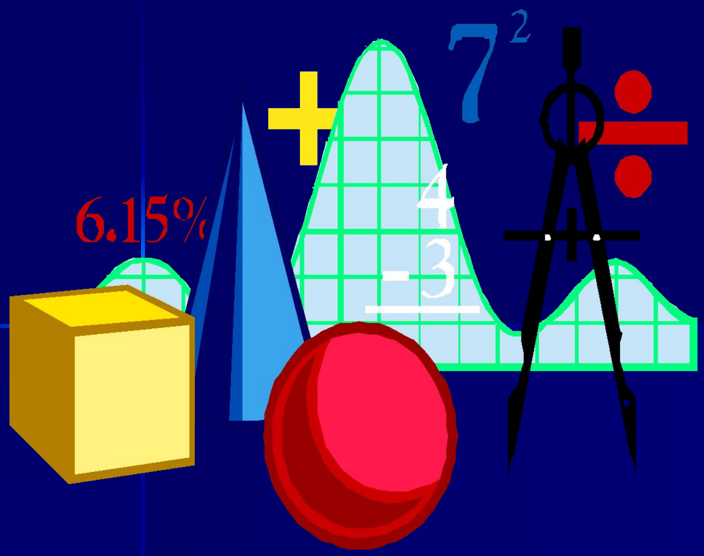


Тема урока:

Методы решения уравнений, содержащих модуль

Цели урока:

- познакомить с методами решения уравнений, содержащих под знаком модуля выражение с переменной;
- сформировать умение решать данные уравнения;
- научить выбирать наиболее рациональный метод решения уравнений;
- закрепить изученный материал.

"Я всегда старался,
насколько позволяли
мои силы и способности,
отделаться от трудности и скуки вычислений,
докучность которых обыкновенно
отпугивает многих от изучения математики"

Джон Непер

I. Фронтальная работа

- Сформулируйте определение модуля.
- Сформулируйте геометрическое истолкование модуля.
- Может ли быть отрицательным значение суммы $2 + |x|$?
- Может ли равняться нулю значение разности $2 - |x|$?
- Как сравниваются два отрицательных числа?

II. Устная работа

Раскройте модуль:

1. $|\pi - 3|;$
2. $|\sqrt{3} + \sqrt{5}|;$
3. $|1 - \sqrt{2}|;$
4. $|\sqrt{5} - 2|;$
5. $|x^4 + 1|;$
6. $|x^2|;$
7. $|x^2 + 3x - 4|;$
8. $\sqrt{(a-3)^2}$, при $a \geq 3;$
9. $\sqrt{(в-4)^2}$, при $в < 4;$
10. $\sqrt{m^2 - 2m + 1}$, при $m < 1.$

Методы решения уравнений, содержащих модуль

1. Метод интервалов.
2. Метод возведения в квадрат обеих частей уравнения.
3. Метод введения новой переменной.
4. Метод замены уравнения совокупностью систем.
5. Графический метод.
6. Решение уравнений, содержащих модуль под знаком модуля.

1. Метод интервалов

Для того, чтобы решить уравнение, содержащее неизвестную под знаком модуля, необходимо освободиться от знака модуля, используя его определение.

Для этого следует:

1. найти значения переменной, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль;

2. разбить область допустимых значений уравнения на промежутки, на каждом из которых, выражения, стоящие под знаком модуля сохраняют знак ;

3. на каждом из этих промежутков уравнение записать без знака модуля, а затем решить его.

Объединение решений, найденных на всех промежутках, и составляет решение исходного уравнения.

Решите уравнения:

1) $|x+4| = 2x-10$

$(-\infty;-4)$

$-x-4 = 2x-10$

$x = 2 \notin (-\infty;-4)$

$[-4;+\infty)$

$x+4 = 2x-10$

$x = 14 \in [-4;+\infty)$

Ответ: $14.$

2) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$

$$(-\infty;0)$$

$$x + 5x + 6 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -2 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}\right\} \in (-\infty;0)$$

$$[0;+\infty)$$

$$x - 5x + 6 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}\right\} \in [0;+\infty)$$

Ответ: $\pm 2; \pm 3.$

3) $|5-2\tilde{o}|+|\tilde{o}+3|=2-3\tilde{o}$

$$5-2x=0 \qquad x+3=0$$
$$x=2,5 \qquad x=-3$$

	$(-\infty;-3)$	$[-3;+2,5)$	$[+2,5;+\infty)$
$5-2x$	+	+	-
$x+3$	-	+	+

- $(-\infty;-3)$

$$5-2x-x-3-2+3x=0$$

x — *любое число* $\in(-\infty;-3)$

- $[-3;+2,5)$

$$5-2x+x+3-2+3x=0$$
$$2x=-6$$
$$x=-3\in[-3;+2,5)$$

- $[+2,5;+\infty)$

$$2x-5+x+3-2+3x=0$$
$$6x=4$$
$$x=\frac{2}{3}\notin[+2,5;+\infty)$$

$$(-\infty;-3)\cup\{3\}=[-\infty;3)$$

Ответ: $(-\infty;-3]$

2. Возведение в квадрат обеих частей уравнения

Решите уравнение:

1) $|x+4| = 2x-10$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$x^2+8x+16=4x^2-40x+100$$

$$3\tilde{o}^2-48x+84=0 \quad /:3$$

$$\tilde{o}^2-16x+28=0$$

$$x_1=14, x_2=2$$

Найдём ОДЗ: $2x-10 \geq 0; \quad 2x \geq 10; \quad x \geq 5$

$$x_1=14 \in [5;+\infty);$$

$$x_2=2 \notin [5;+\infty)$$

Ответ: $14.$

2) $|x+3| = 2x-3$

Возведем в квадрат обе части уравнения:

$$x^2 + 6x + 9 = 4x^2 - 12x + 9$$

$$3x^2 - 18x = 0 \qquad / : 3$$

$$x^2 - 6x = 0$$

$$x(x-6) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = 6.$$

Найдём ОДЗ: $2x - 3 \geq 0; \quad 2x \geq 3; \quad x \geq 1{,}5$

$$x_1 = 0 \notin [1{,}5; +\infty);$$

$$x_2 = 6 \in [1{,}5; +\infty)$$

Ответ: $6.$

3. Метод введения новой переменной

Иногда уравнение, содержащее переменную под знаком модуля, можно решить довольно просто, используя метод введения новой переменной.

Продемонстрируем данный метод на конкретных примерах:

Решите уравнение:

1) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$

Пусть $|x| = t,$ тогда $|x|^2 = x^2 = t^2,$

Уравнение принимает вид:

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$t_1 = 2, \quad |x| = 2, x_{1,2} = \pm 2,$$

$$t_2 = 3, \quad |x| = 3, x_{3,4} = \pm 3.$$

Ответ: $\pm 2, \pm 3.$

Решите уравнение:

2) $(x-2)^2 - 8|x-2| + 15 = 0$

Пусть $|x-2| = t,$ тогда $|x-2|^2 = (x-2)^2 = t^2,$

уравнение принимает вид:

$$t^2 - 8t + 15 = 0$$

$$D = 16 - 15 = 1 \qquad t_{1,2} = \frac{4 \pm 1}{1};$$

$$t_1 = 3, \quad t_2 = 5.$$

$$t_1 = 3, \quad |x-2| = 3, x_1 = 5, x_2 = -1.$$

$$t_2 = 5, \quad |x-2| = 5, x_3 = 7, x_4 = 3.$$

Ответ: $-1;3;5;7.$

4. Метод замены уравнения совокупностью систем

Методом замены уравнения совокупностью систем можно решать уравнения вида:

$$|f(x)| = g(x)$$

Причем данное уравнение можно заменять совокупностью систем двумя способами:

I способ:

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) = g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \end{array} \right.$$

II способ:

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) = -g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \end{array} \right.$$

Если в уравнении $|f(x)| = g(x)$ функция $f(x)$ имеет более простой вид, нежели функция $g(x)$, то имеет смысл исходное уравнение заменять первой совокупностью систем, а если более простой вид имеет функция $g(x)$, тогда исходное уравнение следует заменять второй совокупностью систем.

В частности уравнение $f(x) = C$, при C>0 равносильно совокупности уравнений

$f(x) = C$ и $-f(x) = C$, т.е. $|f(x)| = C \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = C, \\ -f(x) = C; \end{array}\right.$

при $C = 0,\ |f(x)| = 0;$

при $C < 0,\ f(x) = C$ решений не имеет.

Воспользуемся данным методом при решении следующих уравнений:

1) $2\left|x^2+2x-5\right|=x-1 \Leftrightarrow$ совокупности двух уравнений:

$$\begin{cases} 2\left(x^2+2x-5\right)=1-x, \\ x-1<0; \end{cases}$$

$$(-\infty;1)$$

$$2x^2+4x-10-1+x=0$$

$$2x^2+5x-11=0$$

$$D=113$$

$$x_1=\frac{-5-\sqrt{113}}{4}\in(-\infty;1)$$

$$x_2=\frac{-5+\sqrt{113}}{4}\notin(-\infty;1)$$

$$\begin{cases} 2\left(x^2+x2-5\right)=x-1, \\ x-1\geq 0; \end{cases}$$

$$[1;+\infty)$$

$$2x^2+4x-10-x+1=0$$

$$2x^2+3x-9=0$$

$$D=81=9^2$$

$$x_3=-3\notin[1;+\infty)$$

$$x_4=1{,}5\in[1;+\infty)$$

Ответ: $\frac{-5-\sqrt{113}}{4};1{,}5.$

2) $\left|2|x-1|-3\right|=5$

Уравнение $\Leftrightarrow$ совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} 2|x-1|-3=5, \\ 2|x-1-3=-5;| \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} |x-1|=4, \\ |x-1|=-1; \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности равносильно совокупности двух уравнений:

$$|x-1|=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=4, \\ x-1=-4; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x_1=5, \\ x_2=-3; \end{array}\right.$$

Второе уравнение совокупности решений не имеет, т.к.

$$|x-1|\geq 0.$$

Ответ: $-3;5.$

5. Графический метод

Метод основан на геометрической интерпретации понятия абсолютной величины числа, а именно модуль *x* равен расстоянию от точки $C(x)$ до точки с координатой O на числовой прямой Ox. Используя геометрическую интерпретацию, легко решаются уравнения вида:

$$|x-a|=c,$$

$$|x-a|+|x-b|=c,$$

$$|x-a|-|x-b|=c,$$

где $a,\ b,\ c$ - числа

Решить уравнение вида

$$|x - a| = c$$

– это значит найти все точки на числовой оси Ox, которые отстоят от точки $C(a)$ на расстояние c.

При $C < 0$, уравнение решений не имеет;
При $C = 0$, уравнение имеет один корень;
При $C > 0$, уравнение имеет два корня

Решить уравнение вида $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}| = \boldsymbol{c}$

- это значит найти все точки на числовой оси Ox, для каждой из которых сумма расстояний от неё до точки с координатами a и b равна c.

Аналогично интерпретируется решение уравнения вида $|x - a| - |x - b| = c$.

Решите уравнение:

1) $$|x-1|-|x-3|=2$$

На числовой оси Ox найдем все точки, для каждой из которых разность расстояния от нее до точки с координатой 1 и расстояния от неё до точки с координатой 3 равна 2. Так как длина отрезка $[1;3]$ равна 2, то ясно, что любая точка с координатой $x \geq 3$ удовлетворяет данному уравнению, а любая точка с координатой $x<3$ не удовлетворяет ему. Таким образом, решением исходного уравнения является множество чисел промежутка $[3;+\infty)$.

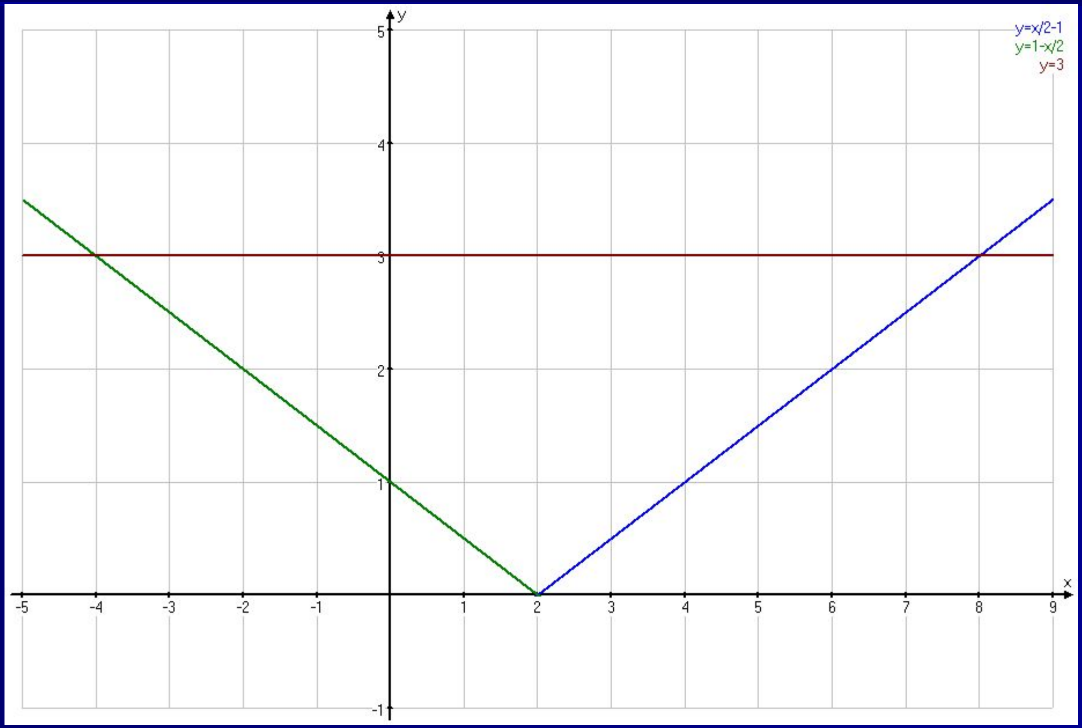
Ответ: $[3;+\infty)$

Рассмотренный метод можно отнести к графическим методом решения уравнения. Все необходимые построения здесь производились на числовой оси. Рассмотрим теперь метод решения уравнения, в котором будем использовать построения на координатной плоскости. Этим методом, теоретически, можно решать уравнения с модулем любого вида, однако практическая реализация метода иногда бывает довольно сложной.

- Суть метода состоит в следующем. Решить уравнение $f(x)=q(x)$ это значит найти все значения x, для которых значение функций $y=f(x)$ и $y=q(x)$ равны, т.е. найти абсциссы всех точек пересечения графиков этих функций. Если же графики не имеют общих точек, то уравнение не имеет корней. Следует, однако, иметь в виду, что точное построение графиков функций практически невозможно, поэтому решение, найденное графическим способом требует проверки подстановкой.

Решите уравнение: 2) $\left|\frac{x}{2}-1\right|=3.$

Построим графики двух функций $y=\left|\frac{x}{2}-1\right|$ и $y=3$



Из чертежа видно, что графики имеют *2* общие точки.
Координаты этой точки: *(8; 3)*, другой: *(-4; 3).*

Следовательно, исходное уравнение имеет два решения: $x_1 = 8$, $x_2 = -4$.

Как уже говорилось, при каждом методе значения корней уравнения определяются приблизительно, и только проверка позволит доказать, что найденные значения действительно являются корнями исходного уравнения.

При подстановке $x_1 = 8$, $x_2 = -4$ в уравнение получаем, соответственно два верных числовых равенства: $|-3|=3$ и $|3|=3$.

Ответ: $-4;8.$

Так как при графическом методе решения зачастую не удается найти точное значение корня, но применение данного метода бывает обосновано, если требуется найти не сами корни, а всего лишь определить их количество.

6. Решение уравнений, содержащих модуль под знаком модуля

При решении уравнения, в котором под знаком модуля содержится выражение, также содержащее модуль следует:

1. освободиться от внутренних модулей;
2. в полученных уравнениях раскрыть оставшиеся модули.

Решите уравнение: $\left|x-\left|x-4\right|\right|-2x=4$

Уравнение $\Leftrightarrow$ совокупности двух систем:

$$\begin{cases}4-x\ge 0,\\ \left|x-(4-x)\right|-2x=4;\end{cases}\qquad \begin{cases}4-x<0,\\ \left|x+(4-x)\right|-2x=4;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\le 4,\\ \left|2x-4\right|-2x=4\end{cases}\Leftrightarrow \qquad \begin{cases}x>4,\\ -2x=0,;\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 4,\\ 2x-4\ge 0,\\ 2x-4-2x=4;\end{cases}\quad \begin{cases}x\le 4,\\ 2x-4<0,\\ -(2x-4)-2x=4;\end{cases}\qquad \begin{cases}x>4,\\ x=2,;\end{cases}$$

- система решения не имеет

$$\begin{cases}x\le 4,\\ x\ge 2,\\ -4=4;\end{cases}\qquad \begin{cases}x\le 4,\\ x<2,\\ -4x=0;\end{cases}$$

ЛОЖНО! $\quad x=0\in(-\infty;0)$

Ответ: $x=0.$

Решите уравнение: $\left|2|x| - 6\right| = -4 - x$

Левая часть уравнения неотрицательна для всех x, следовательно правая часть его должна быть такой же.

$$-4 - x \geq 0;$$

$$x \leq -4$$

Значит $|x| = -x$, т.е. $|-2x - 6| = -4 - x$, $x \leq -4$,

$$-2x - 6 \geq 0,$$

$$-2x - 6 = -4 - x,$$

$$-x = 2,$$

$$x = -2 \notin (-\infty; -4].$$

Ответ: корней нет.

V. Закрепление изученного материала

Решите самостоятельно двумя способами:

$$\left|\tilde{o}^2 - \tilde{o}\right| + \left|\tilde{o} - 2\right| = \tilde{o}^2 - 2$$

Проверь себя:

1 способ: $\left|\tilde{o}^2-\tilde{o}\right|+\left|\tilde{o}-2\right|=\tilde{o}^2-2$

1. Найдем значения переменной, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль:

$$x=0;\tilde{o}=1;\tilde{o}=2.$$

2. Разобьем область допустимых значений уравнения на промежутки, на каждом из которых, выражения, стоящие под знаком модуля сохраняют знак :

	$(-\infty;0)$	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;+\infty)$
x^2-x	+	-	+	+
$x-2$	-	-	-	+

- $(-\infty;0);[1;2)$

$$x^2-x-x+2=x^2-2$$
$$-2x=-4$$
$$x=2\notin\begin{cases}(-\infty;0),\\ [0;2).\end{cases}$$

- $[0;1)$

$$-x^2+x-x+2=x^2-2$$
$$-2x^2=-4$$
$$x^2=2$$
$$x=\pm\sqrt{2}\notin[0;1)$$

- $[2;+\infty)$

$$x^2-x+x-2=\tilde{o}^2-2$$
$$0=0$$

$x -$ *любое число* $\in[2;+\infty)$

Ответ: $[2;+\infty)$

2 способ: $\left|\tilde{o}^2-\tilde{o}\right|+\left|\tilde{o}-2\right|=\tilde{o}^2-2$

Сумма двух неотрицательных выражений неотрицательна, значит левая часть уравнения неотрицательна для всех х, следовательно и правая часть его должна быть такой же,

$$x^2-2\geq 0;\tilde{o}\leq-\sqrt{2};\tilde{o}\geq\sqrt{2}.$$

$$\begin{cases} 4-x\geq 0, \\ |x-(4-x)|-2x=4; \end{cases} \Leftrightarrow$$

совокупности двух систем:

$$1)\begin{cases} \sqrt{2}\leq x<2, \\ x^2-x-x+2=x^2-2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\leq x<2, \\ -2x=-4; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{2}\leq x<2, \\ x=2; \end{cases}$$

$$x=2\notin\left(\sqrt{2};2\right)$$

$$\begin{cases} x\leq -\sqrt{2}, \\ x^2-x-x+2=x^2-2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\leq -\sqrt{2}, \\ -2x=-4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\leq -\sqrt{2}, \\ x=2; \end{cases}$$

$$x=2\notin\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$$

- система решения не имеет

$$2)\begin{cases} 2\leq x\leq +\infty, \\ x^2-x+x-2=x^2-2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\leq x\leq +\infty, \\ -2=-2; \end{cases}$$

ВЕРНО!

$$x\in[2;+\infty)$$

Ответ: $[2;+\infty)$

VI. Домашнее задание

1. Проработать теоретический материал.
2. Практикум «Уравнения с модулем».

Решите уравнения с модулем рациональным способом.

$1)\ |x^2-1|+x=5,$

$2)\ x^2-|3x-2|-12=0,$

$3)\ |x+8|+|x-8|=20,$

$4)\ \dfrac{x+1}{|x-1|}-5\dfrac{|x-1|}{x+1}+4=0,$

$5)\ |x^2-3x+2|=|x-3|+17,$

$6)\ |x^2-9|+|x-4|=5,$

$7)\ |x+8|+|x-8|=16,$

$8)\ |x+1|+|x-1|=\sqrt{2},$

$9)\ |1+3x|-|x-1|=2-x,$

$10)\ ||x+2|+x|=1,$

$11)\ |x-|x-3||=3.$