

# ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ.

**Геометрия 10 класс**

**Яроцкая Л.П.  
учитель математики СОШ № 38  
Иркутск**

---

# ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОГРАННИК-

выпуклый многогранник, грани которого являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине которого сходится одно и то же число ребер.



Тетраэдр



Гексаэдр



Октаэдр



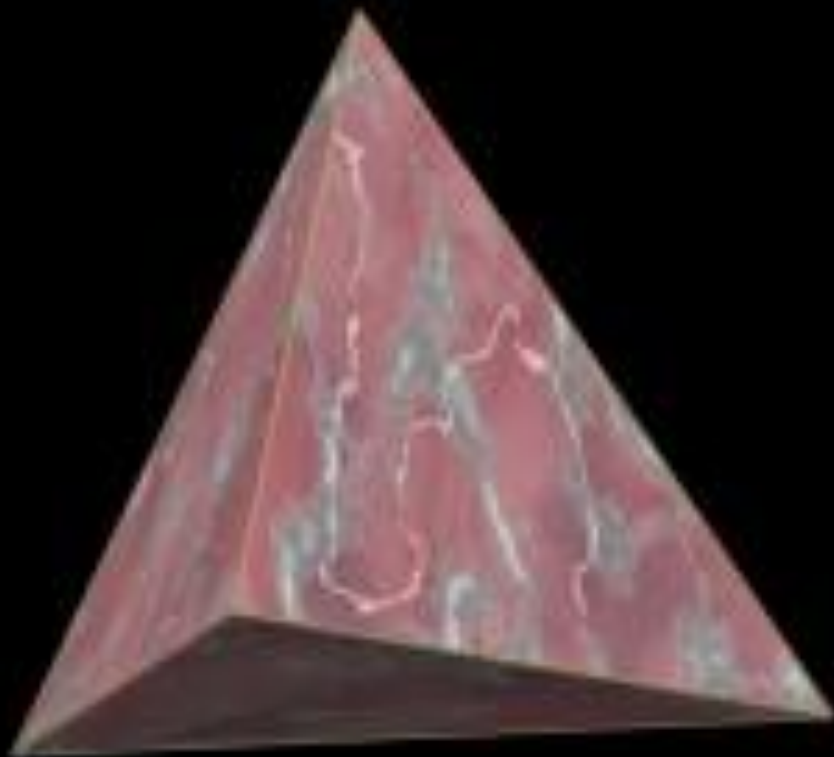
Додекаэдр



Икосаэдр



# ТЕТРАЭДР



представитель правильных  
многогранников.  
Тетраэдра состоит из  
двухсторонних треугольников,  
в каждой вершине по три.



# КУБ (ГЕКСАЭДР)



Куб или гексаэдр – представитель правильных выпуклых многогранников.

Куб имеет шесть квадратных граней, сходящихся в каждой вершине по три.



# ОКТАЭДР



Октаэдр – представитель семейства правильных выпуклых многогранников.

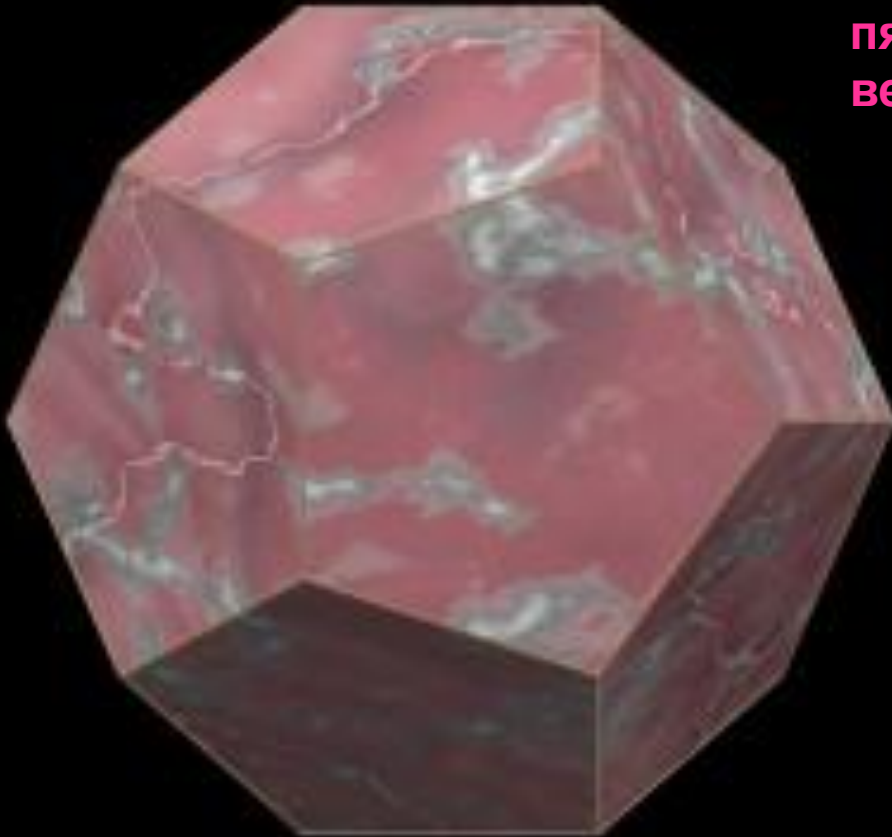
Октаэдр имеет восемь треугольных граней, сходящихся в каждой вершине по четыре.



# ДОДЕКАЭДР

Додекаэдр – представитель семейства правильных выпуклых многогранников.

Додекаэдр имеет двенадцать пятиугольных граней, сходящихся в вершинах по три.



# ИКОСАЭДР

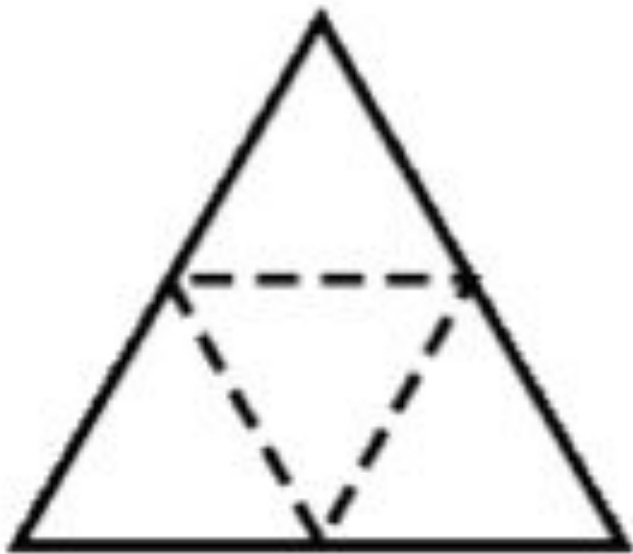
---

Икосаэдр – представитель семейства правильных выпуклых многогранников.

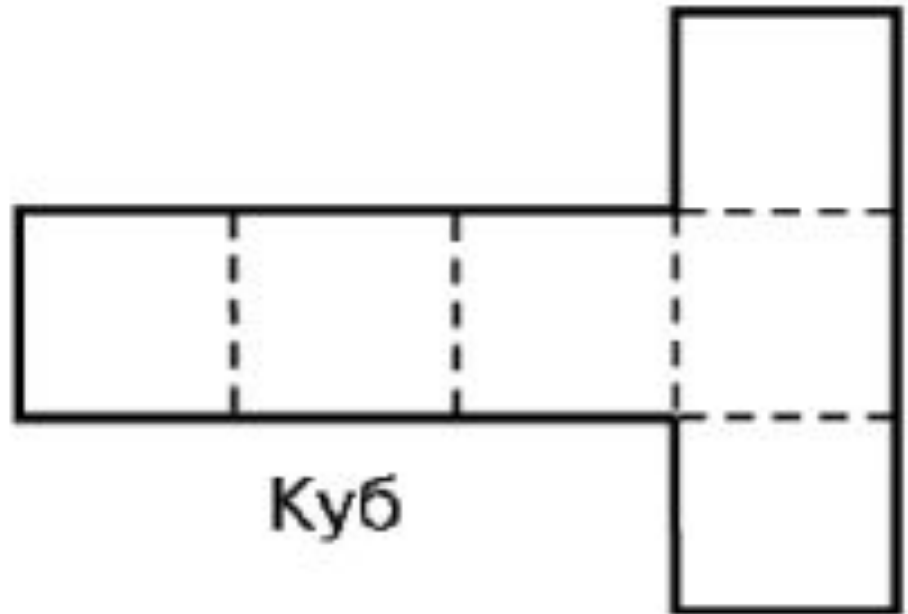
Поверхность икосаэдра состоит из двадцати равносторонних треугольников, сходящихся в каждой вершине по пять.



# РАЗВЁРТКИ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ



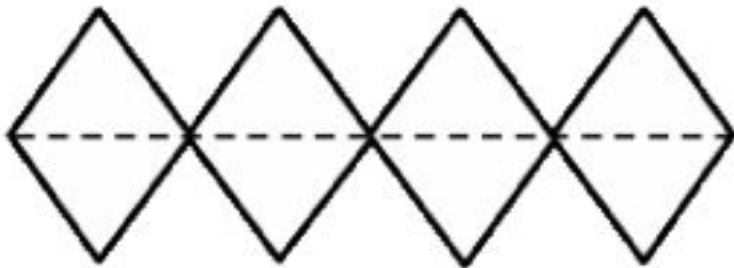
**Тетраэдр**



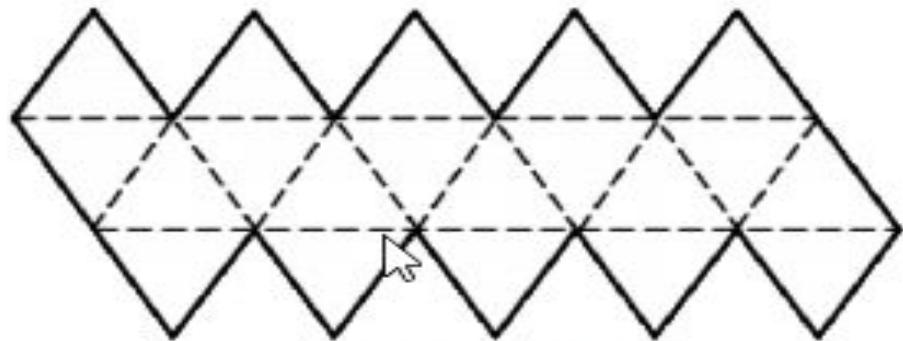
**Куб**



# РАЗВЁРТКИ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ



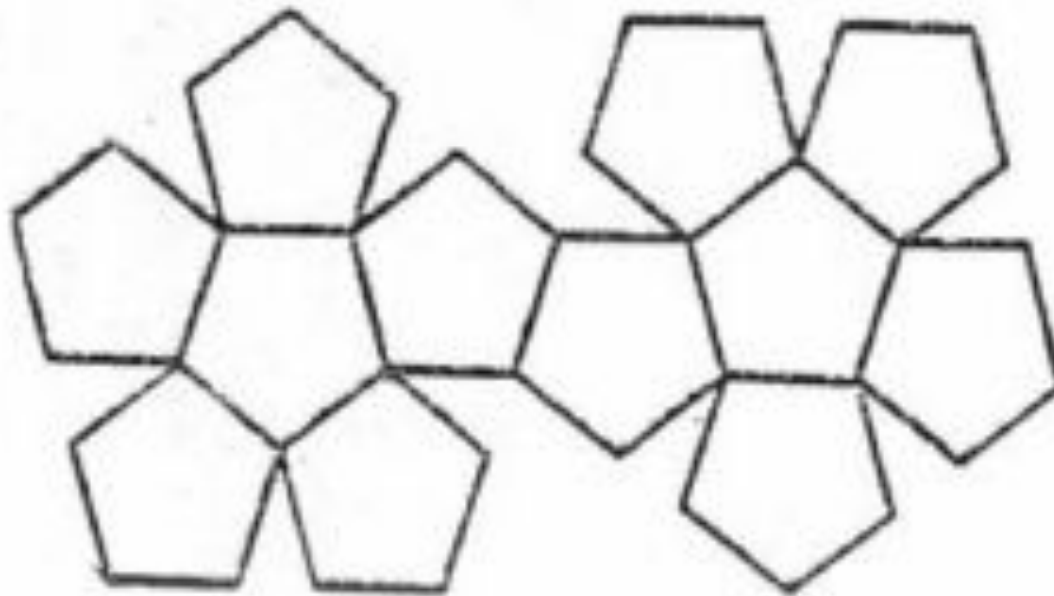
**Октаэдр**



**Икосаэдр**



# РАЗВЁРТКИ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ



**Додекаэдр**



# ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА

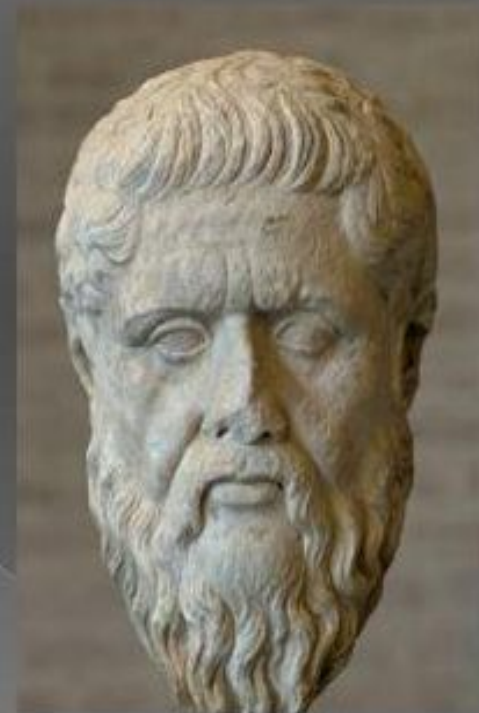
|           | Геометрия<br>грани                                                                                                                                                     | Количество<br>о<br>вершин | Количество<br>о<br>рёбер | Количество<br>граней |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|--------------------------|----------------------|
| Тетраэдр  |                                                                                       | 4                         | 6                        | 4                    |
| Гексаэдр  |                                                                                       | 8                         | 12                       | 6                    |
| Октаэдр   |                                                                                       | 6                         | 12                       | 8                    |
| Додекаэдр | <br> | 20                        | 30                       | 12                   |
| Икосаэдр  |                                                                                                                                                                        | 12                        | 30                       | 20                   |

$$\underline{V - P + G = 2}$$

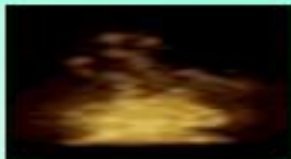


# ИЗ ИСТОРИИ

■ Одно из древнейших упоминаний о правильных многогранниках находится в трактате Платона (427-347 до н. э.) "Тимаус". Поэтому правильные многогранники также называются платоновыми телами (хотя известны они были задолго до Платона). Каждый из правильных многогранников, а всего их пять. Платон ассоциировал с четырьмя "земными" элементами: земля (куб), вода (икосаэдр), огонь (тетраэдр), воздух (октаэдр), а также с "неземным" элементом - небом (додекаэдр).



# ИЗ ИСТОРИИ



**огонь**



**вода**



**воздух**



**земля**



**вселенная**



**тетраэдр**



**икосаэдр**



**октаэдр**



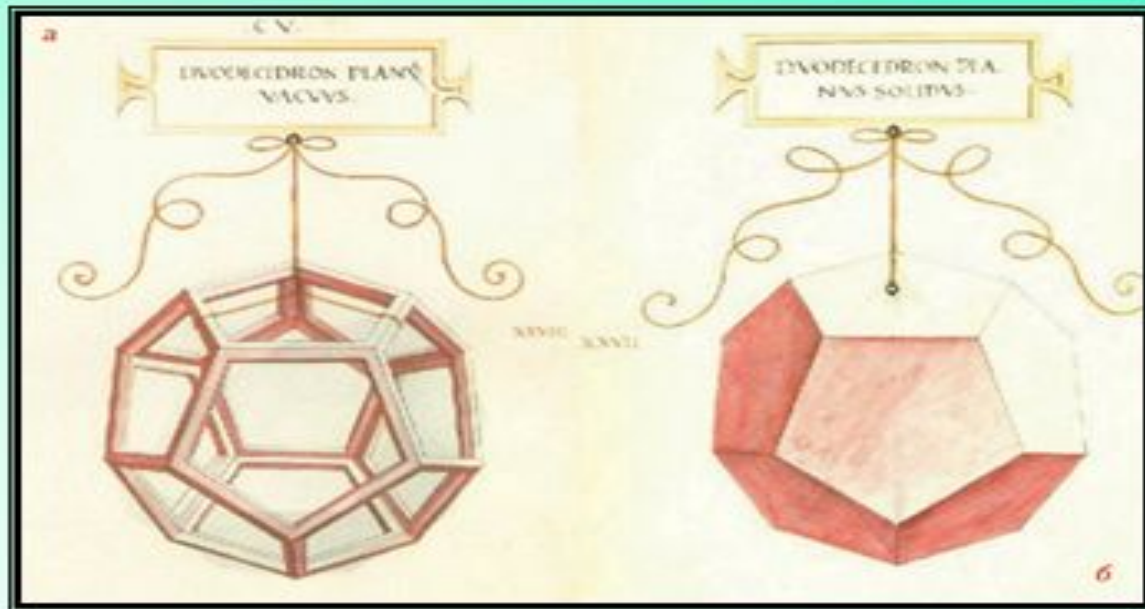
**гексаэдр**



**додекаэдр**



# ИЗ ИСТОРИИ



**Леонардо да Винчи любил изготавливать из дерева каркасы правильных многогранников и преподносить их в виде подарка различным знаменитостям.**



# ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ В ПРИРОДЕ

Правильные многогранники – самые выгодные фигуры, поэтому они широко распространены в природе. Подтверждением тому служит форма некоторых кристаллов. Например, кристаллы поваренной соли имеют форму куба. При производстве алюминия пользуются алюминиево-калиевыми кварцами, монокристалл которых имеет форму правильного октаэдра. Получение серной кислоты, железа, особых сортов цемента не обходится без сернистого колчедана. Кристаллы этого химического вещества имеют форму додекаэдра. В разных химических реакциях применяется сурьменистый серноокислый натрий – вещество, синтезированное учёными. Кристалл сурьменистого серноокислого натрия имеет форму тетраэдра. Последний правильный многогранник – икосаэдр передаёт форму кристаллов бора.



# ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ В ПРИРОДЕ



Хрусталь (призма)



Алмаз (октаэдр)



Шеелит (пирамида)



Поваренная соль

Поваренная соль (куб)

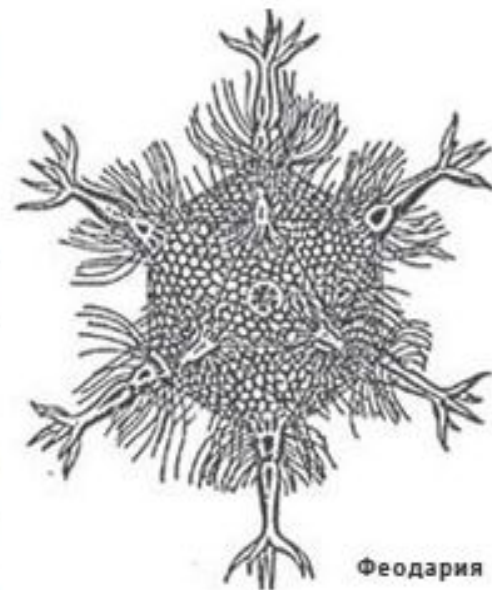


# ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ В ПРИРОДЕ

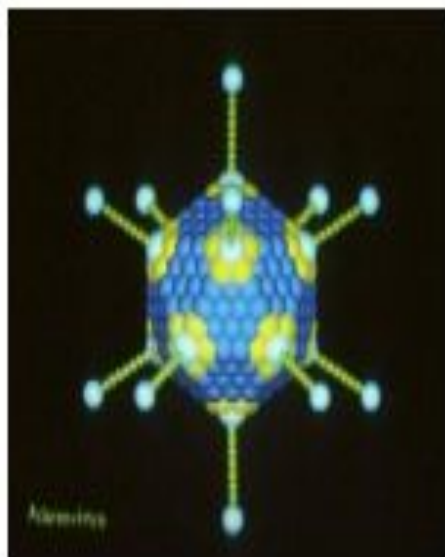
Правильные многогранники встречаются так же и в живой природе. Например, скелет одноклеточного организма феодарии (*Circjgjnja icosahtra*) по форме напоминает икосаэдр.

Большинство феодарий живут на морской глубине и служат добычей коралловых рыбок. Но простейшее животное защищает себя двенадцатью иглами, выходящими из 12 вершин скелета. Оно больше похоже на звёздчатый многогранник. Из всех многогранников с тем же числом граней икосаэдр имеет наибольший объём при наименьшей площади поверхности. Это свойство помогает морскому организму преодолевать давление толщи воды.

Икосаэдр оказался в центре внимания биологов в их спорах относительно формы вирусов. Вирус не может быть совершенно круглым, как считалось ранее. Чтобы установить его форму, брали различные многогранники, направляли на них свет под теми же углами, что и поток атомов на вирус. Оказалось, что только один многогранник дает точно такую же тень - икосаэдр.



# ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ В ПРИРОДЕ



Вирусы, построенные только из нуклеиновой кислоты и белка, могут походить на жесткую палочкообразную или гибкую нитевидную спираль, точнее на правильный двадцатигранник, или **икосаэдр**. Есть вирусы, размножающиеся в клетках животных (позвоночных и беспозвоночных), другие облюбовали растения, третьи (их называют бактериофагами или просто фагами) паразитируют в микробах, но **икосаэдрическая форма** встречается у вирусов всех этих трех групп.



---

**□ « Правильных многогранников  
вызывающе мало, но этот весьма  
скромный по численности отряд  
сумел пробраться в самые  
глубины различных наук.»**

**□**

**Л. Кэрролл**



---

# КЛАССНАЯ РАБОТА

## Проверка формул

1) Призма

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$$

2) Прямая (правильная) призма

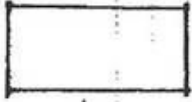
$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} h$$

3) Пирамида

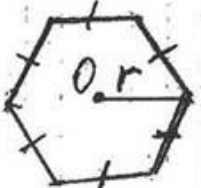
$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

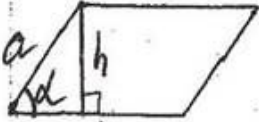
4) Правильная пирамида

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} d$$

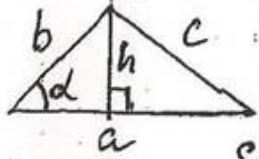
5)   $S = ab$

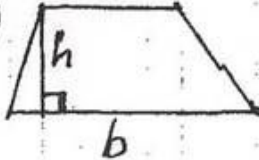
6)   $S = a^2$

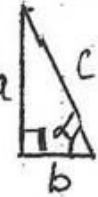
12)   $S = \frac{1}{2} Pr$

7)   $S = bh$   
 $S = ab \sin \alpha$

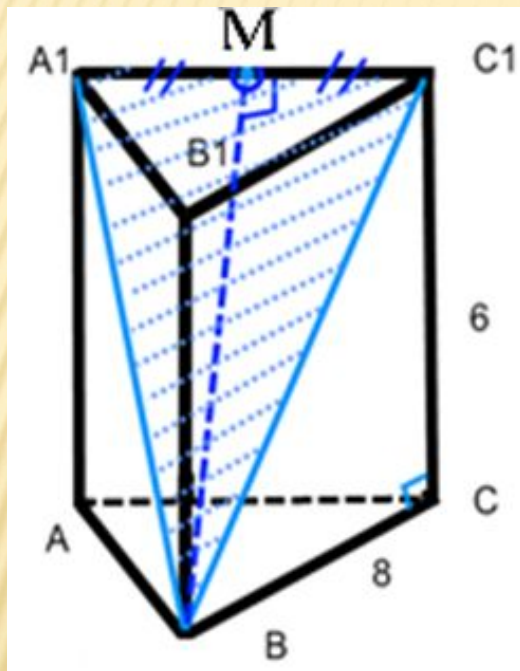
8)   $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$

9)   $S = \frac{1}{2} ah$   
 $S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$   
 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

10)   $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$

11)   $S = \frac{1}{2} ab$   
 $\sin \alpha = \frac{a}{c}$   $\cos \alpha = \frac{b}{c}$   
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$

Задача № 3. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 8 см, боковое ребро - 6 см. Найдите  $S_{\text{сеч}}$ , проходящего через сторону верхнего основания и противоположащую вершину нижнего основания.



Треугольник  $A_1B_1C_1$  - равнобедренный ( $A_1B_1 = C_1B_1$  как диагональ равных граней)

1) Рассмотрим треугольник  $BCC_1$  – прямоугольный

$$BC_1^2 = BC^2 + CC_1^2$$

$$BC_1 = 10 \text{ см}$$

2) Рассмотрим треугольник  $BMC_1$  – прямоугольный

$$BC_1^2 = BM^2 + MC_1^2$$

$$BM^2 = BC_1^2 - MC_1^2$$

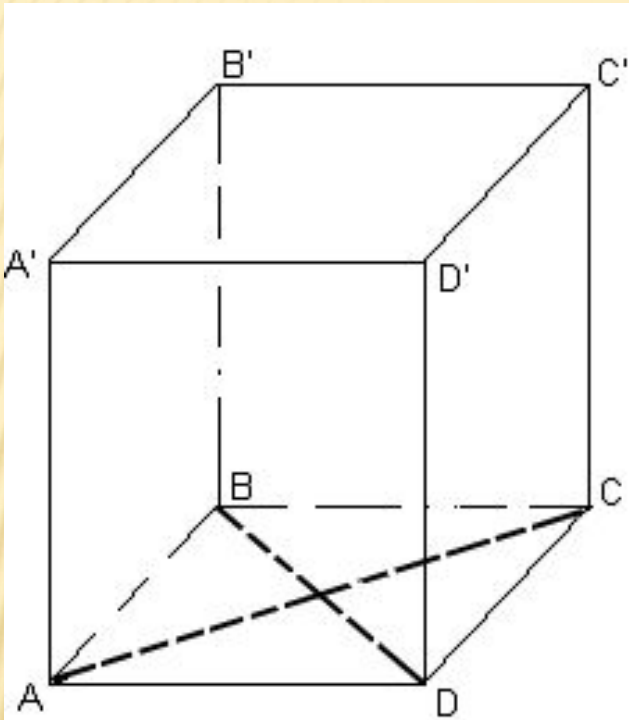
$$BM^2 = 100 - 16 = 84$$

$$BM = 2 \text{ см}$$

$$3) S_{\text{сеч}} = A_1C_1 \cdot BM = 8 \cdot 2 = 8 \text{ см}^2$$

Ответ:  $8 \text{ см}^2$

**ЗАДАЧА № 1. ОСНОВАНИЕМ ПРЯМОЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ ЯВЛЯЕТСЯ РОМБ С ДИАГОНАЛЯМИ 1,6 ДМ И 3 ДМ, БОКОВОЕ РЕБРО ПРИЗМЫ РАВНО 10 ДМ. НАЙДИТЕ ПЛОЩАДЬ БОКОВОЙ И ПОЛНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИЗМЫ.**



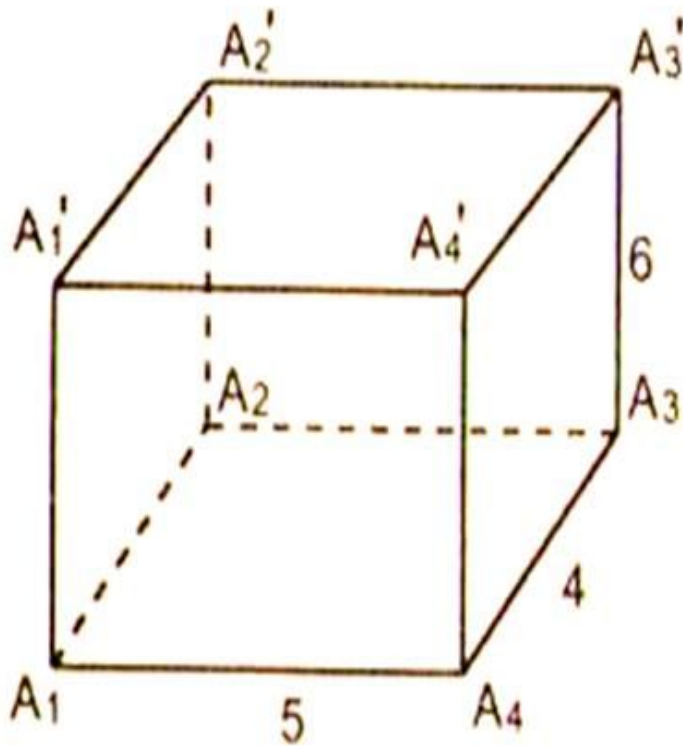
*Решение:*

- Используя свойство – диагонали ромба взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам, найдем сторону.  
 $OD = 0,8$  дм,  $OC = 1,5$  дм
- Рассмотрим  $\triangle COD$  – прямоугольный.
- $CD =$
- $CD =$  дм
- $AB = BC = CD = AD = 1,7$  дм
- $S = 4 \cdot (1,7 \cdot 10) = 68$  дм<sup>2</sup>.

Уровень 1

Задача 1

## Прямая призма



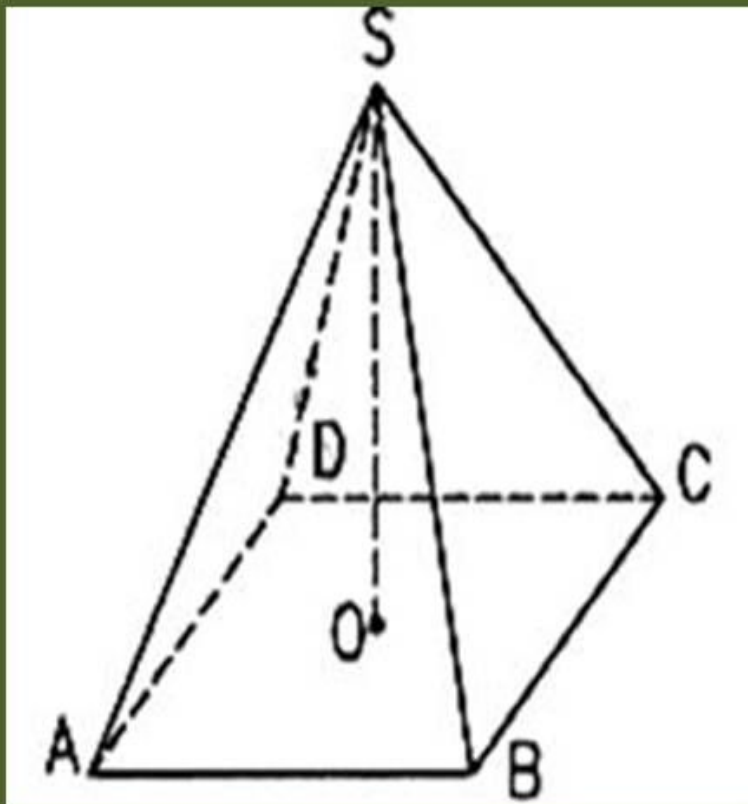
Дано:  $A_1A_2A_3A_4$  – прямоугольник.

Найти: 1)  $S_{\text{бок}}$ ; 2)  $S_{\text{полн.}}$

Уровень 2

Задача 2

В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен  $60^\circ$ . Найдите боковое ребро пирамиды.

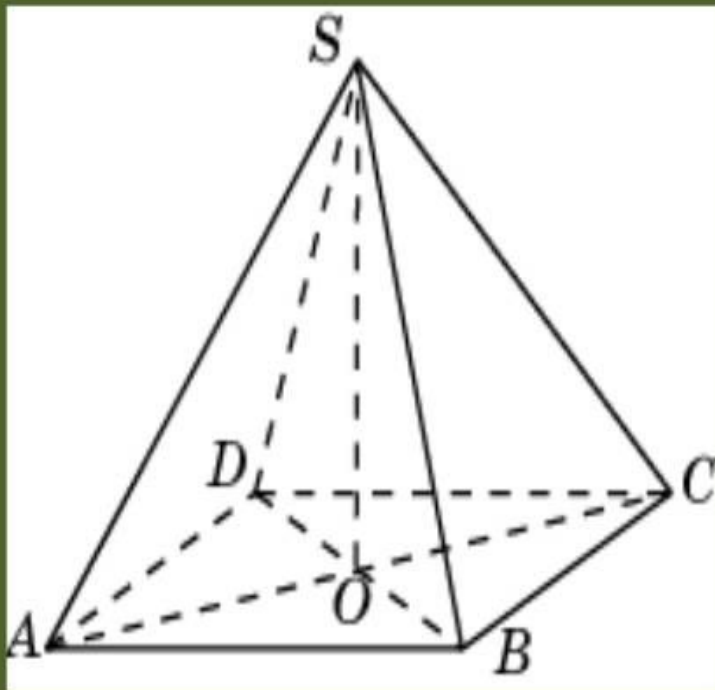


Уровень 1

Задача 3

## Демоверсия ЕГЭ, 2013

**В9.** Диагональ  $AC$  основания правильной четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  равна 6. Высота пирамиды  $SO$  равна 4. Найдите длину бокового ребра  $SB$ .



# ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

---

- 1. Сторона правильной треугольной пирамиды равна 6 см, а высота  $\sqrt{13}$  см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
- 2. Основание прямой призмы - ромб с острым углом  $60^\circ$ . Боковое ребро призмы равно 10 см, а площадь боковой поверхности - 240 см<sup>2</sup>. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.