

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ --- ЛОГИКИ

План:

Вопрос 1. Основные категории математической логики.

Вопрос 2. Алгебра высказываний.

Вопрос 3. Логические операции (действия над высказываниями).

Вопрос 4. Логические выражения и таблицы истинности.

Вопрос 5. Логические законы и правила преобразования логических выражений.

Вопрос 1.

Основные категории математической логики

Понятие «логика»

- **Логика** – это наука о формах, приемах и законах мышления.
- **Мышление**, или рациональное (по средством разума, а не чувств) отражение действительности, по своей природе есть процесс, связанный с абстрагированием.
- **Мышление** всегда происходит посредством **языка**, а слова языка суть **абстракции**.
- **Мышление имеет содержание и формы:**
 - Основной характеристикой **содержания мышления** является истинность мысли, или адекватность мысли отражаемому предмету.
- **Формы мышления** – это способы, в которых осуществляется отражение.

Понятие «логика»

- **Законы логики** отражают в сознании человека свойства, связи и отношения объектов окружающего мира.
- **Логика** позволяет строить формальные модели окружающего мира, отвлекаясь от содержательной стороны.
- **Мышление** всегда осуществляется в каких-то формах.
- Основными формами мышления являются **понятие**, **высказывание** и **умозаключение**.

Понятие

- **Понятие** – это форма мышления, фиксирующая основные, существенные признаки объекта.
- Понятие имеет две стороны: **содержание** и **объем**.
- **Содержание понятия** - это та совокупность отличительных признаков, на основании которой предметы выделяются и обобщаются в одну группу.
- **Объем понятия** - это совокупность всех предметов, которые обладают отличительными признаками.

Высказывание

- **Высказывание** – это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о свойствах реальных предметов и отношений между ними.
- Высказывание может быть либо **ИСТИННО**, либо **ЛОЖНО**.

Умозаключение

- **Умозаключение** – это форма мышления, с помощью которой из одного или нескольких суждений (посылок) может быть получено новое суждение (заключение).
- Умозаключения позволяют на основе известных фактов, выраженных в форме суждений (высказываний), получать заключение, т.е. новое знание.
- Примером умозаключений могут быть геометрические доказательства.
- Например: исходя из суждения «Все углы треугольника равны», путем умозаключения можем доказать, что треугольник равносторонний.

Вопрос 2.

Алгебра высказываний

- **Алгебра высказываний** была разработана для того, чтобы можно было определить истинность или ложность составленных высказываний, не вникая в их содержание.
- В алгебре высказываний суждений ставятся в соответствие **логические переменные**, обозначаемые буквами латинского алфавита.
- Истинное высказывание обозначается **1**
- Ложное высказывание обозначается **0**

- В алгебре высказываний над высказываниями можно производить определенные логические операции, в результате которых получаются новые, составные высказывания.
- Для образования новых высказываний наиболее часто используются базовые логические операции, выражаемые с помощью логических связок «и», «или», «не».

Вопрос 3.

**Логические операции
(действия над высказываниями)**

Существует три базовых логических операции:

- Логическое отрицание или **инверсия**;
- **конъюнкция** или логическое умножение высказываний;
- **дизъюнкция** или логическое сложение высказываний.

Логическое отрицание или инверсия

- Данной операции соответствует логическая связка НЕ и символ \neg
- Отрицанием высказывания a называется высказывание $\neg a$ («не a »), которое ложно, если истинно, и истинно – если ложно:

a	$\neg a$
1	0
0	1

Конъюнкция или логическое умножение высказываний

- Данной операции соответствует логическая связка «И» и символ **&** либо **^**.
- Конъюнкцией высказываний **a** и **b** называют высказывание **a & b**, которое истинно в том и только том случае, когда **истинны оба высказывания a и b**:

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a & b</i>
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Дизъюнкция или логическое сложение высказываний

- Этой операции соответствует логическая связка «ИЛИ» и символ \vee .
- Дизъюнкцией высказываний a и b называют высказывание $a \vee b$, которое ложно в том и только в том случае, когда ложны оба высказывания a и b :

a	b	$a \vee b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Вопрос 4.

**Логические выражения и
таблицы истинности**

Импликация и логическое следствие

- Импликацией высказываний a (посылка) и b (следствие) называют высказывание $a \rightarrow b$, которое ложно в единственном случае – когда a истинно, а b – ложно:

a	b	$a \rightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- **ИЗ ИСТИНЫ МОЖЕТ СЛЕДОВАТЬ ТОЛЬКО ИСТИНА И НЕ МОЖЕТ СЛЕДОВАТЬ ЛОЖЬ!**

Эквиваленция

- Эквиваленция обозначается значком \leftrightarrow и читается «*тогда и только тогда*»
- Эквиваленцией высказываний **a** и **b** называют высказывание **a** \leftrightarrow **b**, которое истинно в том и только том случае, когда высказывания **a** и **b** истинны или ложны одновременно:

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i> \leftrightarrow <i>b</i>
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Логические выражения

- Каждое составное высказывание можно выразить в виде формулы (логического выражения), в которую входят *логические переменные*, обозначающие высказывание, и *знаки логических операций*, обозначающие логические функции.
- Для записи составного высказывания в виде логического выражения на формальном языке (язык алгебры высказываний) в составном высказывании нужно выделить простые высказывания и логические связи между ними.

Пример

- $(2*2=5 \text{ или } 2*2 = 4)$ и $(2*2 \neq 5 \text{ или } 2*2 \neq 4)$
- Они содержат два простых высказывания:

$$A = 2*2=5 \text{ – ложно (0)}$$

$$B = 2*2=4 \text{ – истинно (1)}$$

- Тогда составное высказывание можно записать в следующей форме:

$$(A \text{ или } B) \text{ и } (\neg A \text{ или } \neg B)$$

- Теперь необходимо записать высказывание в форме логического выражения с учетом последовательности выполнения логических операций: инверсия, конъюнкция, дизъюнкция.

$$F = (A \vee B) \& (\neg A \vee \neg B)$$

$$F = (A \vee B) \& (\neg A \vee \neg B) = (0 \vee 1) \& (1 \vee 0) = 1 \& 1 = 1$$

Таблицы истинности

A	B	$A \vee B$	\bar{A}	\bar{B}	$\bar{A} \vee \bar{B}$	$(A \vee B) \& (\bar{A} \vee \bar{B})$
0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Таблицы истинности

A	B	\bar{A}	\bar{B}	$\bar{A \& B}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

Таблицы истинности

A	B	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

$$\overline{A \& B} = \overline{A \vee B}$$

Вопрос 5.

Логические законы и
правила преобразования
логических выражений

- **Закон тождества.** Всякое высказывание тождественно самому себе: $A = A$
- **Закон непротиворечия.** Высказывание не может быть одновременно истинным и ложным. Если высказывание A истинно, то его отрицание \bar{A} должно быть ложным. Следовательно, логическое произведение высказывания и его отрицания должно быть ложно: $A \& \bar{A} = 0$
- **Закон исключенного третьего.** Высказывание может быть либо истинным, либо ложным, третьего не дано. Это означает, что результат логического сложения высказывания и его отрицание всегда принимает значение «истина»: $A \vee \bar{A} = 1$
- **Закон двойного отрицания.** Если дважды отрицать некоторое высказывание, то в результате мы получим исходное высказывание: $\bar{\bar{A}} = A$

- Законы де Моргана. $\overline{A \vee B} = \bar{A} \& \bar{B}$
 $\overline{A \& B} = \bar{A} \vee \bar{B}$

- Закон коммутативности. В алгебре высказываний можно менять местами логические переменные при операциях логического умножения и логического сложения:

Логическое умножение	Логическое сложение
$A \& B = B \& A$	$A \vee B = A \vee B$

- Закон ассоциативности. Если в логическом выражении используются только операция логического умножения или только операция логического сложения, то можно пренебрегать скобками или произвольно их расставлять:

Логическое умножение	Логическое сложение
$(A \& B) \& C = A \& (B \& C)$	$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$

- Закон дистрибутивности. В алгебре высказываний можно выносить за скобки как общие множители, так и общие слагаемые:

Дистрибутивность умножения относительно сложения	Дистрибутивность сложения относительно умножения
$ab + ac = a(b+c)$ — в алгебре $(A \& B) \vee (A \& C) = A \& (B \vee C)$	$(A \vee B) \& (A \vee C) = A \vee (B \& C)$

<i>Символ</i>	<i>Название символа, смысл</i>	<i>Как следует читать</i>
\neg	Отрицание	$\neg p$ не p
\Rightarrow	Импликация (логическое следствие)	$p \Rightarrow q$ если p , то q
\Leftrightarrow	Эквивалентность	$p \Leftrightarrow q$ p тогда и только тогда, когда q
\wedge	Конъюнкция (логическое произведение)	$p \wedge q$ p и q
\vee	Дизъюнкция (логическая сумма)	$p \vee q$ p или q