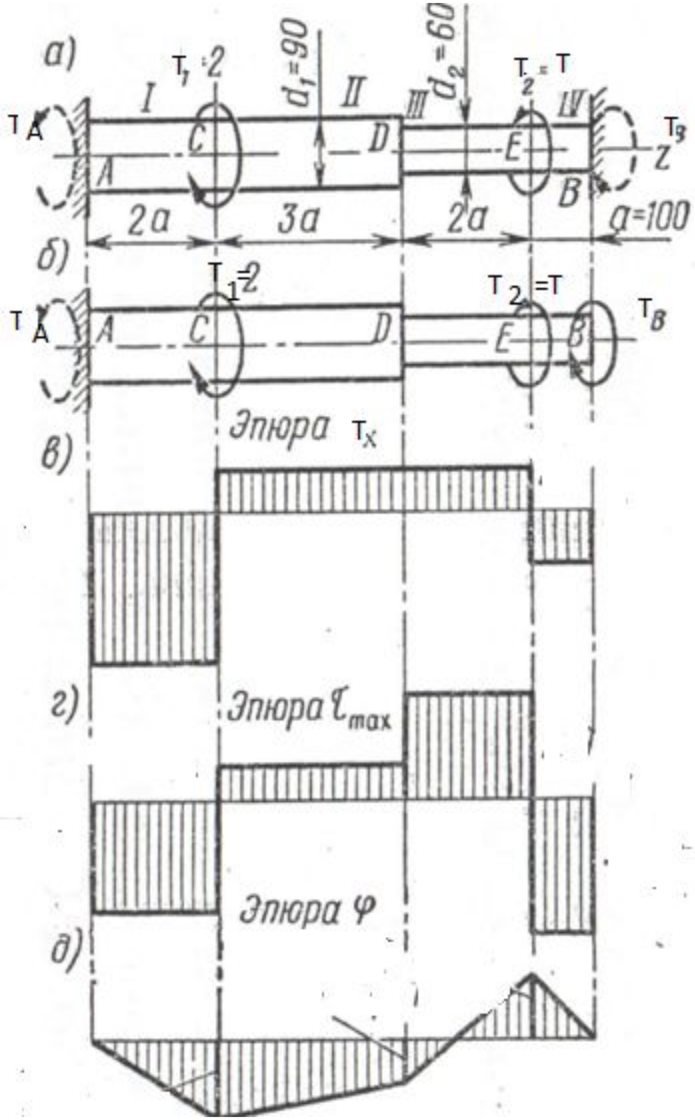

МОСКОВСКИЙ ГОРНЫЙ ИНСТИТУТ
МГИ
1918
НИТУ МИСиС
МИСиС

Задача № 3

Для стального статически неопределимого ступенчатого стержня круглого поперечного сечения требуется:

- раскрыть статическую неопределимость;
- построить эпюру крутящих моментов;
- построить эпюру касательных напряжений при d=60 мм и проверить стержень на прочность;
- построить эпюру углов поворота;
- проверить жесткость стержня.

Решение:



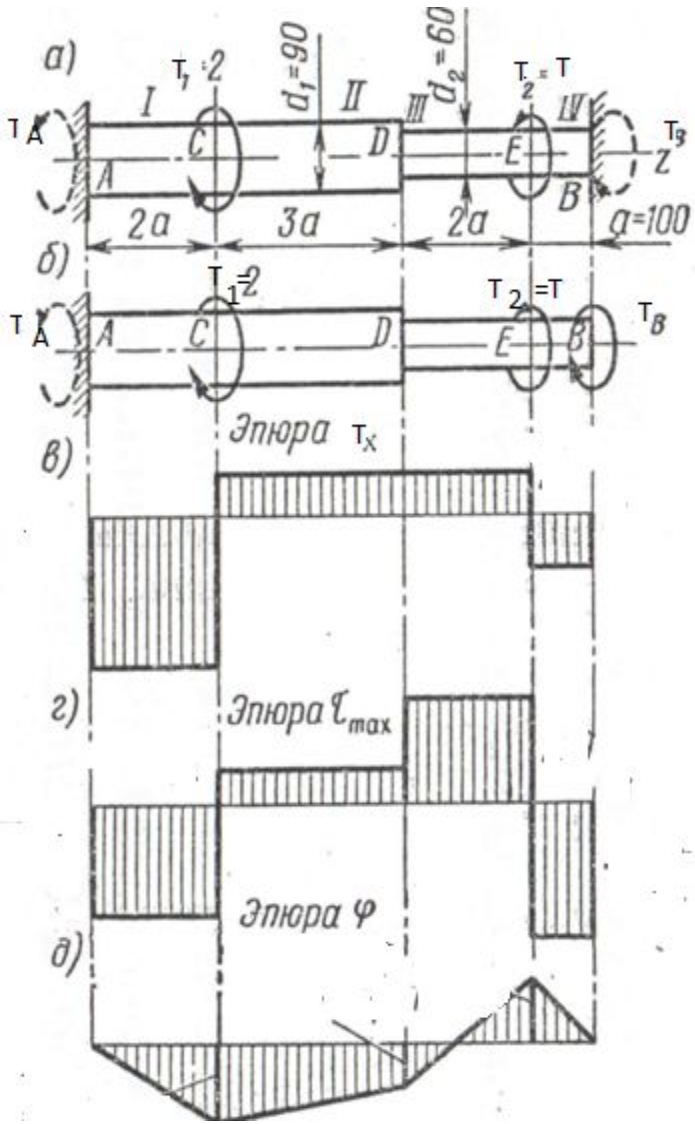
В заделках возникают реактивные моменты T_A и T_B; их предположительное направление показано на рис. 1, а.

В данном случае статика дает одно уравнение равновесия (для системы пары сил, действующих в параллельных плоскостях), сумма моментов относительно продольной оси бруса равна нулю:

$$\Sigma T_x = 0;$$

$$-T_A + 2T - T + T_B = 0, \text{ или}$$

$$T_A - T_B = T. \quad (1)$$



Для составления уравнения перемещений отбросим правую заделку, заменив ее действие на брус не известным пока реактивным моментом $\boldsymbol{T_B = X}$. Полученная таким образом статически определимая система (рис.1, б) эквивалентна заданной и, следовательно, угол поворота сечения ***B*** равен нулю:

$$\varphi_B = 0.$$

Применяя принцип независимости действия сил, запишем уравнение перемещений в виде

$$\varphi_B = \varphi_{BT1} + \varphi_{BT2} + \varphi_{BX} = 0. \quad (2)$$

При действии только момента T_1 угол поворота сечения ***B*** равен углу закручивания участка ***AC***, т.е.

$$\varphi_{BT_1} = \varphi_{AC} = \frac{2T \cdot 2a}{G \cdot J_{p_1}}$$

Аналогично при действии только момента T_2

$$\varphi_{BT_2} = \varphi_{AE} = \varphi_{AD} + \varphi_{DE} = -\left(\frac{T \cdot 5a}{G \cdot J_{p_1}} + \frac{T \cdot 2a}{G \cdot J_{p_2}}\right)$$

Знак минус поставлен потому, что момент T_2 направлен противоположно моменту T_1.

При действии только момента $T_B = X$ получим

$$\varphi_{BX} = \varphi_{AB} = \varphi_{AD} + \varphi_{DB} = \frac{X \cdot 5a}{G \cdot J_{p_1}} + \frac{X \cdot 3a}{G \cdot J_{p_2}}$$

Для упрощения вычислений выразим $\boldsymbol{J_{p1} = \pi d_1^{\,4} / 32}$ через $\boldsymbol{J_{p2} = \pi d_2^{\,4} / 32}$:

$$\frac{J_{p_1}}{J_{p_2}} = \frac{d_1^4}{d_2^4} = 1.5^4 \approx 5$$

Подставляя значения угла поворота в уравнение (2) и учитывая соотношение между $\boldsymbol{J_{p1}}$ и $\boldsymbol{J_{p2}}$, получаем

$$\frac{4T}{5} - \frac{5T}{5} - 2T + \frac{5X}{5} + 3X = 0,$$

откуда

$$\boldsymbol{X = T_B = (11/20)\ T.}$$

Подставляя значение $\boldsymbol{T_B}$ в уравнение равновесия (1), найдем

$$\boldsymbol{T_A = (31/20)\ T.}$$

Эпюру крутящих моментов строим, начиная с левого конца. Проведя произвольное сечение на участке ***AC*** и составляя для оставленной части уравнение равновесия $\boldsymbol{\Sigma T_X = 0}$, получаем $\boldsymbol{T_X^1 = (31/20)\ T}$. Согласно принятому правилу знаков, считаем момент $\boldsymbol{T_X^1}$ отрицательным. Для остальных участков находим крутящие моменты как алгебраические суммы внешних моментов, приложенных по одну сторону (в нашем случае левую) от сечения. Отсеченные части отдельно не изображаем. Вообще следует заметить, что построение эпюры крутящих моментов совершенно аналогично построению эпюры продольных сил.

Строим эпюру касательных напряжений, пользуясь формулой

$$\boldsymbol{\tau_{max} = T_X / W_p \text{, где } W_p = \pi D^3 / 16.}$$

Для участка АС:

$$(\tau_{\max})AC = \frac{T_X^1}{\pi D^3 / 16}$$

Заданное значение момента умножаем на $\boldsymbol{10^6}$ для перевода из ***кН·м*** в ***Н·мм***.

Аналогично определяем $\boldsymbol{\tau_{max}}$ в поперечных сечениях остальных участков бруса.

Ординаты эпюры $\boldsymbol{\tau_{max}}$ откладываем в ту же сторону, что и соответствующие ординаты эпюры $\boldsymbol{T}_{\mathrm{X}}$. Знак касательного напряжения при расчете на прочность никакой роли не играет, и принятое направление ординат эпюры условно.

Опасным оказалось поперечное сечение участка ***BE***. Таким образом, опасным оказалось не то сечение. в котором крутящий момент максимален.

Проверяем условие прочности $\boldsymbol{\tau}_{max} \leq [\boldsymbol{\tau}_k]$.

Эпюру углов поворота строим, начиная от защемленного конца. Ординаты этой эпюры в выбранном масштабе дают величины углов поворота соответствующих поперечных сечений бруса. Эпюра строится совершенно аналогично эпюре линейных перемещений.

В пределах каждого из участков бруса эпюра линейна, поэтому достаточно вычислить углы поворота только для граничных сечений участков: угол поворота сечения ***C***, равный углу закручивания участка ***AC*** *(со знаком -)*:

$$\varphi_{AC} = \frac{T_X^1 \cdot 2a}{G \cdot J_p^1}[\text{рад}],$$

где принято для стали ***G = 8 ·10⁴ Н/мм²*** ;

угол поворота, например, сечения ***E*** относительно ***A***, равный углу закручивания участка ***AE***:

$$\varphi_{AE} = -\frac{T_X^1 \cdot 2a}{G \cdot J_p^1} + \frac{T_X^2 \cdot 5a}{G \cdot J_p^1} + \frac{T_X^2 \cdot 2a}{G \cdot J_p^2}[\text{рад}],$$

Аналогично вычисляются углы поворота остальных граничных сечений.

Проверяем жесткость стержня по формуле:

$$\varphi_{max} = T \cdot \ell \,/\, G \cdot J_p \leq [\varphi]$$