Российский государственный университет нефти и газа (НИУ)
имени И.М. Губкина

Кафедра автоматизированных систем управления

Моделирование марковских случайных процессов

асс. Мухина А. Г.

г. Москва

2018 г.

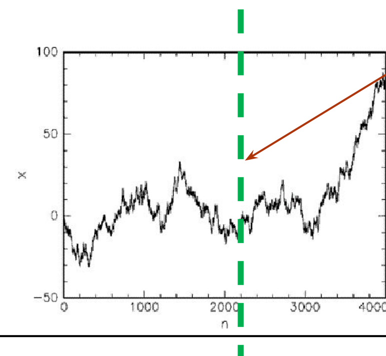
Основы теории случайных процессов

- *Процесс* – совокупность данных, полученных в результате временных наблюдений реального физического явления.

Процессы

- Детерминированные → Описание **<u>явными математическими формулами</u>**
- Случайные → Наблюдение предоставляет один вариант из **<u>множества возможных</u>**

- *Случайный процесс* описывается совокупностью **выборочных функций,** выражающих случайное явление.



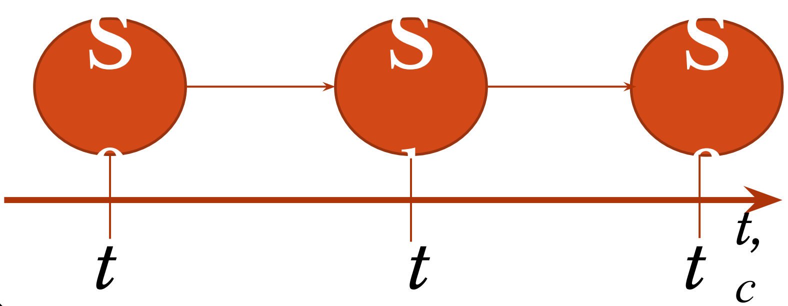
Сечение *случайного процесса*

Марковский случайный процесс

«То, что мы называем случайностями — всего лишь закономерности, которые мы не в состоянии расшифровать»

- Случайный процесс называется ***марковским***, если для любого момента времени t_o вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его **текущего** состояния $x(t_o)$ и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.

- Для марковского процесса *будущее* зависит от прошлого только через *настоящее*.



Поток событий и его характеристики

- ***Поток событий*** **–** последовательность однотипных ***ситуаций***, следующих одна за другой в **случайные** моменты времени.
- События, в отличии от ситуаций, обладают *вероятностью*.

- ***Интенсивность потока λ* –** среднее число событий, приходящихся на единицу времени.
- ***Степень регулярности потока*** $\boldsymbol{\nu_T}$ **–** коэффициент вариации интервалов между событиями.

Простейший поток (стационарный пуассоновский)

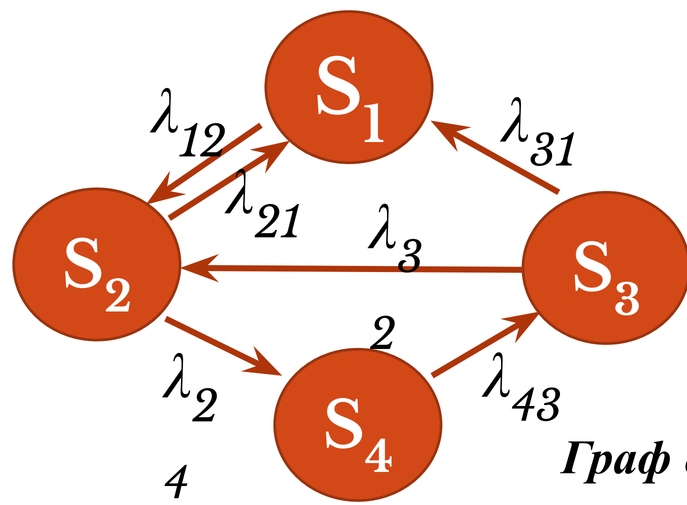
Регулярный	Стационарный	Ординарный	Поток без последействия
• **Последовательное** появление событий • Шаг Δt **не изменяется**	• Вероятностные характеристики **не зависят от времени** • **λ = const**	• Появление **единичного** события в момент времени **t** (не группами)	• Число событий на участке τ_1 **не зависит от количества событий на** $\boldsymbol{\tau_2}$

Поток Пальма (рекуррентный), где интервалы $\boldsymbol{T_1, T_2 ... T_m}$ ***- случайные величины с произвольным распределением***

К математическому моделированию марковских процессов

- ***Уравнения Колмогорова*** **–** дифференциальные уравнения особого вида, в которых неизвестными (искомыми) функциями являются вероятности состояний.
- Если $\boldsymbol{p_i(t)}$ **–** вероятность пребывания системы в состоянии $\boldsymbol{S_i}$ в момент времени t***, то***

$$\sum_{k=1}^{N} p_k(t) = 1, \text{ где } N - \text{число состояний системы}$$



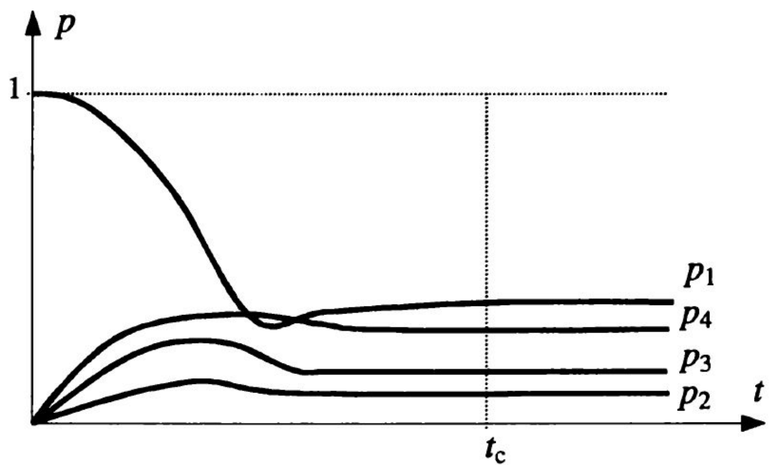
λ_{ij} – *интенсивность перехода из состояния* i *в состояние* j;

S_k - *состояния системы*

Граф состояний системы

Распределение вероятностей состояний. Финальные вероятности

- Для решения уравнений Колмогорова необходимо задать **начальные условия**, к примеру: $\boldsymbol{p_1(0)=1}$ **–** система в состоянии $\boldsymbol{S_1}$ в момент времени $\boldsymbol{t_0}$.



Распределение вероятностей состояний.

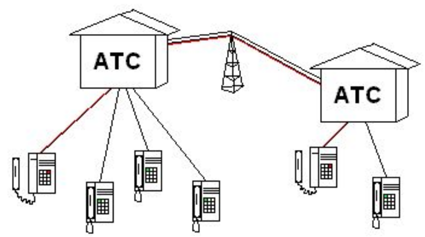
- ***Финальные вероятности*** **–** пределы вероятности состояний системы при $t \to \infty$, не зависящие от начального состояния системы: p_1, p_2, p_3, p_4. При этом:

1) $p_i = const$;

2) p_i *- среднее относительное время пребывания системы в состоянии* S_k

Системы массового обслуживания

- Системы, на вход которых подаётся <u>случайный поток</u> однотипных ***заявок (событий)***, обрабатываемых одним или несколькими однотипными ***каналами (устройствами)***.



•СМО с очередью

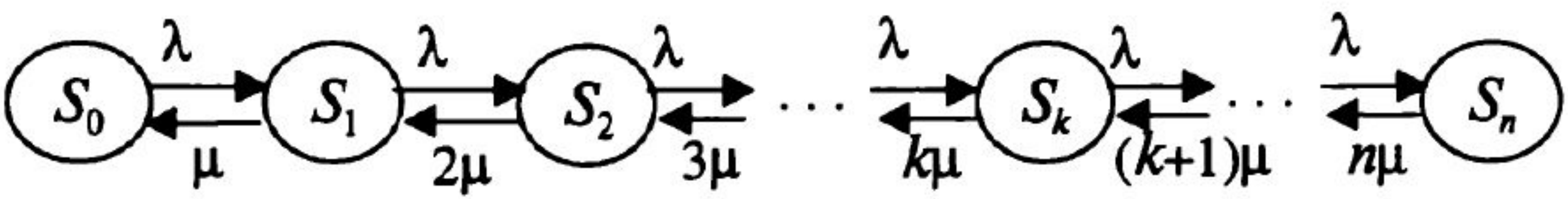
- <u>Параметры эффективности СМО (средние показатели):</u>

1. Nr – число заявок;
2. Nc – число занятых каналов;
3. Lq - длина очереди;
4. T_{hold} – время ожидания в очереди;
5. Ndr – число заявок, получивших отказ в обслуживании.

Модель n-канальной СМО с отказами

- **<u>Начальные данные:</u>**

1. Каналы однотипны.
2. Время обслуживания случайно, μ - интенсивность его простейшего потока.
3. λ - **интенсивность** простейшего **потока заявок**.
4. **n+1** состояний системы; S_o – все каналы свободны; S_1 – занят один канал, S_n – занято n каналов.
5. Если все каналы **заняты**, то заявка не обслуживается.



Граф состояний системы.

Параметры СМО. Формулы Эрланга.

- Приведённая интенсивность заявок: $$\boxed{\alpha = \frac{\lambda}{\mu}}$$
- Вероятность пребывания системы в состоянии S_k:

$$\boxed{p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0, \; где \; p_0 = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\alpha^k}{k!}\right)^{-1}}$$

Формулы Эрланга

- Вероятность отказа системы:

$$\boxed{p_{отк} = p_n = \frac{\alpha^n}{n!} p_0}$$

- Вероятность обслуживания заявки:

$$\boxed{Q = 1 - p_{отк} = 1 - \frac{\alpha^n}{n!} p_0}$$

Показатели эффективности каналов СМО

- Абсолютная пропускная способность (среднее число заявок, обслуженных в единицу времени):

$$\boxed{A = \lambda Q}$$

- Среднее число загруженных каналов:

$$\boxed{N_з = p_1 + 2p_2 + \ldots + np_n}$$

- Коэффициент загрузки одного канала:

$$\boxed{K_з = \frac{N_з}{n}, \text{где } n - \text{общее число каналов.}}$$

Резюме по системам массового обслуживания

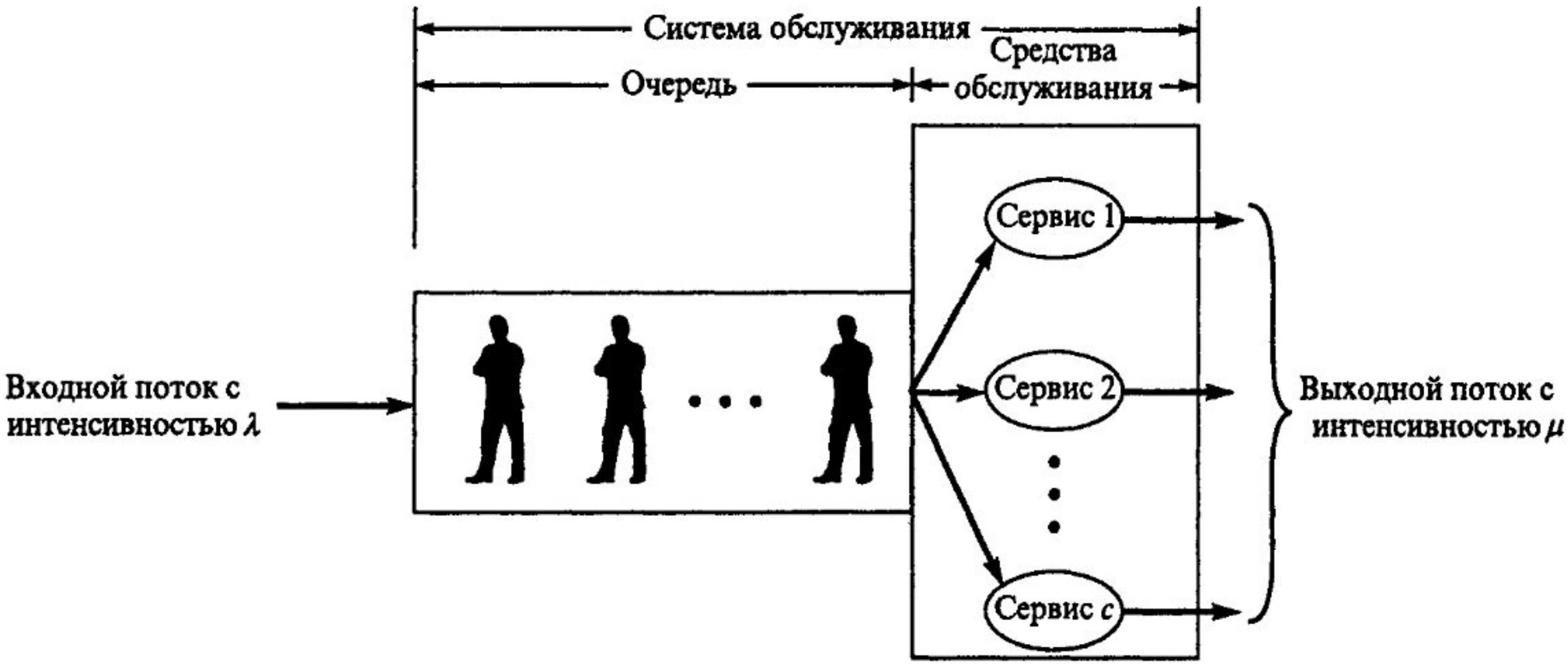
- Основными элементами СМО являются:

1) входной поток заявок;
2) очередь;
3) каналы обслуживания;
4)выходной поток заявок (обслуженные заявки).

- Роль *каналов* выполняют приборы, операторы, продавцы, линии связи.

- Предназначение СМО состоит в обслуживании потока заявок (требований), представляющих последовательность событий, поступающих ***нерегулярно*** и в **заранее неизвестные** и **случайные** моменты времени.

Пример графической модели СМО



- Случайный характер потока заявок и времени их обслуживания объясняет **неравномерность загрузки СМО.**

Примеры применения СМО в нефтегазовой отрасли

Технология реализации СПГ.

Распределённые компрессорные станции.

Линейное производственное управление магистральными газопроводами.

Спасибо за внимание!