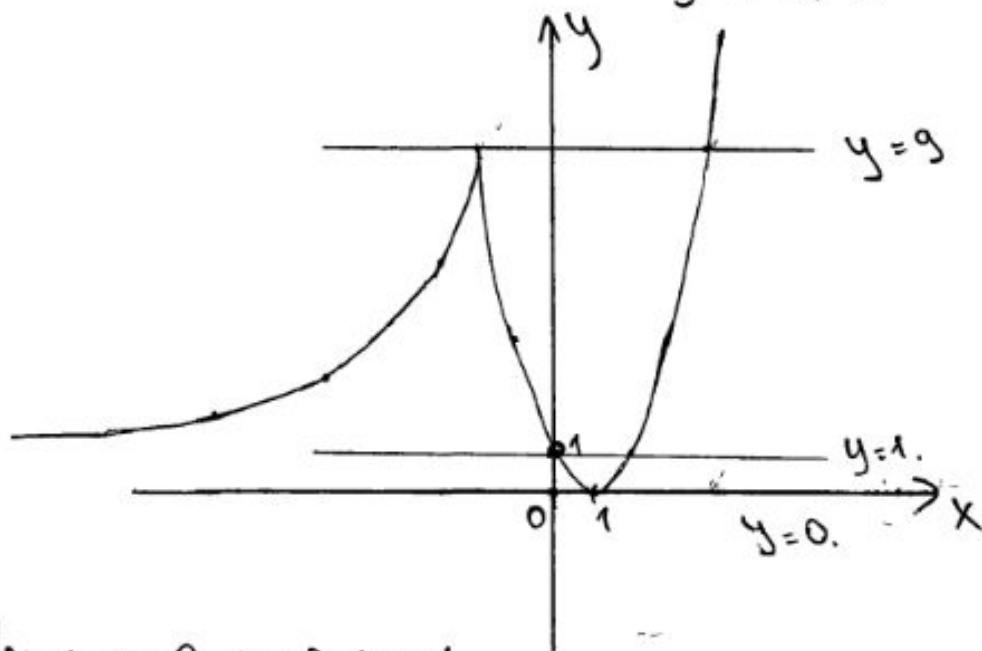
x	0	-1	-2
y	1	4	9

$$y = -\frac{18}{x}$$

x	-2	-3	-6	-9
y	9	6	3	2

023

x ≠ 0.



Ответ: m=0, m=9, m=1.

2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены

? баллов



Тема 5. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задания 23 и 26)

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

23.

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{при } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x} & \text{при } x < -2 \end{cases}$$

$$y = x^2 - 2x + 1 = 0$$

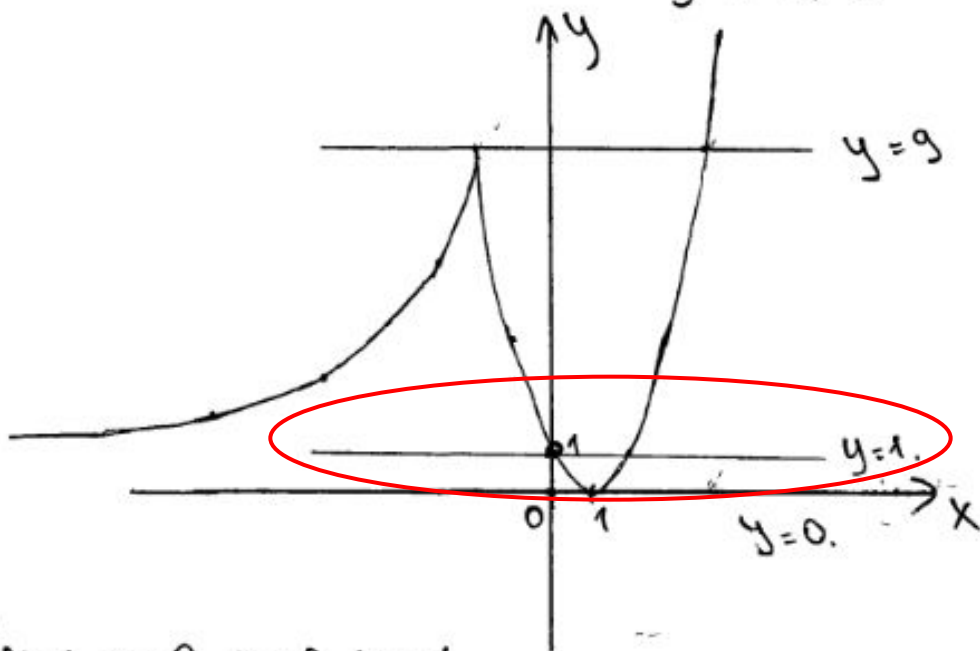
~~0(1;0)~~

↑, 0(1;0)

x	0	-1	-2
y	1	4	9

$$y = -\frac{18}{x}$$

x	-2	-3	-6	-9
y	9	6	3	2



023
x ≠ 0.

Ответ: m=0, m=9, m=1.

2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены

1 балл



Тема 5. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задания 23 и 26)

№ 23

Решение

Построим график функции $y = |x^2 - 4x + 3|$. График является параболой, $a = 1 \neq 0$ (ветви направлены вверх).

Чтобы построить график функции $y = |f(x)|$ можно построить параболу, часть графика, лежащую выше оси Ox сохранить, а лежащую ниже оси Ox отобразить над осью Ox .

Найдём вершину параболы $x_0; y_0$. $x_0 = -\frac{b}{2a}$. $x_0 = \frac{4}{2} = 2$

$$y_0 = 2^2 - 8 + 3 = -1 \quad (2; -1) - \text{вершина}$$

$$Oy: 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 \quad (0; 3)$$

$$Ox: x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$D = 16 - 12 = 4$$

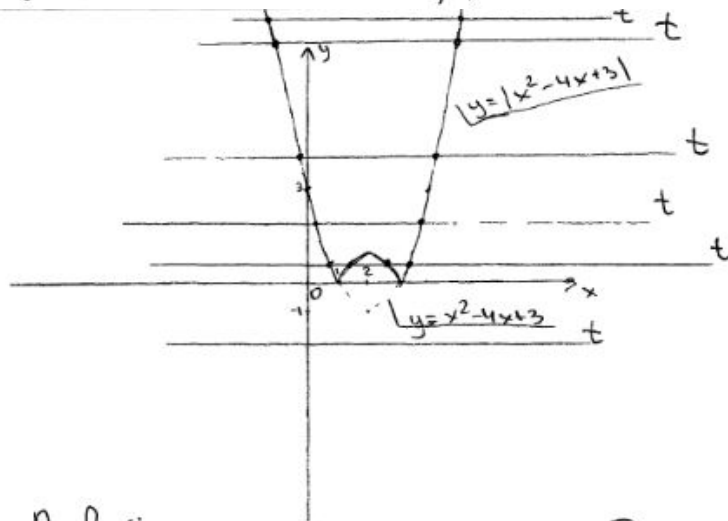
$$x_1 = \frac{4+2}{2} = 3 \quad x_2 = \frac{4-2}{2} = 1 \quad (3; 0); (1; 0)$$

Постройте график функции

$$y = |x^2 - 4x + 3|$$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

$$y(5) = 5^2 - 5 \cdot 4 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8 \quad (5; 8)$$



Проведём прямые, параллельные оси абсцисс. Назовём их прямой t и отметим её точки пересечения с графиком $y = |x^2 - 4x + 3|$.
Ответ: 4 общих точки

? баллов



Тема 5. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом
высокого уровня сложности (задания 23 и 26)

№ 23

Решение

Построим график функции $y = |x^2 - 4x + 3|$. График является параболой, $a = 1 \neq 0$
(ветви направлены вверх)

Чтобы построить график функции $y = |f(x)|$ можно построить параболу, часть графика, лежащую выше оси Ox сохранить, а лежащую ниже оси Ox отобразить над осью Ox .

Найдём вершину параболы $x_0; y_0$ $x_0 = -\frac{b}{2a}$. $x_0 = \frac{4}{2} = 2$

$$y_0 = 2^2 - 8 + 3 = -1 \quad (2; -1) - \text{вершина}$$

$$Oy: 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 \quad (0; 3)$$

$$Ox: x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$D = 16 - 12 = 4$$

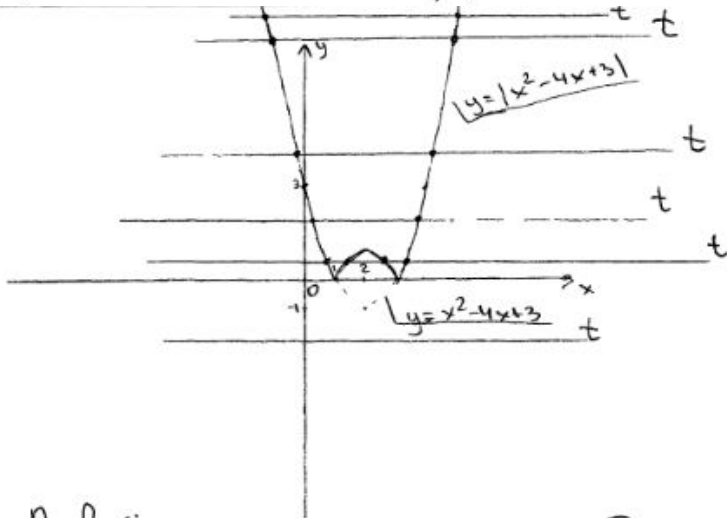
$$x_1 = \frac{4+2}{2} = 3 \quad x_2 = \frac{4-2}{2} = 1 \quad (3; 0); (1; 0)$$

Постройте график функции

$$y = |x^2 - 4x + 3|$$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

$$y(5) = 5^2 - 5 \cdot 4 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8 \quad (5; 8)$$



Проведём прямые, параллельные оси абсцисс. Назовём их прямой t
и отметим её точки пересечения с графиком $y = |x^2 - 4x + 3|$
Ответ: 4 общих точки

2 балла

Тема 5. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задания 23 и 26)

26

На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH .

Решение.

Пусть окружность с диаметром BC вторично пересекается с прямой AC в точке K (см. рис.). Поскольку BK — высота остроугольного треугольника ABC , точка K лежит на стороне AC .

Продолжим высоту AD за точку D до пересечения с окружностью в точке Q . Тогда $DQ = MD = 3$.

По следствию из теоремы о касательной и секущей

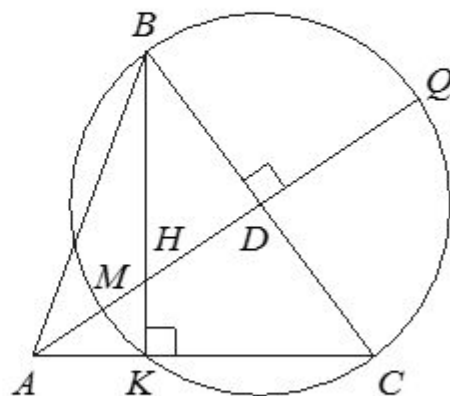
$$AK \cdot AC = AM \cdot AQ = (AD - MD) \cdot (AD + MQ) = 6 \cdot 12 = 72.$$

Из подобия прямоугольных треугольников AKH и ADC следует, что

$$\frac{AK}{AH} = \frac{AD}{AC}, \text{ откуда } AK \cdot AC = AD \cdot AH = 9AH.$$

Значит, $9AH = 72$. Следовательно, $AH = 8$.

Ответ: 8.



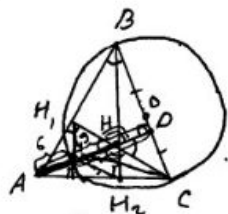
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

Тема 5. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задания 23 и 26)

На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH .

Ответ: 8.

№ 26



Дано:
 $\triangle ABC$; $\angle B$ — острый
 $BC = d$
 $AB = 9$ $MD = 3$

точка H — точка пересечения высот

AD ; CH ; BH — высоты

Найти: $AH = ?$

Решение:

$\triangle ABC$ — данный треугольник;

BC — диаметр окружности O .

$AD = 9$; $MD = 3$

$AM = AD - MD = 9 - 3 = 6$

(по аксиоме измерения отрезков).

Доп. Построение.

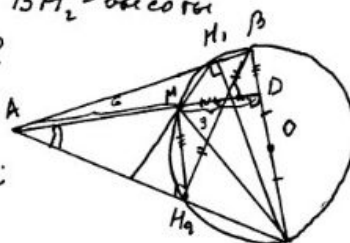
Остроугольного ~~эта~~ отрезок HC .

Рассмотрю $\triangle AH_1H$ и $\triangle DCH$.

они подобны по 1-ому признаку подобия треугольников.

Значит $K = \frac{AD}{HC} = \frac{H_1H}{DH} = \frac{AB}{DC}$.

$$K = \frac{9}{HC} = \frac{H_1H}{3} = \frac{AB}{DC} = K$$



Пусть $MH = x$ см $x > 0$, тогда $AH = x + 6$ см.

Рассмотрю $\triangle ABH$ и $\triangle ACH$.

$$\begin{aligned} 6 + 2x &= 9 \\ x &= 1,5 \\ AH &= 7,5 \end{aligned}$$

они подобны, значит $K = 1,5$.

Рассмотрю $\triangle HBD$ и $\triangle H_1H$.

они равны по 1-ому признаку равенства $\triangle$.

($\angle H_1HH = \angle BHC$ как вертикальные)

($H_1H = BH$; $H_1H = CH$)

Следовательно $MD = MH + HD = 3 : 2 = 1,5$.

$AH = AM + MH$.

$6 + 1,5 = 7,5$ (по аксиоме измерения отрезков)

Ответ: 7,5 см.

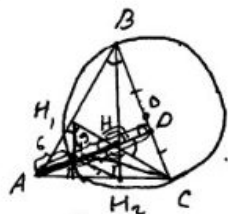
? баллов

Тема 5. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задания 23 и 26)

На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH .

Ответ: 8.

№ 26



Дано:
 $\triangle ABC$; $\angle B$ — острый
 $BC = d$
 $AD = 9$ $MD = 3$

точка H — точка пересечения высот

AD ; CF ; BE — высоты

Найти: $AH = ?$

Решение:

$\triangle ABC$ — данный треугольник;

BC — диаметр окружности O .

$AD = 9$; $MD = 3$

$AM = AD - MD = 9 - 3 = 6$

(по аксиоме взаимности отрезков).

Доп. Построение.

Остроугольного ~~эта~~ отрезок HC .

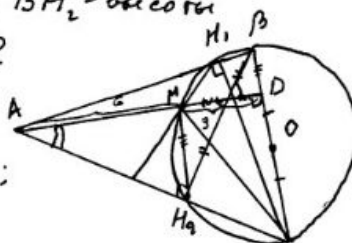
Рассмотрю $\triangle AN_1H$ и $\triangle DCH$.

они подобны по 1-ому признаку подобия треугольников.

Значит

$$K = \frac{AD}{HC} = \frac{H_1H}{DM} = \frac{AB}{DC}$$

$$K = \frac{9}{3} = \frac{H_1H}{3} = \frac{AB}{DC} = K$$



Пусть $MH = x$ см $x > 0$, тогда $AH = x + 6$ см.

Рассмотрю $\triangle ABH$ и $\triangle ACH$.

они подобны, значит $K = 1,5$.

Рассмотрю $\triangle HBD$ и $\triangle HCH$.

они равны по 1-ому признаку равенства $\triangle$.

($\angle HND = \angle BHC$ как вертикальные)

($H_1H = BH$; $H_1H = CH$)

Следовательно $MD = MH + HD = 3 : 2 = 1,5$.

$AH = AM + MH$.

$6 + 1,5 = 7,5$ (по аксиоме взаимности отрезков)

Ответ: 7,5 см.

$$\begin{aligned} 6 + 2x &= 9 \\ x &= 1,5 \\ AH &= 7,5 \end{aligned}$$

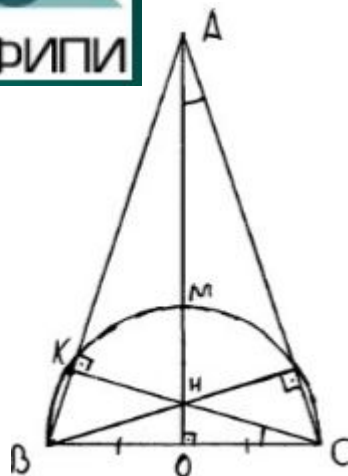
0 баллов



Тема 5. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задания 23 и 26)

На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH .

Ответ: 8.



Решение:

M делит отрезок AD в отношении $\frac{AM}{MD} = \frac{AD-MD}{MD} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$, считая от вершины

$\Rightarrow$ т. M — точка пересечения медиан $\triangle ABC$. ~~не экв.~~
 AM — медиана $\triangle ABC$, но т.к. $AM \in AD$, то есть
 AD является и высотой, и медианой $\triangle ABC$ одновременно.
 $\triangle ABC$ — равнобедренный (по признаку).

Рассмотрим $\triangle AOC$ и $\triangle CKB$.

$\angle KBO = \angle OCA$ (по св-ву равнобедренного треугольника)
 $\angle AOC = \angle CKB = 90^\circ \Rightarrow$
 $\triangle AOC \sim \triangle CKB$ (по двум углам).

Рассмотрим $\triangle CKB$ и $\triangle CDH$:

$\angle KCB$ — общий;

$\angle BKC = \angle HDC = 90^\circ \Rightarrow$

$\triangle CKB \sim \triangle CDH$.

т.к. $\triangle AOC \sim \triangle CKB$,
 $\triangle CKB \sim \triangle CDH$ $\Rightarrow \triangle AOC \sim \triangle CDH$ по 3 углам

т.к. $\triangle AOC \sim \triangle CDH$, то $\Rightarrow \frac{DC}{AD} = \frac{HD}{DC} \Rightarrow$

$DC^2 = AD \cdot HD$; $HD = \frac{DC^2}{AD}$; $HD = \frac{3^2}{9} = 1$

$AH = AD - HD$ (по св-ву отрезков)

$AH = 9 - 1 = 8$

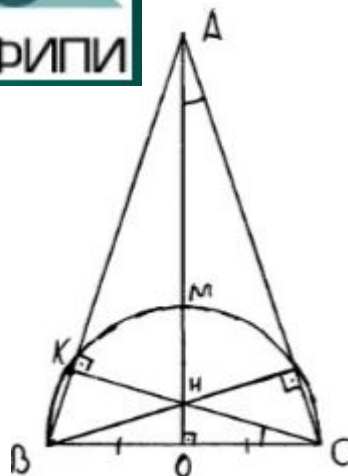
Ответ: 8.

? баллов

Тема 5. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задания 23 и 26)

На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH .

Ответ: 8.



Решение:

M делит отрезок AD в отношении $\frac{AM}{MD} = \frac{AD-MD}{MD} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$, считая от вершины

Т. M — точка пересечения медиан $\triangle ABC$. ~~но так.~~

AM — медиана $\triangle ABC$, но т.к. $AM \in AD$, то есть AD является и высотой, и медианой $\triangle ABC$ одновременно.

$\triangle ABC$ — равнобедренный (по признаку).

Рассмотрим $\triangle AOC$ и $\triangle CKB$.

$\angle KBO = \angle OCA$ (по св-ву равнобедренного треугольника)

$\angle AOC = \angle CKB = 90^\circ \Rightarrow$

$\triangle AOC \sim \triangle CKB$ (по двум углам).

Рассмотрим $\triangle CKB$ и $\triangle CDH$:

$\angle KCB$ — общий;

$\angle BKC = \angle HDC = 90^\circ \Rightarrow$

$\triangle CKB \sim \triangle CDH$.

Т.к. $\triangle AOC \sim \triangle CKB$,
 $\triangle CKB \sim \triangle CDH$ } $\Rightarrow \triangle AOC \sim \triangle CDH$ по 3 углам

т.к. $\triangle AOC \sim \triangle CDH$, то $\Rightarrow \frac{OC}{AD} = \frac{HD}{DC} \Rightarrow$

$DC^2 = AD \cdot HD$; $HD = \frac{DC^2}{AD}$; $HD = \frac{3^2}{9} = 1$

$AH = AD - HD$ (по св-ву отрезков)

$AH = 9 - 1 = 8$

Ответ: 8.

0 баллов

Тема 5. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задания 23 и 26)

На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH .

Ответ: 8.

126

1) дополним полуокружностью, до окружности $\omega(O; R)$

2) $BA \cap \omega = H_1$; $AC \cap \omega = H_2$; $AD \cap \omega = M$; K

3) т.к. BC диаметр $\Rightarrow \angle BH_1C = \angle BH_2C = 90^\circ \Rightarrow$

H_1 и H_2 высоты $\triangle ABC \Rightarrow A, O, B, H_2, P, H_1$ — одна дуга $\Rightarrow$

4) проведем сеп. $HK \Rightarrow$ он проходит через O

$\Rightarrow$ сеп. $HK \perp BC$ и $HK \perp AD \Rightarrow BC$ проходит через сеп. $HK \Rightarrow HD = DK = 3$

5) пусть $H_1K = a$; $H_2C = b$; $H_1H_2 = c$; $BH = d$

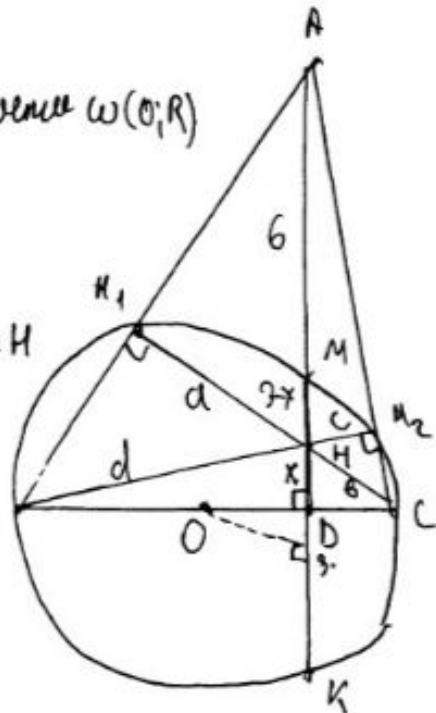
$\triangle H_1CA \sim \triangle DKC$ т.к. $\angle ADC = 90^\circ = \angle H_1KC$; $\angle H_1KA = \angle DKC \Rightarrow$

$$\frac{a}{x} = \frac{9-x}{6} \Rightarrow ab = (9-x)x$$

по теореме о произведении секущих

$$ab = (3-x)(3+x) = 9 - x^2 \Rightarrow 9x - x^2 = 9 - x^2 \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow x = 1$$

Ответ: $AH = 9 - 1 = 8$



? баллов

Тема 5. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задания 23 и 26)

На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M , $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC . Найдите AH .

Ответ: 8.

$\sqrt{26}$

1) дополним полуокружностью, до окружности $\omega(O; R)$

2) $BA \cap \omega = H_1$; $AC \cap \omega = H_2$; $AD \cap \omega = M$; K

3) т.к. BC диаметр $\Rightarrow \angle BH_1C = \angle BH_2C = 90^\circ \Rightarrow$

$(H_1$ и H_2 высоты $\triangle ABC \Rightarrow A O \perp B H_2$ **$\perp B H_1 = H$**)

пусть $BH = x$;

4) проведем сср. $HK \Rightarrow$ он проходит через O

$\Rightarrow$ сср $HK \perp BC$ и $HK \perp AD \Rightarrow BC$ проходит

через сср $HK \Rightarrow HD = DK = 3$

5) пусть $BH_1 = a$; $H_1C = b$; $H_2H_1 = c$; $BH = d$

$\triangle BH_1A \sim \triangle DKC$ т.к. $\angle A H_1 C = 90^\circ = \angle A H_1 A$; $\angle H_1 H A = \angle D K C \Rightarrow$

$$\frac{a}{x} = \frac{9-x}{6} \Rightarrow ab = (9-x)x$$

аналогично по теореме о **произведении** секущих

$$ab = (3-x)(3+x) = 9 - x^2 \Rightarrow 9x - x^2 = 9 - x^2 \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow x = 1$$

Ответ: $AH = 9 - 1 = 8$

2 балла



Тема 5. Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задания 23 и 26)

Указания к тренингу.

Вы оцениваете математическую корректность решения математической задачи выпускника 9 класса.

Успехов!