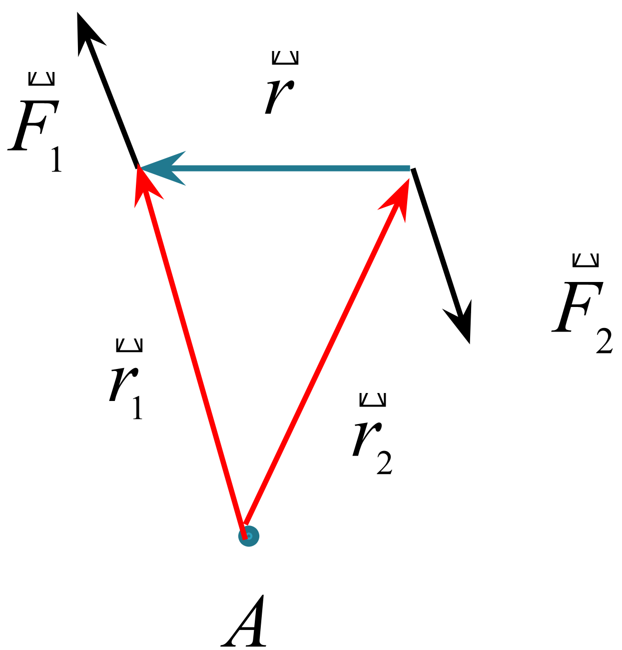
ПАРА СИЛ. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА СТАТИКИ

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. СТАТИКА

ЛЕКЦИЯ 4

МОМЕНТ ПАРЫ СИЛ

<u>Пара сил</u> - две противоположно направленные, равные по модулю силы, не лежащие на одной прямой



Определим момент пары сил относительно точки *A*

$$\vec M_A(\vec F_1, \vec F_2) = \vec r_1 \times \vec F_1 + \vec r_2 \times \vec F_2 =$$
$$= \vec r_1 \times \vec F_1 - \vec r_2 \times \vec F_1 = (\vec r_1 - \vec r_2) \times \vec F_1$$

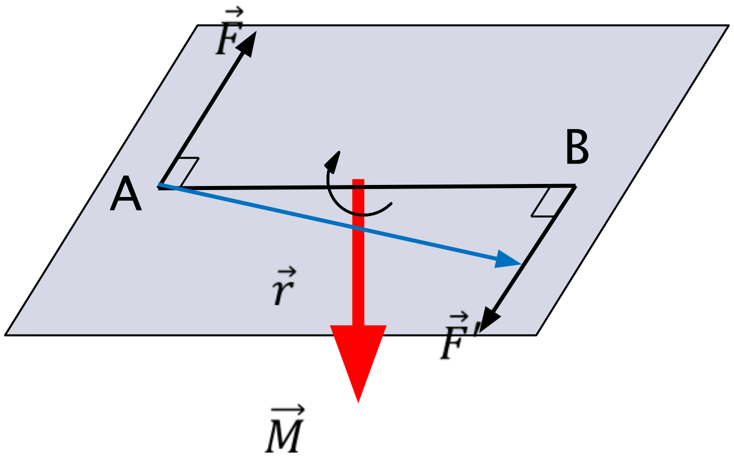
$$\vec r_1 = \vec r_2 + \vec r$$
$$\vec M(\vec F_1, \vec F_2) = \vec r \times \vec F_1$$

<u>Момент пары</u> - вектор, равный по модулю произведению модуля одной из сил на плечо пары и направленный перпендикулярно плоскости пары в сторону, откуда вращение видно против часовой стрелки

МОМЕНТ ПАРЫ СИЛ

Момент пары - вектор, равный по модулю произведению модуля одной из сил на плечо пары и направленный перпендикулярно плоскости пары в сторону, откуда вращение видно против часовой стрелки

Плечо пары - кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары



$$\vec{M}(\vec{F}_1,\vec{F}_2)=\vec{r}\times\vec{F}_1$$

$\vec{M}$

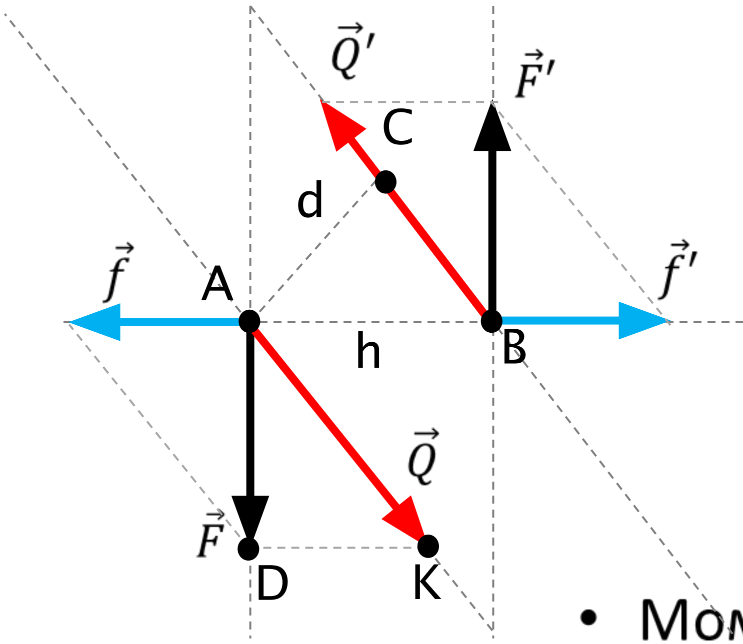
ТЕОРЕМЫ О ПАРАХ

1. Не нарушая состояния тела, пару сил можно поворачивать в плоскости пары и транспонировать.

Транспонирование – изменение модуля сил пары и плеча пары при неизменном моменте пары

ТЕОРЕМЫ О ПАРАХ

1. Не нарушая состояния тела, пару сил можно поворачивать в плоскости пары и транспонировать.



Доказательство:

- Пусть дана пара сил $(\vec{F}; \vec{F}')$ с моментом $m = F \cdot h$
- $(\vec{F}; \vec{F}') \sim (\vec{Q};\ \vec{Q}'; \vec{f};\ \vec{f}')$
- $(\vec{f}; \vec{f}') \sim 0$

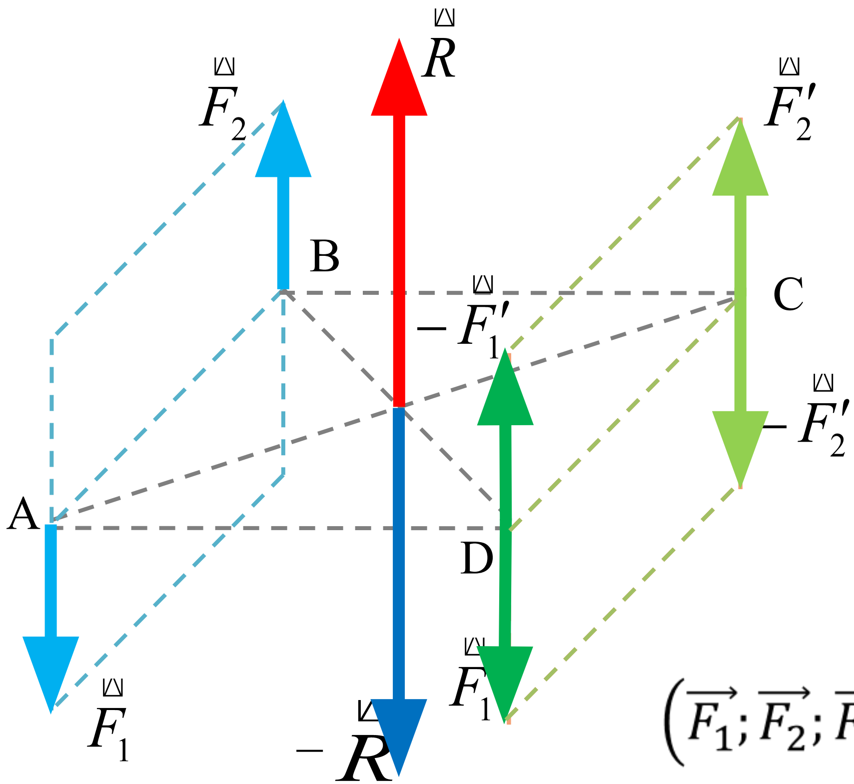
$(\vec{F};\ \vec{F}') \sim (\vec{Q};\ \vec{Q}')$

- Момент пары $(\vec{Q};\ \vec{Q}')$ равен $m' = d \cdot Q$
- Так как $\Delta ABC \sim \Delta ADK$ то $d = \frac{h \cdot AD}{AK}$, где $AD = F$, $AK = Q$

$$m' = d \cdot Q = \frac{h \cdot F}{Q} \cdot Q = h \cdot F = m$$

ТЕОРЕМЫ О ПАРАХ

2. Не нарушая состояния тела, пару сил можно переносить в параллельную плоскость.



Доказательство:

- Пусть дана пара сил $(\overrightarrow{F_1}; \overrightarrow{F_2})$
- Добавим уравновешенную систему сил:

$(\overrightarrow{F_1}; \overrightarrow{F_2}) \sim (\overrightarrow{F_1}; \overrightarrow{F_2}; \overrightarrow{F_1}'; \overrightarrow{F_2}'; -\overrightarrow{F_1}'; -\overrightarrow{F_2}$

- Заметим, что

$(\overleftarrow{F_2}; -\overleftarrow{F_1}') \sim \overleftarrow{R}, (\overleftarrow{F_1}; -\overleftarrow{F_2}') \sim -\overleftarrow{R}$

$(\overleftarrow{R}; -\overleftarrow{R}) \sim 0$

- Тогда

$\left(\overrightarrow{F_1}; \overrightarrow{F_2}; \overrightarrow{F_1}'; \overrightarrow{F_2}'; -\overrightarrow{F_1}'; -\overrightarrow{F_2}'\right) \sim \left(\vec R; \overrightarrow{-R}; \overrightarrow{F_1}'; \overrightarrow{F_2}'\right)$

$\sim (\overrightarrow{F_1}'; \overrightarrow{F_2}')$

- По построению $M(\overrightarrow{F_1}'; \overrightarrow{F_2}') = M(\overrightarrow{F_1}; \overrightarrow{F_2})$

СВОЙСТВА ПАР СИЛ

Не изменяя действия пары сил на тело, пару можно:

– переносить в плоскости ее действия в любое место и поворачивать;

– переносить в параллельную плоскость;

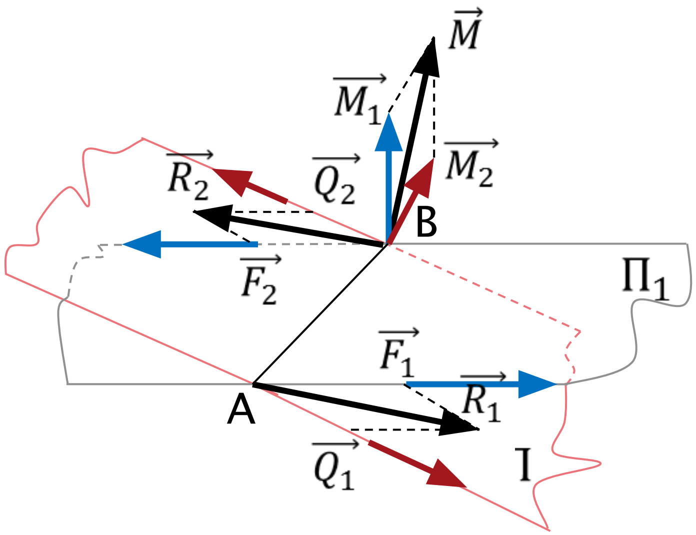
– транспонировать.

Момент пары сил – **свободный вектор!** – полностью определяет ее действие.

Эквивалентными являются пары сил, вектора моментов которых одинаковы.

ТЕОРЕМЫ О ПАРАХ

3. Две пары сил эквивалентны одной, момент которой равен сумме моментов исходных пар.



Доказательство:

Приведем пары сил, расположенные в пересекающихся плоскостях к одному плечу AB на линии пересечения плоскостей.

$(\vec{F_1}; \vec{Q_1}) \sim \vec{R_1}$, $(\vec{F_2}; \vec{Q_2}) \sim \vec{R_2}$.

В результате получаем пару сил $(\vec{R_2}, \vec{R_1})$ эквивалентную заменяемым.

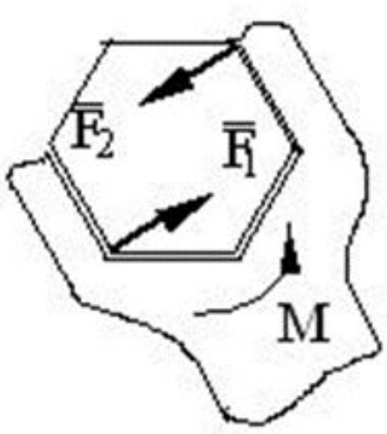
Вектор-момент этой пары сил определим через векторное произведение: $\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{R_2}$

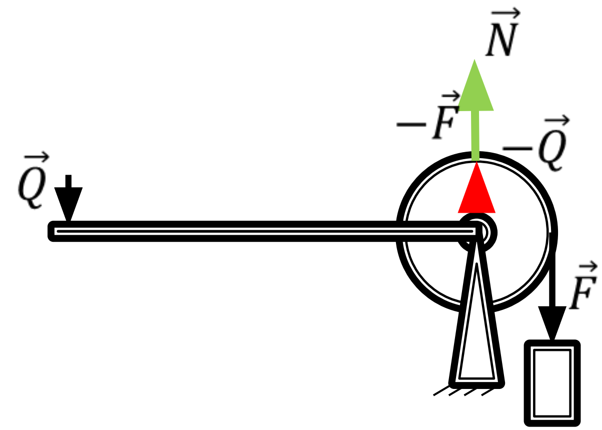
При $\vec{R_2} = \vec{F_2} + \vec{Q_2}$

$$\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{R_2} = \vec{AB} \times (\vec{F_2} + \vec{Q_2}) = \vec{AB} \times \vec{F_2} + \vec{AB} \times \vec{Q_2} = \vec{M_1} + \vec{M_1}$$

$$\boldsymbol{\vec{M} = \vec{M_1} + \vec{M_1}}$$

ПРИМЕРЫ ПАР СИЛ





$$\vec{\boldsymbol{N}} = -(\vec{\boldsymbol{Q}} + \vec{\boldsymbol{F}})$$

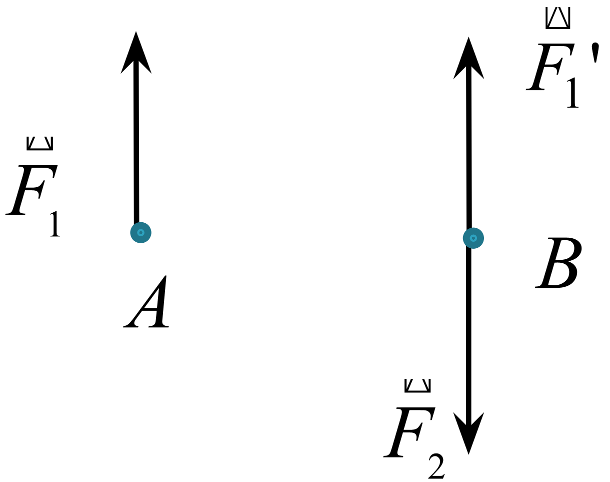
$$\vec{\boldsymbol{N}} = -\vec{\boldsymbol{Q}} - \vec{\boldsymbol{F}}$$

$$[(\vec{\boldsymbol{Q}}, -\vec{\boldsymbol{Q}}), (\vec{\boldsymbol{F}}, -\vec{\boldsymbol{F}})] \sim 0$$

ЛЕММА О ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ

Не нарушая равновесия тела силу можно переносить параллельным переносом, добавляя при этом пару сил, момент которой равен моменту исходной силы относительно новой точки приложения.

Доказательство



$$(\vec{F}_1) \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_1{}', \vec{F}_2) \sim (\vec{F}_1{}', (\vec{F}_1, \vec{F}_2))$$

$$\vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \vec{AB} \times \vec{F}_2 = \vec{BA} \times \vec{F}_1$$

$$\vec{M}_B(\vec{F}_1) = \vec{BA} \times \vec{F}_1$$

ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР И ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ

Главный вектор системы сил - вектор, равный геометрической сумме сил системы

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_k$$

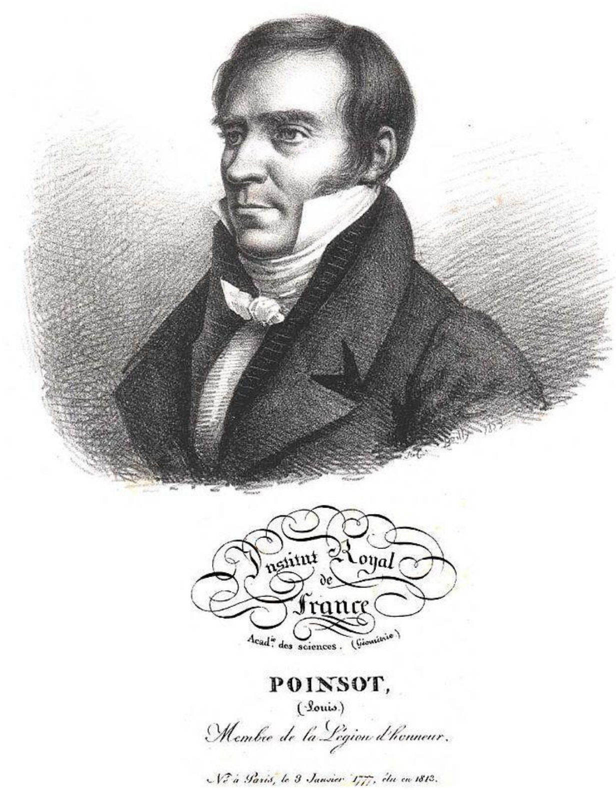
Главный момент системы сил относительно некоторой точки - вектор, равный геометрической сумме моментов сил системы относительно данной точки (центра)

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \dots + \vec{M}_O(\vec{F}_n) = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k)$$

ТЕОРЕМА ПУАНСО (ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА СТАТИКИ)

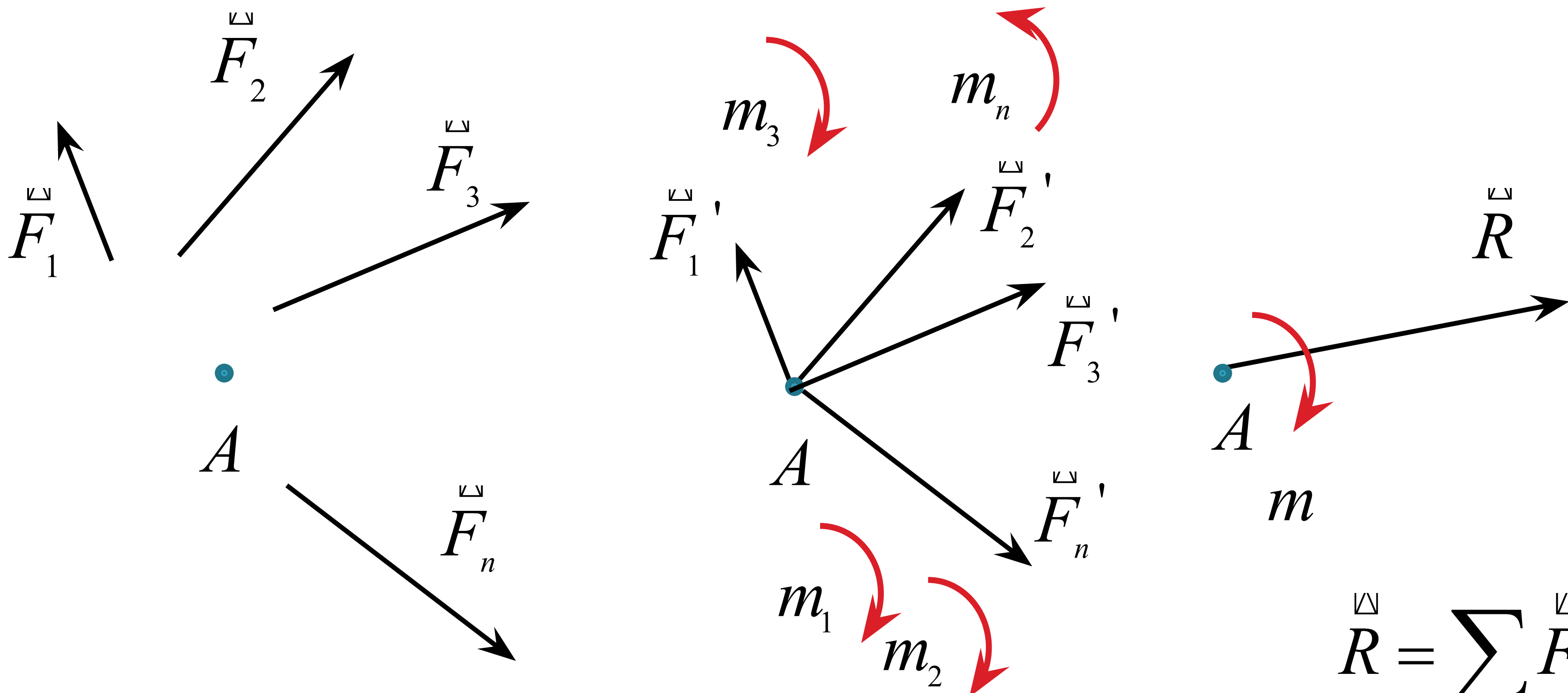
Произвольная система сил эквивалентна силе, равной главному вектору системы, и паре сил, момент которой равен главному моменту системы относительно точки приложения силы (центра приведения)

Луи́ Пуансо́ (1777-1859) — французский математик и механик, академик Парижской Академии наук (1813); пэр Франции (1846), сенатор (1852). Известен своими трудами в области геометрии и механики



ТЕОРЕМА ПУАНСО (ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА СТАТИКИ)

Произвольная система сил эквивалентна силе, равной главному вектору системы, и паре сил, момент которой равен главному моменту системы относительно точки приложения силы (центра приведения)



$$\vec{R} = \sum \vec{F}_k$$

$$\vec{m} = \sum \vec{m}_k = \sum \vec{M}_A(\vec{F}_k)$$