Конструктивные описания графов и их приложения

М.А.Иорданский
Нижний Новгород

Представления графов

Используется *конструктор* графов. Графы строятся из заданных исходных графов с помощью бинарной *операции склейки*. Вместе с каждым графом конструктор содержит его изоморфные копии.

Рассматриваются конечные, неориентированные графы, допускающие петли и кратные ребра.

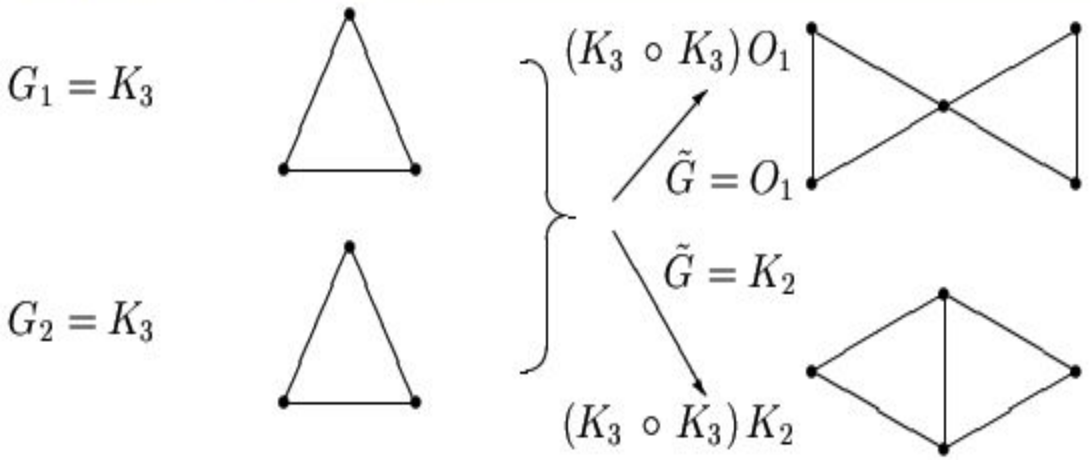
Обозначения: K_n - полный n - вершинный граф; C_n - простой цикл, содержащий n вершин; L_n - простая цепь, содержащая n вершин; O_n - пустой n - вершинный граф (O_o - нуль-граф).

Определение операций склейки

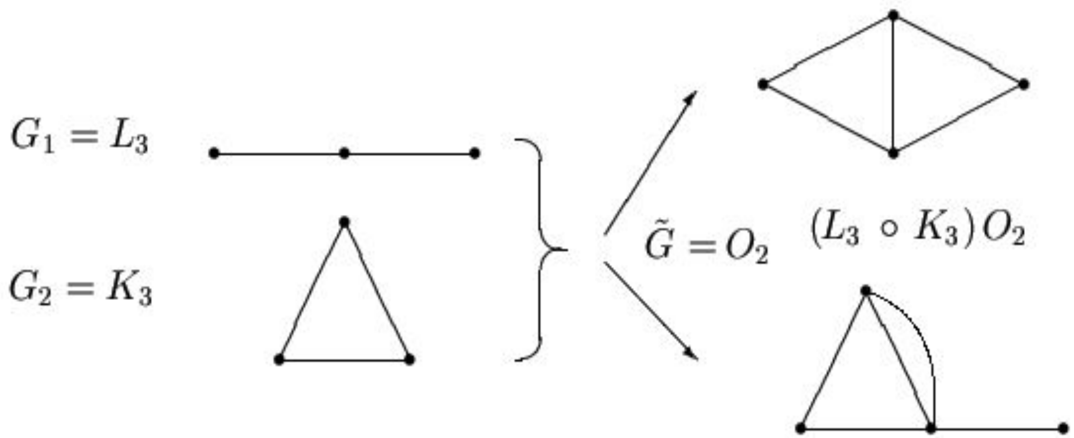
При выполнении бинарной операция склейки производится отождествление изоморфных подграфов $G_1' \subseteq G_1$ и $G_2' \subseteq G_2$ графов-операндов G_1 и G_2.

Для результирующих графов G используется обозначение $(G_1 \circ G_2)\tilde{G}$, где $\tilde{G}$ - граф, изоморфный отождествляемым подграфам G_1' и G_2', называемый *подграфом склейки*.

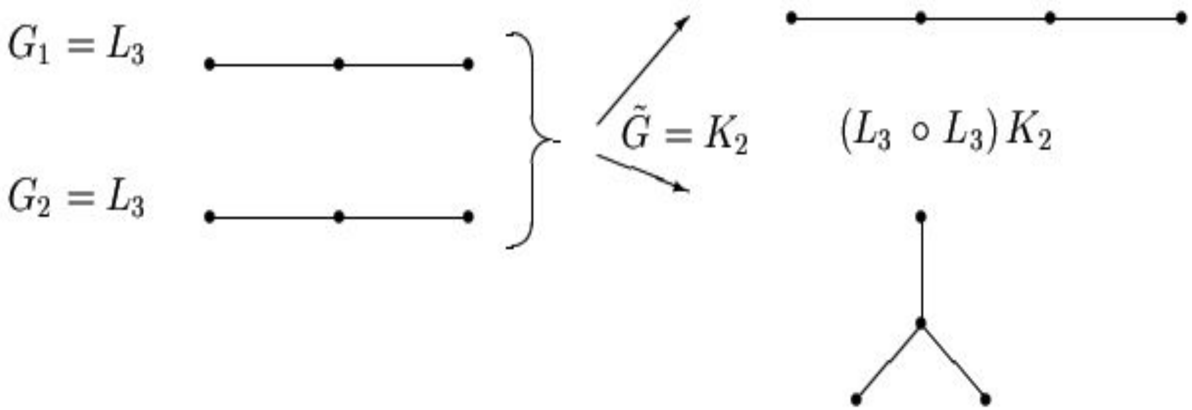
В общем случае операция склейки не является однозначной.



Результат операции склейки зависит от вида подграфа склейки $\tilde{G}$.



Результат операции склейки по подграфу $\tilde{G} = O_2$ зависит от выбора отождествляемых вершин в графах-операндах G_1 и G_2.



Результат операции склейки по подграфу $\tilde{G} = K_2$ при фиксированном выборе подграфов K_2 в графах-операндах зависит от способа их отождествления.

Суперпозиции графов

Пусть $\Im$ некоторое множество графов. Граф G называется *суперпозицией* графов из $\Im$, если $G \in \Im$ или G можно получить путем последовательного применения операций склейки к графам из $\Im$ и к графам, полученным из $\Im$ с помощью операций склейки.

Процесс построения графа G из графов множества $\Im$ задает *операцию суперпозиции* графов из $\Im$. Если в операции суперпозиции хотя бы один из графов-операндов каждой операции склейки принадлежит множеству $\Im$, то операция суперпозиции называется *канонической*.

Множество всех графов, полученных из $\Im$ с помощью операций суперпозиции, обозначается через $[\Im]$. Если $[\Im] = \Im$ то класс $\Im$ называется *замкнутым*.

Порождающие базисы

Подмножество графов $\Im' \subset \Im$ образует *полную систему* графов замкнутого класса $\Im$, если $[\Im'] = \Im$. Минимальная по включению полная система графов B_e называется *элементным базисом* замкнутого класса $\Im$.

Операции с изоморфными подграфами склейки $\tilde{G}$ относятся к одному *типу*. Множество, содержащее минимальное по включению число типов операций склейки, достаточное для построения из B_e всех графов замкнутого класса $\Im$ образует его *операционный базис* B_o. Операционный базис B_o задается множеством графов, изоморфных подграфам склейки $\tilde{G}$.

H-замкнутые классы графов

При выполнении операций склейки одни свойства графов-операндов могут сохраняться, а другие нет. Для наследования заданного характеристического свойства графов в общем случае могут потребоваться ограничения не только на порождающие базисы, но и на выбор отождествляемых подграфов в графах-операндах и сам способ отождествления (*внутренние ограничения*).

Кроме того, возможны ограничения на операции склейки, влияющие на порядок сборки графов, то есть на выбор операций суперпозиции (*внешние ограничения*). К внешним ограничениям можно отнести, например, требования, чтобы подграфы склейки были порожденными или чтобы их вершины образовывали в результирующих графах разделяющие множества (тупиковые или минимальные)и т.д. Внешние ограничения могут влиять на величину избыточности описания.

Системы внутренних и внешних ограничений обозначаются с использованием символа H и соответственно рассматриваются операции H-склейки, H-суперпозиции и H-замкнутые классы графов.

Порождающие базисы вместе с системой ограничений на операции H-склейки задают *конструктивное описание* H-замкнутого класса графов.

Структура и способы порождения *H* – замкнутых классов графов

Каждый *H*-замкнутый класс графов имеет единственный элементный базис и по крайней мере один операционный базис.

Существуют *H*-замкнутые классы графов со счетным элементным и(или) операционным базисами.

Мощность множества всех *H*-замкнутых классов графов континуальна.

Примеры конструктивных описаний

Конструктивное описание H-замкнутого класса $\Im$ задается тройкой $<H, B_e, B_o>$. К настоящему времени получены конструктивные описания для классов всех графов, мультиграфов, обыкновенных графов, триангулированных, планарных, двудольных, расщепляемых, эйлеровых, гамильтоновых, а также для графов с различными комбинациями указанных свойств.

Классы всех графов и мультиграфов

Результирующий граф любой операции склейки сохраняет такие свойства графов-операндов как отсутствие изолированных вершин, петель или ребер. Если все графы из элементного базиса B_e связны, то для получения несвязных графов в операционный базис B_o необходимо включение нуль-графа O_0.

Замкнутый класс всех графов имеет элементный базис $B_e = \{O_1, C_1, K_2\}$ и операционный базис $B_o = \{O_0, O_1, O_2\}$.

Замкнутый класс мультиграфов имеет элементный базис $B_e = \{O_1, K_2\}$ и операционный базис $B_o = \{O_0, O_2\}$.

Каждый граф может быть получен с помощью канонической суперпозиции.

Обыкновенные графы

Операция H-склейки сохраняет отсутствие кратных ребер, если каждой паре несмежных в $\tilde{G}$ вершин, соответствует пара несмежных вершин хотя бы в одном из графов-операндов G_1 и G_2 (операции $\prec H \succ$*-склейки*).

$\prec H \succ$-замкнутый класс простых графов имеет элементный базис $B_e = \{O_1, K_2\}$ и операционный базис $B_o = \{O_0, O_2\}$.

Отсутствие кратных ребер сохраняют также операции склейки, удовлетворяющие более сильному ограничению, когда отождествляемые подграфы являются порожденными (операции $< H >$*-склейки*),

$< H >$-замкнутый класс простых графов имеет счетные элементный и операционный базисы.

Триангулированные графы

Триангулированные графы не содержат циклов без хорд. Характеристическое свойство сохраняют операции H^t-склейки, в которых подграфы склейки $\tilde{G}$ являются полными.

Порождающие базисы H^t -замкнутого класса триангулированных графов

$B_e = \{O_1, K_2, K_3, \ldots\}, B_o = \{O_0, O_1, K_2, K_3, \ldots\}$

Планарные графы

Минимальной избыточностью обладают описания, с использованием операций H^p-склейки, в которых вершины отождествляемых подграфов принадлежат границе одной грани в плоских укладках графов-операндов и отождествление вершин производится при $|V(\tilde{G})| \geqslant 4$ в порядке кругового обхода граней.

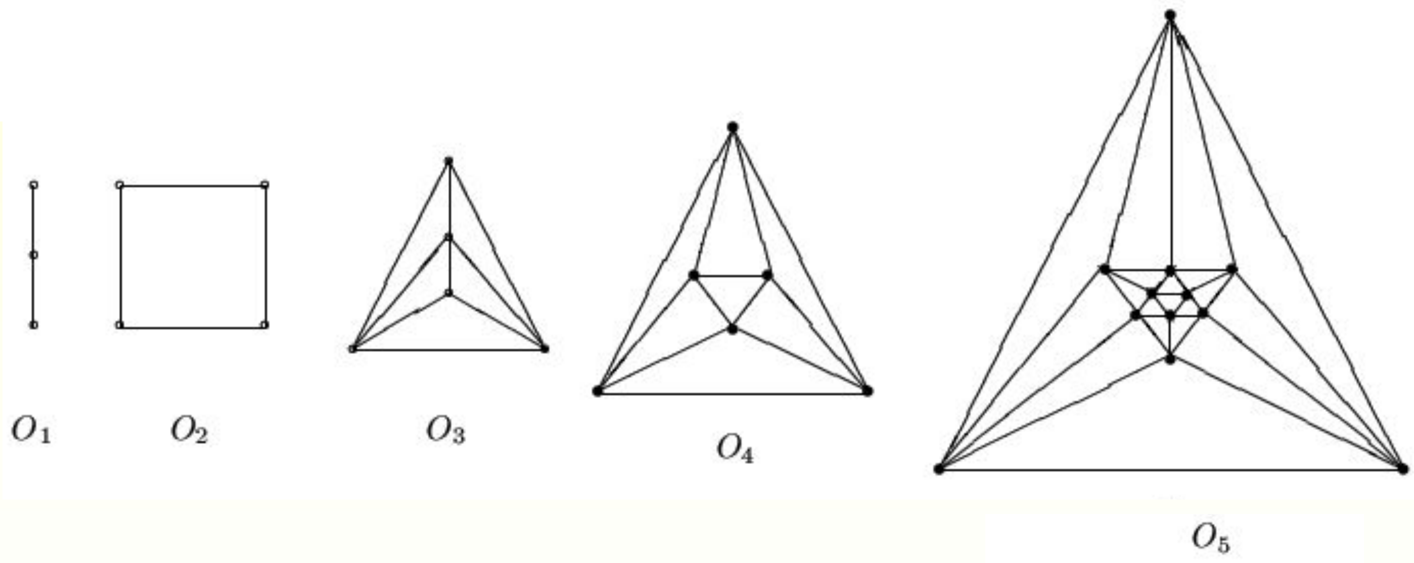
Порождающие базисы H^p-замкнутого класса планарных графов $B_e = \{O_1, C_1, K_2\}$ и $B_o = \{O_0, O_1, O_2\}$ совпадают с порождающими базисами замкнутого класса всех графов.

При наложении дополнительных внешних ограничений на операции H^p-склейки мощность и состав порождающих базисов может существенно изменяться.

Влияние внешних ограничений

Ограничимся классом обыкновенных связных планарных графов (операции $\prec H^p \succ$-склейки). Рассмотрим конструктивные описания при использо-

-$\prec H^p_s \succ$ - склейки, при выполнении которых множество $V(\tilde{G})$ является разделяющим в результирующем графе G;



Графы, при синтезе которых не обойтись без операций склейки по указанным подграфам

-$\prec H_v^p \succ$ - склейки, при выполнении которых разделяющее множество $V(\tilde{G})$ является минимальным в G:

$B_e = \{O_1, K_2, K_3, K_4\}$, $B_o = \{O_1, O_2, K_2, O_3, (K_1 \circ K_2)O_0, L_3, K_3, O_4, (O_2 \circ K_2)O_0, (O_1 \circ L_3)O_0, (K_2 \circ K_2)O_0, L_4, C_4, L_5, C_5\}^{3)}$

-$\prec H_{v,e}^p \succ$ - склейки,в которых при минимальности $|V(\tilde{G})|$ минимально и $|E(G)|$:

$B_e = \{O_1, K_2, K_3, K_4\}$,$B_o = \{O_1, O_2, K_2, O_3, (K_1 \circ K_2)O_0, L_3, K_3, O_4, (O_2 \circ K_2)O_0, (K_2 \circ K_2)O_0, (O_1 \circ L_3)O_0, L_4, C_4, O_5, (O_3 \circ K_2)O_0, ((K_2 \circ K_2)O_0 \circ O_1)O_0, (O_2 \circ L_3)O_0, (O_1 \circ L_4)O_0, (K_2 \circ L_3)O_0, L_5, C_5\}^{4)}$;

ограничения	$\prec H^p \succ$	$\prec H_s^p \succ$	$< H_v^p >$	$< H_{v,e}^p >$
порождающие базисы	$B_e = \{O_1, K_2\}$ $B_o = \{O_1, O_2\}$	$\lvert B_e\rvert = 4^{1)}$ $\lvert B_o\rvert = 5^{2)}$	$\lvert B_e\rvert = 4$ $\lvert B_o\rvert = 15^{3)}$	$\lvert B_e\rvert = 4$ $\lvert B_o\rvert = 21^{4)}$

Эйлеровы графы

Характеристическое свойство сохраняют операции, в которых подграфы склейки $\tilde{G}$ содержат вершины четной степени. Минимальной избыточностью обладает описание, когда $\tilde{G}$ является пустым подграфом (операции $H^{\emptyset}$-склейки).

Класс связных эйлеровых графов $H^{\emptyset}$-замкнут с порож-

Класс эйлеровых планарных графов имеет три конечных операционных базиса

$B_o^1 = \{O_1, O_2, O_3\}$, $B_o^2 = \{O_1, O_2, O_4\}$, $B_o^3 = \{O_1, O_2, O_5\}$

Это создает возможность для постановки задач оптимального синтеза графов.

Двудольные графы

Характеристическое свойство сохраняют операции H^b-склейки, в которых для каждой пары вершин из подграфа склейки $\tilde{G}$ соответствующие им вершины в графах-операндах G_1 и G_2 соединяются цепями с одинаковой четностью длин.

Порождающие базисы H^b-замкнутого класса двудольных графов $B_e = \{O_1, K_2\}$ и $B_o = \{O_0, O_2\}$.

Гамильтоновы графы

Характеристическое свойство сохраняют операции *H_g-склейки*, отождествляемые подграфы которых содержат все вершины хотя бы одного из графов-операндов либо по 2 смежные вершины их гамильтоновых циклов.

$\prec H_g \succ$ - ***замкнутый класс обыкновенных гамильтоновых графов имеет элементный базис*** $B_e = \{C_3, C_4, \ldots\}$***и один из трех операционных базисов*** $B_o^1 = \{L_2, C_4, C_5, \ldots\}$, $B_o^2 = \{L_3, L_4, \ldots\}$, $B_o^3 = \{L_2, (L_{n'} \circ L_{n''})O_0\}, n', n'' \geq 2$.

Избыточность конструктивных описаний

Операции склейки вносят избыточность в задание информации о графах, позволяя формулировать условия наследования различных характеристических свойств графов в виде ограничений на вид отождествляемых подграфов, их выбор в подграфах-операндах и способ отождествления.

Вершинная и реберная избыточность

Избыточность конструктивного описания можно разбить на две компоненты: вершинную и реберную. Вершинная избыточность оценивается по формуле

$$I_v^s(G) = \frac{\sum_{i=1}^{q} |V(\tilde{G}_i)|}{|V(G)|},$$

где q - число операций склейки в суперпозиции s, реализующей граф G, $\tilde{G}_i$-подграф склейки i-ой операции.

Для оценки реберной избыточности используется формула

$$I_e^s(G) = \frac{\sum_{i=1}^{q} |E(\tilde{G}_i)|}{|E(G)|}$$

Вершинная избыточность эйлеровых графов

Пусть $\Im_n$ множество n - вершинных обыкновенных эйлеровых графов; S - множество всех суперпозиций, реализующих произвольный граф $G \in \Im_n$. Определим функцию $I_v(\Im_n)$ шенноновского типа

$$\min_{s \in S} I_v^s(G) = I_v(G); \max_{G \in \Im_n} I_v(G) = I_v(\Im_n).$$

Теорема $I_v(\Im_n) = \frac{n-3}{2}$.

Для множества $\Im_n^p$ планарных n - вершинных обыкновенных эйлеровых графов справедливо

Следствие $I_v(\Im_n^p) = 2 - \frac{6}{n}$.

Реберная избыточность гамильтоновых планарных графов

Операции, сохраняющие гамильтоновость, планарность и отсутствие кратных ребер обозначаются как операции $\prec H_{gp} \succ$ - склейки.

Пусть $\Im_n$ множество n - вершинных гамильтоновых планарных графов; S множестве всех $\prec H_{gp} \succ$ - суперпозиций, реализующих граф $G \in \Im_n$. Определим функцию $I_e(\Im_n)$ шенноновского типа

$$\min_{s \in S} I_e^s(G) = I_e(G), \ \max_{G \in \Im_n} I_e(G) = I_e(\Im_n)$$

Теорема *При* $n \geqslant 3$

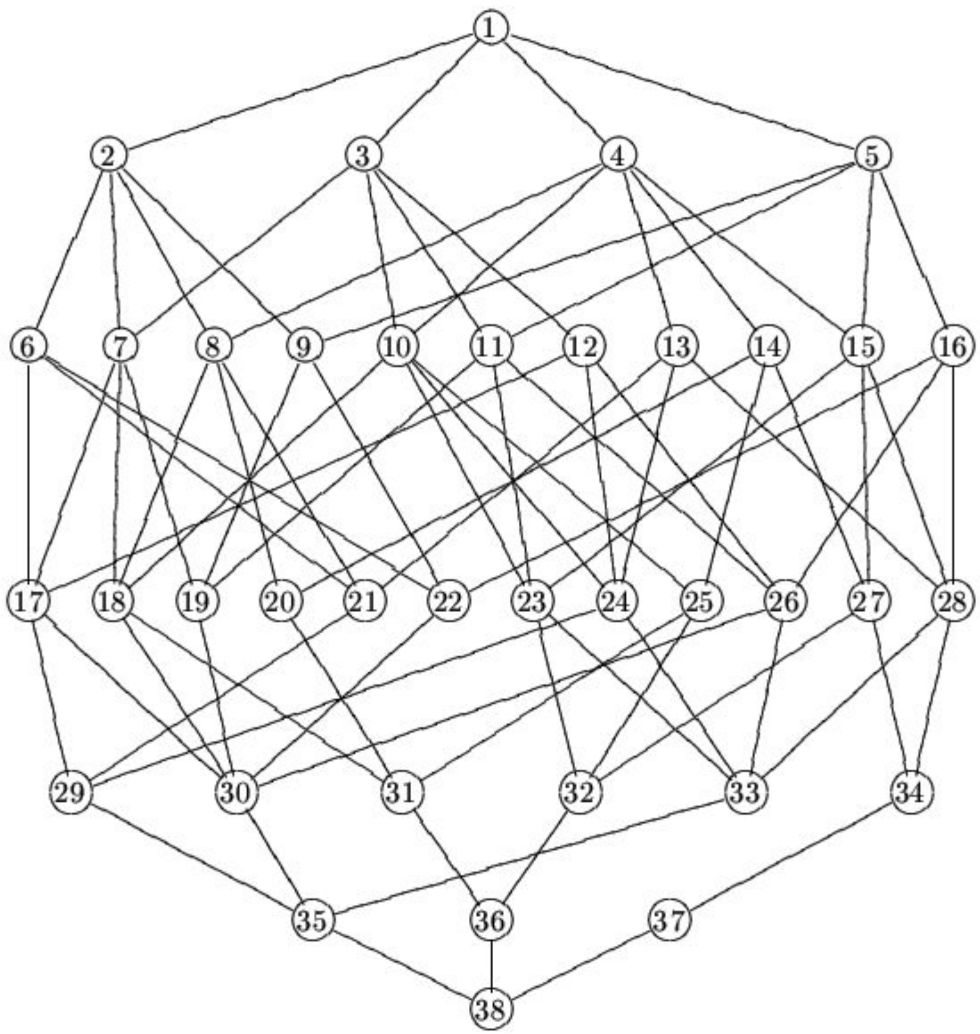
$$1 - \frac{1}{n-2} \leqslant I_e(\Im_n) \leqslant 1$$

Обратные задачи

Необходимо определить характеристические свойства графов по заданным порождающим базисам соответствующих замкнутых классов.

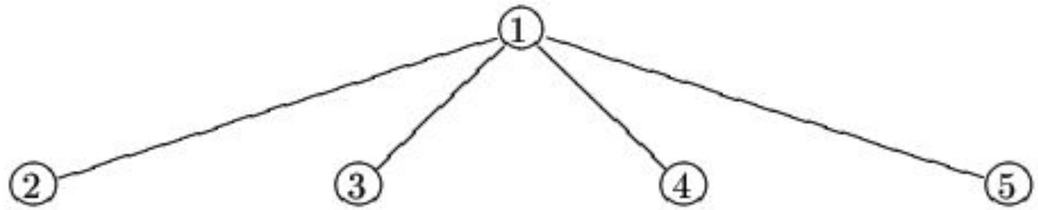
Для замкнутых классов графов вводится понятие *базисной предполноты*. Класс $\Im_1$ является базисно предполным в $\Im_2$ по элементному базису, если B_e класса $\Im_1$ не содержит одного из графов элементного базиса класса $\Im_2$ и при этом операционные базисы обоих классов совпадают. Аналогично, класс $\Im_1$ является предполным в $\Im_2$ по операционному базису, если B_o класса $\Im_1$ не содержит одного из графов операционного базиса класса $\Im_2$ и при этом элементные базисы обоих классов совпадают.

Была построена решетка всех базисно предполных замкнутых классов, порождаемых подмножествами элементного и операционного базисов замкнутого класса всех графов.



1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38

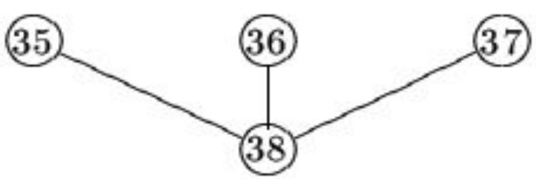
Верх решетки



1. $[O_1, C_1, K_2]\{O_0, O_1, O_2\}$ - все графы.
2. $[O_1, C_1, K_2]\{O_1, O_2\}$ - связные графы.
3. $[C_1, K_2]\{O_0, O_1, O_2\}$ - графы без изолированных вершин.
4. $[O_1, C_1, K_2]\{O_0, O_1\}$ - графы без циклов $C_n, n \geqslant 2$.
5. $[O_1, C_1, K_2]\{O_0, O_2\}$ - графы без "ромашек".

Низ решетки

35. $[K_2]\{K_2\}$ - ребро.
36. $[C_1]\{C_1\}$ - петля.
37. $[O_1]\{O_1\}$ - вершина.
38. $[O_0]$ - нуль-граф.



Конструктивные описания и характеристические свойства для классов связных графов

$B_e \setminus B_o$	O_1, O_2	O_2	O_1
O_1, C_1, K_2	Все связные графы	Граф C_1 или мультиграфы с $N \leq 2$	Графы без циклов C_n, $n \geq 2$
C_1, K_2	Графы с $M \geq 1$	Граф C_1 или мультиграфы с $N = 2$	Графы с $M \geq 1$ без циклов C_n, $n \geq 2$
O_1, K_2	Мультиграфы	Мультиграфы с $N \leq 2$	Деревья
K_2	Мультиграфы с $N \geq 2$	Мультиграфы с $N = 2$	Деревья с $N \geq 2$
O_1, C_1	—	—	Графы с $N = 1$
C_1	—	—	Графы с $N = 1$ и $M \geq 1$

Конструктивные описания и характеристические свойства для классов графов, допускающих различное число компонент связности

$B_e \setminus B_o$	O_0, O_1, O_2	O_0, O_2	O_0, O_1	O_0
O_1, C_1, K_2	Все графы	Нет графов с $N = 1$ и $M \geq 2$	Графы без циклов C_n, $n \geq 2$	Компоненты связности изоморфны $O_1 \vee C_1 \vee K_2$
C_1, K_2	Графы без изолированных вершин	Графы с совершенными паросочетаниями ребер [1]	Графы без изолированных вершин и циклов C_n, $n \geq 2$	Компоненты связности изоморфны $C_1 \vee K_2$
O_1, K_2	—	Мультиграфы	Леса	Компоненты связности изоморфны $O_1 \vee K_2$
K_2	Мультиграфы без изолированных вершин	Мультиграфы с совершенными паросочетаниями ребер	Леса без изолированных вершин	Компоненты связности изоморфны K_2

O_1, C_1	—	Графы с одновершинными компонентами связности		Компоненты связности изоморфны $O_1 \vee C_1$
C_1	—	Компоненты связности с $n = 1$ и $m \geq 1$ $M - N = 2k$, $k = 0, 1, \ldots$	Компоненты связности с $n = 1$ и $m \geq 1$	Компоненты связности изоморфны C_1
O_1	—	—	—	Пустые графы

Приложения конструктивных описаний

Использование конструктивных описаний для решения различных прикладных задач на графах основывается на выборе в качестве исходных (базисных) таких графов, для которых рассматриваемая задача допускает эффективное решение.

Необходимо также учитывать порядок сборки графа. При этом удобно пользоваться каноническими суперпозициями.

I. Экономное кодирование графов

Целью экономного кодирования графов является "сжатие"соответствующей информации, то есть сокращение длины кода графа.

Возьмем в качестве исходных графов полные r - вершинные графы, допускающие экономное кодирование перечислением своих вершин. Рассмотрим операции склейки по порожденным подграфам, содержащим по s вершин. Генерируемые при этом графы относятся к классу (r, s)- деревьев.При этом допустима каноническая суперпозиция.

Кодирование помеченных (r,s) - деревьев

Произвольное помеченное (r, s) - дерево, содержащее n вершин можно взаимно однозначно задать кодом длины

$$\frac{r(n-s)}{r-s}\lceil \log_2 n \rceil,$$

в котором в произвольном порядке последовательно записаны номера вершин всех его $(n-s)/(r-s)$ подграфов K_r. Число подграфов K_r на единицу больше числа операций склейки

$$\frac{n-s}{r-s} = 1 + \frac{n-r}{r-s}$$

Декодирование помеченных (r,s) - деревьев

Декодирование осуществляется путем замены очередных r чисел кода подграфом K_r с соответствующими номерами вершин. Затем эти подграфы склеиваются по общим вершинам.

Оценка длины кода помеченного (r,s) - дерева

Число ребер в n -вершинном (r, s) -дереве равно числу ребер во всех подграфах K_r, использовавшихся при его построении, уменьшенному на число отождествлений ребер, равное произведению числа операций склейки $(n - r)/(r - s)$ на $s(s - 1)/2$ - число ребер, отождествляемых при выполнении каждой операции

$$m = \frac{(n-s)}{r-s}\frac{r(r-1)}{2} - \frac{(n-r)}{r-s}\frac{s(s-1)}{2} = \frac{n(r+s-1)-sr}{2} \geqslant \frac{(n-s)r}{2}$$

При $r - s \geqslant 2$ длина кода не превосходит $m\lceil \log_2 n \rceil$.

Кодирование непомеченных (r,s) - деревьев

Произведем разборку произвольного непомеченного (r, s) - дерева, в порядке обратном к порядку его сборки при некоторой канонической суперпозиции над графами K_r.

Занумеруем последовательно удаляемые при этом группы из $r - s$ вершин степени $r - 1$. Порядок нумерации последних r вершин произволен.

Для каждой удаляемой группы из $r - s$ вершин в код заносятся номера s смежных с ними вершин. При этом получаем код длины

$$\frac{s(n-r)}{r-s}\lceil \log_2 n \rceil.$$

Декодирование непомеченных (r,s) - деревьев

Декодирование осуществляется выделением вершин подграфов K_r путем разбиения кода на сегменты, содержащие по s номеров, к которым добавляются очередные $r - s$ номеров из массива номеров всех вершин. К выделенным подграфам K_r добавляется подграф K_r, вершины которого нумеруются последними r номерами. Затем эти подграфы склеиваются по общим вершинам.

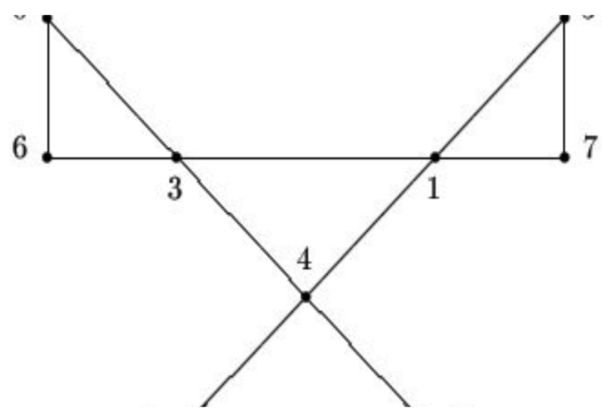
Оценка длины кода непомеченного (r,s) - дерева

Код непомеченного (r, s) - дерева на $n\lceil\log_2 n\rceil$ бит экономнее кода помеченного (r, s) - дерева.

Таким образом, при $r - s \geqslant 2$ длина кода непомеченного (r, s) - дерева не превосходит $(m - n)\lceil\log_2 n\rceil$.

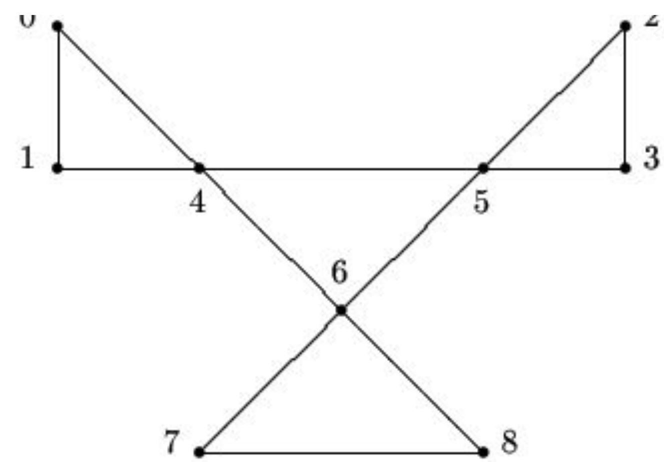
Примеры кодирования помеченного и непомеченного (3,1)- дерева с 9 вершинами

Случайная нумерация



Возможный код
248157036314

Нумерация в порядке обратная к порядку сборки



Однозначный код
456

Кодирование помеченных s - деревьев

s - деревьями называются (r, s) - деревья при $r - s = 1$. Произвольному помеченному s - дереву, содержащему n вершин можно взаимно однозначно сопоставить код длины

$$s(n - s - 1)\lceil \log_2 n \rceil.$$

Код составляется из номеров вершин, смежных с вершинами степени s. При этом вершины степени s последовательно удаляются из графа в порядке возрастания их номеров до тех пор пока в графе не останется подграф K_{s+1}.

Декодирование помеченных s - деревьев

Декодирование осуществляется выделением вершин подграфов K_{s+1} путем разбиения кода на сегменты, содержащие по s номеров, к каждому из которых добавляется минимальный номер из массива номеров всех вершин, которого нет в текущем (исходном) коде. При этом номер найденной вершины и номера вершин очередного сегмента удаляются. После получения пустого кода к выделенным подграфам K_{s+1} добавляется подграф K_{s+1}, вершины которого соответствуют оставшимся номерам в массиве номеров всех вершин. Затем подграфы K_{s+1} склеиваются по общим вершинам.

Кодирование непомеченных s - деревьев

Произведем разборку произвольного непомеченного s - дерева, в порядке обратном к порядку его сборки при некоторой канонической суперпозиции над графами K_{s+1}.

Занумеруем последовательно удаляемые при этом вершин степени s. Порядок нумерации последних $s+1$ вершин произволен.Код составляется из номеров вершин, смежных с удаляемыми вершинами степени s.

Длина кода при этом такая же как и для непомеченного s - дерева

$$s(n-s-1)\lceil \log_2 n \rceil.$$

Декодирование непомеченных s - деревьев

Декодирование осуществляется выделением вершин подграфов K_{s+1} путем разбиения кода на сегменты, содержащие по s номеров, к каждому из которых добавляется первый (минимальный) номер из текущего (исходного) массива номеров всех вершин. При этом минимальный номер и номера вершин очередного сегмента удаляются из соответствующих массивов. После получения пустого кода к выделенным подграфам K_{s+1} добавляется подграф K_{s+1}, вершины которого соответствуют последним $s+1$ номерам в массиве номеров всех вершин. Затем подграфы K_{s+1} склеиваются по общим вершинам.

Таким образом, использование специальных нумераций вершин s - деревьев, не сокращая длины кода, позволяет сократить трудоемкость алгоритма декодирования с $O(n^2)$ до $O(n)$

II. Оптимальные нумерации вершин

Пусть $G(V, E)$ граф, содержащий n вершин; $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $a_i < a_{i+1}, i = 1, 2, \ldots, n-1$ - множество из n натуральных чисел. Взаимнооднозначное отображение $\varphi : V(G) \to A$ называется *нумерацией вершин* графа G (нумерацией графа), а множество A - *нумерующей последовательностью* графа G. Рассматривается функционал

$$\Delta^{\varphi} G = \sum_{(v_i, v_j) \in E} | \varphi(v_i) - \varphi(v_j) |,$$

где суммирование производится по всем ребрам графа G. Любая нумерация, на которой достигается $\min_{\varphi} \Delta^{\varphi} G = \Delta G$, называется *минимальной нумерацией* графа G. При решении задачи построения минимальной нумерации достаточно ограничиться рассмотрением связных графов G, поскольку в противном случае задача распадается на несколько независимых подзадач. Из вида минимизируемого функционала следует, что, не ограничивая общности рассмотрения, можно полагать, что нумерующая последовательность содержит n первых натуральных чисел, т.е. $A = 1, 2, ..., n$. При этом ΔG не больше, чем при выборе любой другой нумерующей последовательности.

Свойства минимальных нумераций вершин деревьев

Для решения задачи построения минимальной нумерации вершин деревьев в качестве исходных графов конструктивных описаний удобно взять множество цепей. Минимальные нумерации цепей являются монотонными.

Из множества цепей с помощью операций склейки по O_1 строится любое дерево. Для сокращения числа склеек отождествляемая вершина хотя бы в одном графе-операнде должна иметь четную степень. При этом допустима каноническая суперпозиция.

Если φ минимальная нумерация дерева $t(V, E)$, то его можно разложить на последовательность пореберно непересекающихся цепей $\sigma_j(V_j, E_j)$, $j = 1, \ldots, l$, таких, что:

1) концевые вершины цепей являются висячими в тех поддеревьях, в которых они выделяются;

2) нумерация каждой цепи монотонна, а нумерующие последовательности всех поддеревьев, образующихся в процессе разложения, сплошные.

Выбор суперпозиций

Для построения минимальной нумерации необходимо найти соответствующее разложение дерева на пореберно непересекающиеся цепи. Рекурсивный алгоритм выделения цепей имеет трудоемкость $O(n^{\log_2 3})$. Реализуемые при этом суперпозиции в общем случае не являются каноническими.

Рассматривалось решение задачи построения минимальной нумерации в классе канонических суперпозиций. Соответствующие линейные укладки допускают геометрическую реализацию деревьев в полуплоскости. Генерируемые при этом нумерации вершин называются *плоскими*.

Плоская нумерация дерева $t(V, E)$ является минимальной тогда и только тогда, когда цепи $\sigma_j(V_j, E_j), j = 1, \ldots, l$ проходят через вершины дерева по веткам, содержащим наибольшее число вершин.

Алгоритм построения минимальной плоской нумерации

1. Выбрать в текущем поддереве разложения (исходном дереве) произвольную вершину дерева v_0.

2. Перейти от вершины v_0 по веткам с наибольшим числом вершин в некоторую висячую вершину v_1.

3. Начиная от вершины v_1, построить по веткам с наибольшим числом вершин цепь в некоторую другую висячую вершину v_2.

4. Присвоить вершинам v_1 и v_2 наибольшие и наименьшие номера из диапазона, выделенного под текущее поддерево разложения (1 и n для исходного дерева).

5. Занумеровать монотонно цепь, соединяющую вершины v_1 и v_2, оставляя под каждое выделяемое поддерево разложения соответствующие диапазоны номеров.

Процедура повторяется до тех пор, пока не будут занумерованы все вершины.

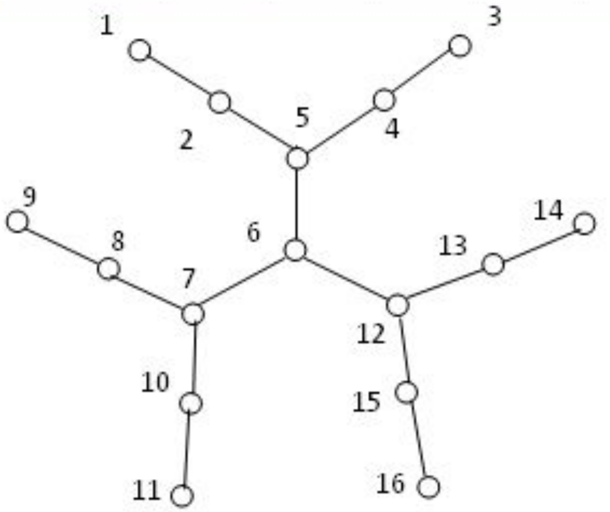
Эффективность алгоритма

Для реализации алгоритма необходимо вычислить веса веток ко всем вершинам дерева и упорядочить их. Для произвольного n-вершинного дерева это можно сделать с трудоемкостью $O(n \log n)$.

Для деревьев с $n \leqslant 15$ минимум в классе плоских нумераций совпадает с минимумом в классе всех нумераций. Для больших значений минимальные плоские нумерации можно использовать в качестве приближенного решения задачи построения минимальной нумерации.

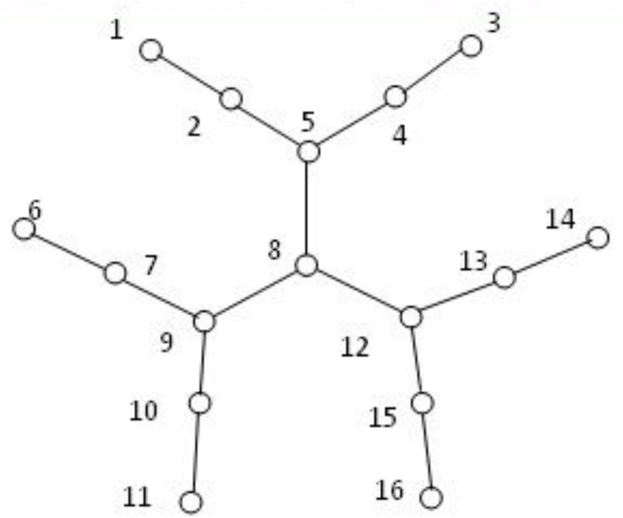
Минимум в классе плоских нумераций превосходит глобальный минимум не более чем в 1,5 раза. Эта оценка асимптотически не улучшаема на множестве всех деревьев.

Пример минимальной и минимальной плоской нумераций



минимальная плоская нумерация φ

$\Delta^{\varphi}t(V,E)=26$



минимальная нумерация φ

$\Delta^{\varphi}t(V,E)=25$

Литература

[1] Иорданский М.А. Конструктивные описания графов // Дискретный анализ и исследование операций. — 1996. — Т. 3, №4. — С. 35–63.

[2] Иорданский М.А. Функциональный подход к представлению графов // Доклады РАН. — 1997. — Т. 353, №3. — С. 303-305.

[3] Иорданский М.А.Сложность конструктивных описаний планарных графов // Материалы IX Межгосударственной школы-семинара "Синтез и сложность управляющих систем"(Нижний Новгород, 16-19 декабря 1998г.). - М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1999. — С.20–24.

[4] Иорданский М.А. Конструктивные описания и экономное кодирование графов // Вестник Нижегородского государственного университета. Математическое моделирование и оптимальное управление. — 2000. — Вып. 1(22). — С. 88–93.

[5] Иорданский М.А. Оптимальные нумерации вершин графов // Математические вопросы кибернетики. — 2001. — Вып. 10. — С. 83–102.

[6] Иорданский М.А. Структура и способы порождения замкнутых классов графов // Дискретная математика. — 2003. — Т. 15, вып. 3. — С. 105–116.

[7] Иорданский М.А. Базисы планарных графов // Труды V Международной конференции "Дискретные модели в теории управляющих систем"(Ратмино, 26-29 мая 2003г.) — М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им.М.В.Ломоносова, 2003. — С.36–38.

[8] Бурков Е.В. Операционные базисы замкнутых классов графов // Материалы IX международного семинара "Дискретная математика и её приложения", Москва, 18-23 июня 2007г. - М.: Изд-во мехмата МГУ. — 2007. — С. 105–116.

[9] Иорданский М.А. Конструктивные описания двудольных графов // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XV Международной конференции (Казань,2-7 июня 2008г.). - Казань: Изд-во "Отечество". — 2008. — С. 44.

[10] Иорданский М.А. Конструктивные описания расщепляемых графов // Материалы X Международного семинара "Дискретная математика и её приложения"(Москва, МГУ, 1-6 февраля 2010 г.) - М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ.— 2010. — С. 306–308.

[11] Бурков Е.В. Конструктивные описания планарных и эйлеровых графов //Вестник Нижегородского государственного университета. Математика.— 2010. — № 5(1). — С. 165–170.

[12] Иорданский М.А. Функциональные построения в теории графов // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVI Международной конференции(Нижний Новгород, 20-25 июня 2011 г.)/ Под ред. Ю.И.Журавлева. - Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2011.— С. 183–187.

[13] Иорданский М.А. Конструктивные описания гамильтоновых графов //Вестник Нижегородского государственного университета. Математика.— 2012. — № 3(1). — С. 137–140.

[14] Иорданский М.А. Конструктивная классификация графов //Моделирование и анализ информационных смистем.— 2012. — Т. 19, № 4. — С. 144-153.

[15] Иорданский М.А. Избыточность конструктивных описаний гамильтоновых графов // Материалы XI Международного семинара "Дискретная математика и её приложения"(Москва, МГУ, 18-22 июня 2012г.)- М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2012. — С. 285–288.

[16] Иорданский М.А. Избыточность конструктивных описаний эйлеровых графов // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XVII Международной конференции (Казань,16-20 июня 2014г.). - Казань: Изд-во "Отечество". — 2014. — С. 115-116.

Благодарю за внимание