ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

План:

Вопрос 1. Основные категории математической логики.

Вопрос 2. Алгебра высказываний.

Вопрос 3. Логические операции (действия над высказываниями).

Вопрос 4. Логические выражения и таблицы истинности.

Вопрос 5. Логические законы и правила преобразования логических выражений.

Вопрос 1.

Основные категории математической логики

Понятие «логика»

- **Логика** – это наука о формах, приемах и законах мышления.
- **Мышление**, или рациональное (по средством разума, а не чувств) отражение действительности, по своей природе есть процесс, связанный с абстрагированием.
- **Мышление** всегда происходит посредством **языка**, а слова языка суть **абстракции**.
- **Мышление имеет содержание и формы:**
- Основной характеристикой **содержания мышления** является истинность мысли, или адекватность мысли отражаемому предмету.
- **Формы мышления** – это способы, в которых осуществляется отражение.

Понятие «логика»

- **Законы логики** отражают в сознании человека свойства, связи и отношения объектов окружающего мира.
- **Логика** позволяет строить формальные модели окружающего мира, отвлекаясь от содержательной стороны.
- **Мышление** всегда осуществляется в каких-то формах.
- Основными формами мышления являются **понятие**, **высказывание** и **умозаключение**.

Понятие

- **Понятие** – это форма мышления, фиксирующая основные, существенные признаки объекта.
- Понятие имеет две стороны: **содержание** и **объем**.
- **Содержание понятия** - это та совокупность отличительных признаков, на основании которой предметы выделяются и обобщаются в одну группу.
- **Объем понятия** - это совокупность всех предметов, которые обладают отличительными признаками.

Высказывание

- **Высказывание** – это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о свойствах реальных предметов и отношений между ними.
- Высказывание может быть либо **истинно**, либо **ложно**.

Умозаключение

- **Умозаключение** – это форма мышления, с помощью которой из одного или нескольких суждений (посылок) может быть получено новое суждение (заключение).
- Умозаключения позволяют на основе известных фактов, выраженных в форме суждений (высказываний), получать заключение, т.е. новое знание.
- Примером умозаключений могут быть геометрические доказательство.
- Например: исходя из суждения «Все углы треугольника равны», путем умозаключения можем доказать, что треугольник равносторонний.

Вопрос 2.
Алгебра высказываний

- **Алгебра высказываний** была разработана для того, чтобы можно было определить истинность или ложность составленных высказываний, не вникая в их содержание.
- В алгебре высказываний суждений ставятся в соответствие **логические переменные**, обозначаемые буквами латинского алфавита.
- Истинное высказывание обозначается **1**
- Ложное высказывание обозначается **0**

- В алгебре высказываний над высказываниями можно производить определенные логические операции, в результате которых получаются новые, составные высказывания.
- Для образования новых высказываний наиболее часто используются базовые логические операции, выражаемые с помощью логических связок «и», «или», «не».

Вопрос 3.
Логические операции
(действия над высказываниями)

Существует три базовых логических операции:

- Логическое отрицание или **инверсия**;
- **конъюнкция** или логическое умножение высказываний;
- **дизъюнкция** или логическое сложение высказываний.

Логическое отрицание или инверсия

- Данной операции соответствует логическая связка НЕ и символ ¬
- Отрицанием высказывания а называется высказывание ¬а («не а»), которое ложно, если истинно, и истинно – если ложно:

a	$\neg a$
1	0
0	1

Конъюнкция или логическое умножение высказываний

- Данной операции соответствует логическая связка «И» и символ **&** либо **^**.
- Конъюнкцией высказываний a и b называют высказывание **a & b**, которое истинно в том и только том случае, когда **истинны оба высказывания a и b:**

a	b	$a \& b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Дизъюнкция или логическое сложение высказываний

- Этой операции соответствует логическая связка **«ИЛИ»** и символ **v.**
- Дизъюнкцией высказываний a и b называют высказывание a v b, которое ложно в том и только в том случае, когда ложны оба высказывания a и b:

a	b	$a \vee b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Вопрос 4.

Логические выражения и таблицы истинности

Импликация и логическое следствие

- Импликацией высказываний a (посылка) и b (следствие) называют высказывание **a → b**, которое ложно в единственном случае – когда **a** истинно, а **b** – ложно:

a	b	$a \to b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- **из истины может следовать только истина и не может следовать ложь!**

Эквиваленция

- Эквиваленция обозначается значком ↔ и читается *«тогда и только тогда»*
- Эквиваленцией высказываний **a** и b называют высказывание **a** ↔ **b** , которое истинно в том и только том случае, когда высказывания **a** и **b** истинны или ложны одновременно:

a	b	$a \leftrightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Логические выражения

- Каждое составное высказывание можно выразить в виде формулы (логического выражения), в которую входят *логические переменные*, обозначающие высказывание, и *знаки логических операций*, обозначающие логические функции.
- Для записи составного высказывания в виде логического выражения на формальном языке (язык алгебры высказываний) в составном высказывании нужно выделить простые высказывания и логические связи между ними.

Пример

- (2*2=5 или 2*2 = 4) и (2*2≠ 5 или 2*2 ≠4)
- Они содержат два простых высказывания:

A= 2*2=5 – ложно (0)

B = 2*2=4 – истинно (1)

- Тогда составное высказывание можно записать в следующей форме:

(A или B) и (¬A или ¬B)

- Теперь необходимо записать высказывание в форме логического выражения с учетом последовательности выполнения логических операций: инверсия, конъюнкция, дизъюнкция.

F=(A v B) & (¬A v ¬B)

F=(A v B) & (¬A v ¬B) = (0 V1) & (1 v 0) = 1 & 1= 1

Таблицы истинности

A	B	$A \vee B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$	$(A \vee B) \& (\overline{A} \vee \overline{B})$
0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Таблицы истинности

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}\&\overline{B}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

Таблицы истинности

A	B	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

$$\overline{A} \& \overline{B} = \overline{A \vee B}$$

Вопрос 5.

Логические законы и правила преобразования логических выражений

- **Закон тождества**. Всякое высказывание тождественно самому себе: **A = A**
- **Закон непротиворечия.** Высказывание не может быть одновременно истинным и ложным. Если высказывание *A* истинно, то его отрицание *не A* должно быть ложным. Следовательно, логическое произведение высказывания и его отрицания должно быть ложно: $A \,\&\, \overline{A} = 0$
- Закон исключенного третьего. Высказывание может быть либо истинным, либо ложным, третьего не дано. Это означает, что результат логического сложения высказывания и его отрицание всегда принимает значение «истина»: $A \vee \overline{A} = 1$
- Закон двойного отрицания. Если дважды отрицать некоторое высказывание, то в результате мы получим исходное высказывание: $\overline{\overline{A}} = A$

- Законы де Моргана. $\overline{A \vee B} = \overline{A} \,\&\, \overline{B}$
  $\overline{A \,\&\, B} = \overline{A} \vee \overline{B}$
- Закон коммуникативности. В алгебре высказываний можно менять местами логические переменные при операциях логического умножения и логического сложения:

Логическое умножение	Логическое сложение
$A \,\&\, B = B \,\&\, A$	$A \vee B = A \vee B$

- Закон ассоциативности. Если в логическом выражении используются только операция логического умножения или только операция логического сложения, то можно пренебрегать скобками или произвольно их расставлять:

Логическое умножение	Логическое сложение
$(A \,\&\, B) \,\&\, C = A \,\&\, (B \,\&\, C)$	$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$

- Закон дистрибутивности. В алгебре высказываний можно выносить за скобки как общие множители, так и общие слагаемые:

Дистрибутивность умножения относительно сложения	Дистрибутивность сложения относительно умножения
$ab + ac = a(b+c)$ — в алгебре $(A \& B) \vee (A \& C) = A \& (B \vee C)$	$(A \vee B) \& (A \vee C) = A \vee (B \& C)$

Символ	*Название символа, смысл*	*Как следует читать*
$\neg$	Отрицание	$\neg p$ не p
$\Rightarrow$	Импликация (логическое следствие)	$p \Rightarrow q$ если p, то q
$\Leftrightarrow$	Эквивалентность	$p \Leftrightarrow q$ p тогда и только тогда, когда q
$\wedge$	Конъюнкция (логическое произведение)	$p \wedge q$ p и q
$\vee$	Дизъюнкция (логическая сумма)	$p \vee q$ p или q