

# ДИСКРЕТНЫЕ СТРУКТУРЫ КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ

## ПРАВИЛА СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ. ПЕРЕСТАНОВКИ И ПОДСТАНОВКИ

ЛЕКЦИЯ 12

Математический факультет. Кафедра математического  
моделирования

**Цель лекции** – ознакомится с предметом и основными понятиями комбинаторного анализа

# Литература

- Глушкин Л.М., Шор Л.А., Шварц В.Я. Задачи и алгоритмы комбинаторики, и теории графов. Донецк, ДПИ, 1982. 368 с.
- Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. М.: Наука, 1977. С.170-184.
- Ежов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Элементы комбинаторики: Пер. с укр. М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства Наука, 1977. 80 с.
- Виленкин Н.Я. Индукция. Комбинаторика. М.: Просвещение, 1976. 48 с.
- Хаханов В.І., Хаханова І.В., Кулак Е.М., Чумаченко С.В. Методичні вказівки до практичних занять з курсу "Дискретна математика". Харків, ХНУРЕ. 2001. С.63-67.

# Термины

## Базовые понятия:

- Множество
- Подмножество
- Упорядоченность
- Мощность
- Факториал

## Ключевые слова:

- Перестановка
- Подстановка
- Инверсия
- Четность подстановки
- Цикл
- Симметрическая группа подстановок

# Комбинаторный анализ как раздел дискретной математики

- Во многих математических исследованиях встречаются комбинаторные задачи – задачи выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами.
- Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества, называемой комбинаторной конфигурацией.
- **Целью комбинаторного анализа** является изучение комбинаторных конфигураций, в частности, вопросы их существования, алгоритмы построения, решение задач на перечисление. Примерами комбинаторных конфигураций являются перестановки, размещения и сочетания.

# Комбинаторный анализ как раздел дискретной математики

Без учета влияния случайных явлений человек становится бессильным направлять развитие интересующих его процессов в желательном для него направлении

Б.В.Гнеденко

# Комбинаторный анализ как раздел дискретной математики

- Комбинаторика занимается различного рода сочетаниями (соединениями), которые можно образовать из элементов некоторого конечного множества.
- Термин «комбинаторика» происходит от латинского слова *combina* – сочетать, соединять.
- Некоторые элементы комбинаторики были известны в Индии еще во II веке до н.э. Предполагают, что индусы изучали соединения в связи с применением их в поэтике – науке о структуре поэтических произведений. Они подсчитывали возможные сочетания ударных и безударных слогов стопы, состоящей из  $n$  слогов.
- В древней Индии, Средней Азии и Китае была известна частично таблица биномиальных коэффициентов.

# Комбинаторный анализ как раздел дискретной математики

- Как научная дисциплина комбинаторика сформировалась лишь в XVII веке.
- Термин «комбинаторика» стал употребляться после опубликования немецким ученым Г.В. Лейбницем в 1666 г. работы «Рассуждение о комбинаторном искусстве», в котором впервые дано научное обоснование теории сочетаний и перестановок.
- Изучением размещений занимался швейцарский математик Якоб Бернулли. Результаты он опубликовал в своей книге «Искусство предугадывания» (1713). Он ввел также термин «перестановка».
- Термин «сочетание» применял французский математик и философ Блез Паскаль.



# Правило суммы



- **Теоретико-множественная формулировка:** пусть конечное множество  $M$  представлено объединением попарно непересекающихся подмножеств  $M_1, M_2, \dots, M_n$ .

Тогда  $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n, M_i \cap M_j = \emptyset, i \neq j.$

- **Комбинаторная формулировка:** пусть объект  $a_1$  может быть выбран  $m_1$  способами; объект  $a_2$  может быть выбран  $m_2$  способами;  
.....  
объект  $a_n$  может быть выбран  $m_n$  способами.  
Тогда выбор объекта  $a_1$ , либо объекта  $a_2, \dots$ , либо объекта  $a_n$  может быть осуществлен  $m_1 + m_2 + \dots + m_n$  способами.

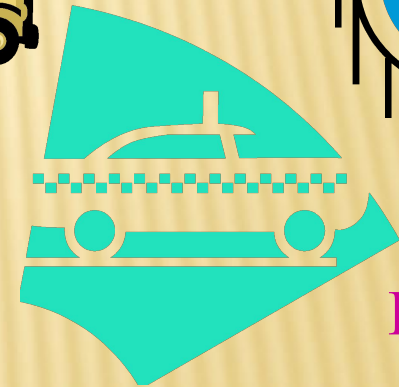
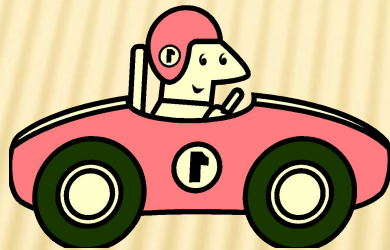
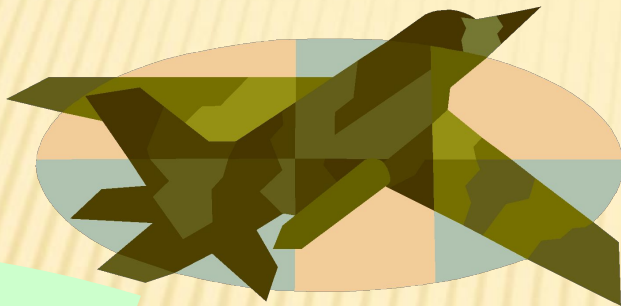
## Правило суммы: пример



Из Харькова в Киев в течение суток отправляются 6 поездов, 4 автобуса и 1 самолет.

Сколько существует способов добраться до Киева?

Харьков



Киев

Решение. По правилу суммы всего существует  $6+4+1=11$  способов выехать из Харькова в Киев.



# Правило произведения

- **Теоретико-множественная формулировка:**

пусть  $M_1, M_2, \dots, M_n$  – конечные множества,

$M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$  – их декартово произведение.

Тогда  $|M| = |M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \dots \cdot |M_n|$ .

- **Комбинаторная формулировка:** пусть

объект  $a_1$  выбирается  $m_1$  способами;

объект  $a_2$  выбирается  $m_2$  способами;

.....

объект  $a_n$  выбирается  $m_n$  способами,

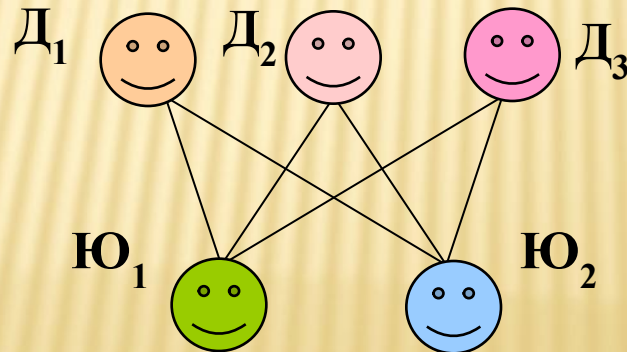
при этом выбор объекта  $a_i$  не влияет на число способов выбора остальных объектов.

Тогда выбор упорядоченного множества объектов  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  может быть осуществлен  $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$  способами.

## Правило произведения: пример

- На дискотеку пришли 3 девушки и 2 юноши.
- Сколько танцующих пар они могут составить (не одновременно)?
- По правилу произведения можно составить  $3 \cdot 2 = 6$  пар. Решение можно представить в виде диаграммы (графа), иллюстрирующего декартово произведение множеств:

$$M = \{(D_1, Y_1), (D_1, Y_2), (D_2, Y_1), (D_2, Y_2), (D_3, Y_1), (D_3, Y_2)\}$$



# Перестановки



- Пусть  **$M$**  – конечное множество, состоящее из  **$n$**  элементов.
- Они могут быть перенумерованы при помощи первых  **$n$**  натуральных чисел  **$1, 2, \dots, n$** .
- Поскольку в интересующих нас вопросах индивидуальные свойства элементов не будут иметь значения, то можно рассматривать в качестве элементов сами числа  **$1, 2, \dots, n$** :  **$M = \{1, 2, \dots, n\}$** .
- **Def:** каждая последовательность  **$n$**  различных элементов с учетом порядка называется **перестановкой** этих элементов (**перестановкой из  $n$  элементов**)

# Пример

Числа 1, 2, 3 можно расположить следующими способами:

**1, 2, 3**

**1, 3, 2**

**2, 1, 3**


**2, 3, 1**

**3, 1, 2**

**3, 2, 1**

# Количество перестановок из n элементов

Перестановки из n элементов множества M отличаются друг от друга только порядком входящих в них элементов.

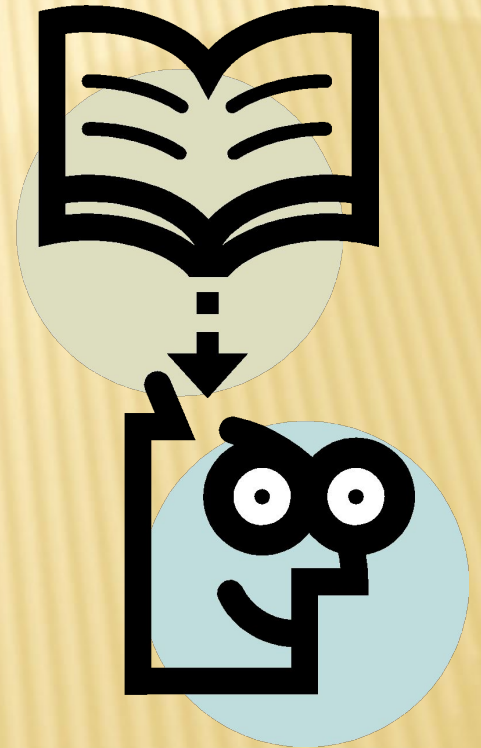
 Число всех различных перестановок из n элементов равно произведению  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$  ("эн-факториал").

## Пример

Сколькими способами можно расставить на полке 10 различных книг?

Существует  $10!$  различных способов расстановки книг:

$$10! = 3\,628\,800$$



# Подстановки



**Def:** взаимно-однозначное отображение  $\pi^n$  конечного упорядоченного множества  $M = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  из  $n$  элементов на себя называется **подстановкой степени  $n$** .

## Пример

Запишем одну под другой две перестановки из 5 символов:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Под числом 3 стоит число 5; под 5 – 2; и т.д.

Говорят, что при отображении  $\pi^5$  число 3 переходит в 5, 5 – в 2 и т.д., 4 остается на месте – неподвижная точка подстановки.



# Тождественная подстановка



**Def:** подстановка, при которой на месте остаются все элементы, называется тождественной:

$$\pi_e^n \equiv e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Все точки тождественной подстановки неподвижные.



## Произведение подстановок

Пусть  $M = \{1, 2, \dots, n\}$  – произвольное множество,  
 $\pi^n$  – подстановка элементов множества  $M$ :

$$\pi^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix}$$

где  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  – перестановка из элементов  
множества  $M$ ,  $\pi^n(i) = s_i$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Определим произведение  $\pi_1^n \cdot \pi_2^n$  двух подстановок  
из  $n$  элементов как последовательное  
проведение обоих преобразований:

$$\pi_1^n \cdot \pi_2^n(i) = \pi_2^n(\pi_1^n(i)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

# Time-Out



## Пример

Найти произведение подстановок:

$$\pi_1^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \pi_2^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\pi_1^4 \cdot \pi_2^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Определим произведение в обратном порядке:

$$\pi_2^4 \cdot \pi_1^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

# Совместимость подстановок

**Def:** подстановки одинаковых степеней называются **совместимыми**.

Можно перемножать только совместимые подстановки.

Умножение подстановок  $n$ -й степени при  $n \geq 3$  не является коммутативным:

$$\pi_1^n \cdot \pi_2^n \neq \pi_2^n \cdot \pi_1^n$$

# Симметрическая группа подстановок

1. Для любых двух подстановок из  $n$  элементов множества  $M$  произведение есть однозначно определенная подстановка:

$$\exists! \pi^n = \pi_1^n \cdot \pi_2^n$$

2. Произведение подстановок ассоциативно, но не коммутативно:

$$(\pi_1^n \cdot \pi_2^n) \cdot \pi_3^n = \pi_1^n \cdot (\pi_2^n \cdot \pi_3^n)$$

$$\pi_1^n \cdot \pi_2^n \neq \pi_2^n \cdot \pi_1^n$$

3. Для тождественной подстановки имеют место равенства:

$$\forall \pi^n : \pi_e^n \cdot \pi^n = \pi^n \cdot \pi_e^n = \pi^n$$

4. Каждая подстановка имеет обратную:

$$\forall \pi^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix} \exists! (\pi^n)^{-1} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} : (\pi^n)^{-1} \cdot \pi^n = \pi^n \cdot (\pi^n)^{-1} = \pi_e^n$$

Таким образом, все подстановки элементов множества  $M$  образуют группу, порядок которой  $n!$  (порядок определяет запас элементов). Эта группа называется **симметрической группой  $S_n$** .

# Пример симметрической группы подстановок

Элементы симметрической группы  $S_3$  определяются как:

$$\pi_e^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_3^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_4^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi_5^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

## Инверсии. Четность подстановки

**Def:** если в матрице подстановки  $\pi^n$  элементов множества  $M = \{1, 2, \dots, n\}$  встречаются два столбца

$$\pi^n = \begin{pmatrix} \dots & s_i & \dots & s_j & \dots \\ \dots & t_i & \dots & t_j & \dots \end{pmatrix}$$

для которых  $s_i < s_j, t_i > t_j$  (или  $s_i > s_j, t_i < t_j$ ), то такая пара столбцов называется **инверсией подстановки  $\pi^n$** .

**Def:** подстановка называется **четной** или **нечетной** в зависимости от того, четно или нечетно число встречающихся в ней инверсий.



## Упражнение

Определить четность подстановок симметрической группы  $S_3$

$$\pi_e^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_3^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_4^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi_5^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

## Подстановки с циклами

Если матрицу подстановки  $\mathbf{p}^n$  перестановкой столбцов можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_{r-1} & s_r & s_{r+1} & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_r & s_1 & t_{r+1} & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

то  $\mathbf{p}^n$  задает взаимно-однозначное отображение множества  $\{s_1, s_2, \dots, s_r\}$  на себя, которое называется циклом длины  $r$ .

Каждой неподвижной точке соответствует цикл длины 1.

Каждую подстановку можно однозначно представить в виде произведения циклов, не имеющих общих элементов.

## Пример

Представить подстановки в виде разложения на независимые циклы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1, 4, 3, 5) \cdot (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} = (1, 2, 3) \cdot (4, 5) \cdot (6)$$

# Перестановки с повторениями. 1

Дано множество  $M$ , состоящее из  $n$  элементов. Требуется представить множество  $M$  в виде объединения  $m$  попарно непересекающихся подмножеств  $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_m$  так, чтобы  $|M_1| = k_1, |M_2| = k_2, \dots, |M_m| = k_m$ , где  $k_i$  – заданные числа, причем

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = \sum_{j=1}^m k_j = n$$

Сколькими способами можно получить такое разложение?

## Перестановки с повторениями. 2

**Теорема.** Пусть  $k_1, k_2, \dots, k_m$  – натуральные числа такие, что  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ . Число способов, которыми можно представить множество  $M$  из  $n$  элементов в виде объединения  $m$  попарно непересекающихся множеств, количество элементов которых составляет соответственно  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , равно

$$C_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$$

# Выводы

- Таким образом, две перестановки, записанные друг под другом, определяют некоторое взаимно-однозначное отображение множества из  $n$  натуральных чисел на себя.
- Каждую подстановку можно однозначно представить в виде произведения циклов, не имеющих общих элементов.