



Российский государственный университет нефти и газа (НИУ)
имени И.М. Губкина

Кафедра автоматизированных систем управления

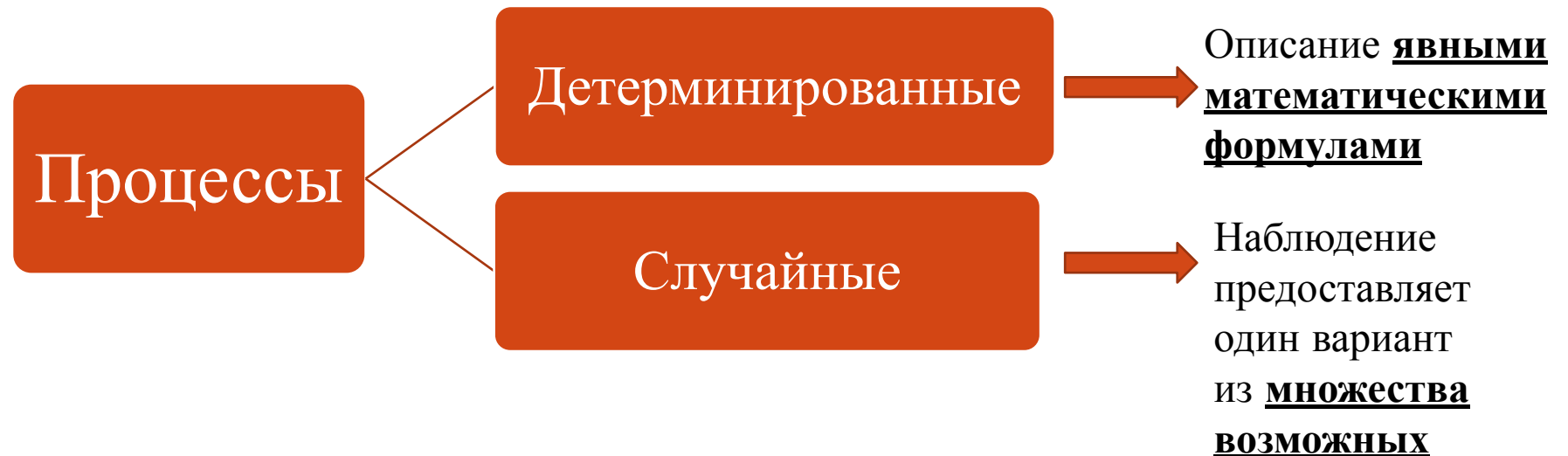
Моделирование марковских случайных процессов

асс. Мухина А. Г.

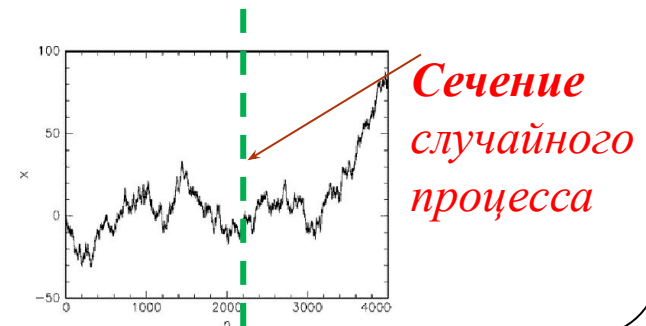
*г. Москва
2018 г.*

процессов

● *Процесс* – совокупность данных, полученных в результате временных наблюдений реального физического явления.



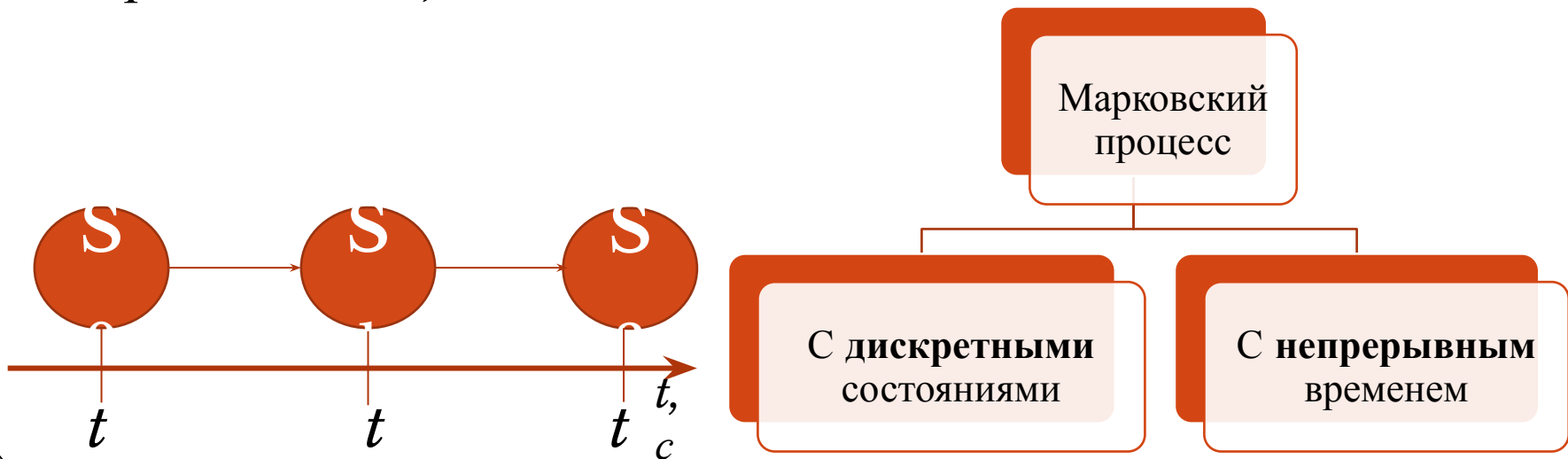
● *Случайный процесс* описывается совокупностью **выборочных функций**, выражающих случайное явление.



Марковский случайный процесс

«То, что мы называем случайностями — всего лишь закономерности, которые мы не в состоянии расшифровать»

- Случайный процесс называется *марковским*, если для любого момента времени t_0 вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его текущего состояния $X(t_0)$ и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние.
- Для марковского процесса *будущее* зависит от прошлого только через *настоящее*.



характеристики

- **Поток событий** – последовательность однотипных *ситуаций*, следующих одна за другой в **случайные** моменты времени.
- События, в отличие от ситуаций, обладают *вероятностью*.
- **Интенсивность потока** λ – среднее число событий, приходящихся на единицу времени.
- **Степень регулярности потока** ν_T – коэффициент вариации интервалов между событиями.

Простейший поток (стационарный пуассоновский)

Регулярный	Стационарный	Ординарный	Поток без последствия
<ul style="list-style-type: none">• Последовательное появление событий• Шаг Δt не изменяется	<ul style="list-style-type: none">• Вероятностные характеристики не зависят от времени• $\lambda = \text{const}$	<ul style="list-style-type: none">• Появление единичного события в момент времени t (не группами)	<ul style="list-style-type: none">• Число событий на участке τ_1 не зависит от количества событий на τ_2

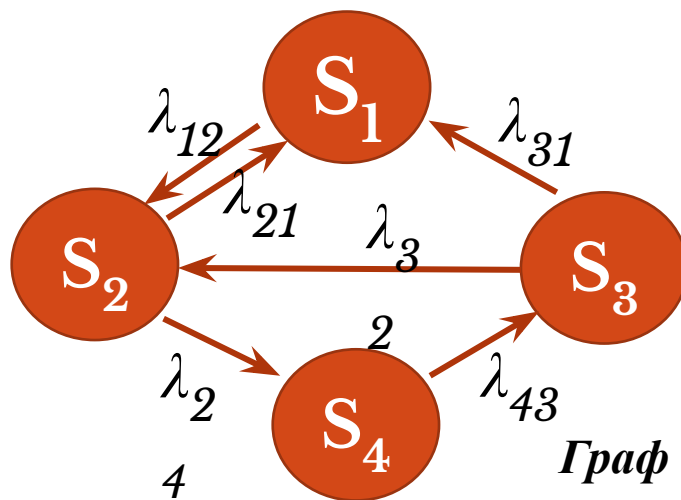
Поток Пальма (рекуррентный),

где интервалы T_1, T_2, \dots, T_m - случайные величины с произвольным распределением

моделированию марковских процессов

- **Уравнения Колмогорова** – дифференциальные уравнения особого вида, в которых неизвестными (искомыми) функциями являются вероятности состояний.
- Если $p_i(t)$ – вероятность пребывания системы в состоянии S_i в момент времени t , то

$$\sum_{k=1}^N p_k(t) = 1, \text{ где } N - \text{число состояний системы}$$



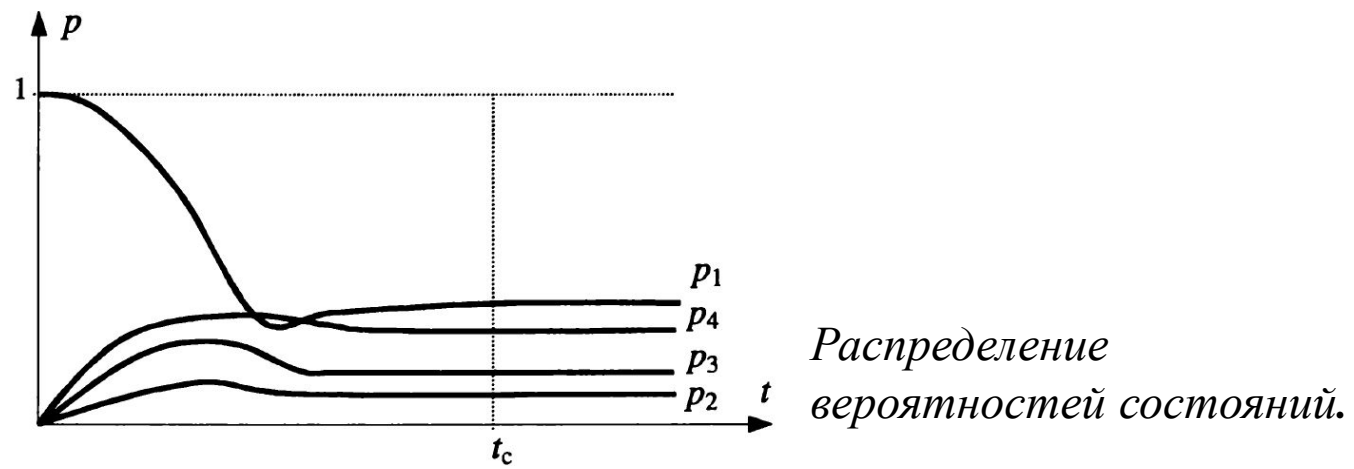
λ_{ij} – интенсивность перехода из состояния i в состояние j ;

S_k – состояния системы

Граф состояний системы

Распределение вероятностей состояний. Финальные вероятности

Для решения уравнений Колмогорова необходимо задать **начальные условия**, к примеру: $p_1(0)=1$ – система в состоянии S_1 в момент времени t_0

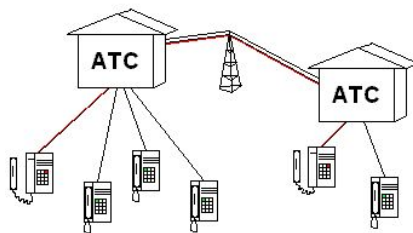


Финальные вероятности – пределы вероятности состояний системы при $t \rightarrow \infty$, не зависящие от начального состояния системы: p_1, p_2, p_3, p_4 .
При этом:

- 1) $p_i = const$;
- 2) p_i - среднее относительное время пребывания системы в состоянии S_k

СИСТЕМЫ МАССОВОГО обслуживания

Системы, на вход которых подаётся случайный поток однотипных *заявок (событий)*, обрабатываемых одним или несколькими однотипными *каналами (устройствами)*.



•СМО с очередью

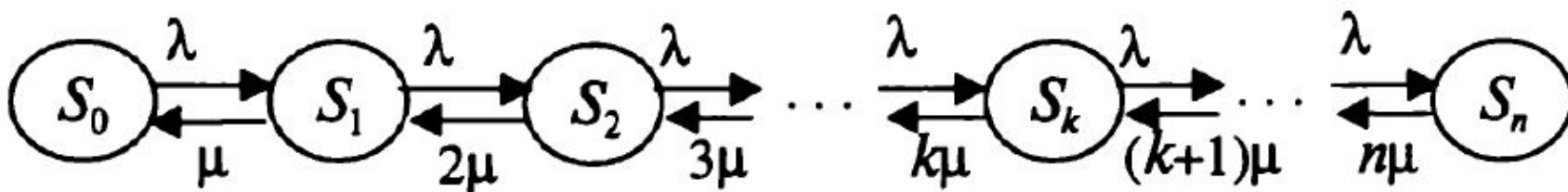
Параметры эффективности СМО (средние показатели):

1. N_r – число заявок;
2. N_c – число занятых каналов;
3. L_q - длина очереди;
4. T_{hold} – время ожидания в очереди;
5. N_{dr} – число заявок, получивших отказ в обслуживании.

МОДЕЛЬ П-КАНАЛЬНОЙ СМО С ОТКАЗАМИ

● Начальные данные:

1. Каналы однотипны.
2. Время обслуживания случайно, μ - интенсивность его простейшего потока.
3. λ - **интенсивность простейшего потока заявок.**
4. **$n+1$** состояний системы; S_0 - все каналы свободны; S_1 - занят один канал, S_n - занято n каналов.
5. Если все каналы **заняты**, то заявка не обслуживается.



Граф состояний системы.

Эрланга.

- Приведённая интенсивность заявок:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$$

- Вероятность пребывания системы в состоянии S_k :

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0, \text{ где } p_0 = \sum_{k=0}^n \left(\frac{\alpha^k}{k!}\right)^{-1}$$

Формулы Эрланга

- Вероятность отказа системы:

$$p_{отк} = p_n = \frac{\alpha^n}{n!} p_0$$

- Вероятность обслуживания заявки:

$$Q = 1 - p_{отк} = 1 - \frac{\alpha^n}{n!} p_0$$

Показатели эффективности каналов СМО

- Абсолютная пропускная способность (среднее число заявок, обслуженных в единицу времени):

$$A = \lambda Q$$

- Среднее число загруженных каналов:

$$N_3 = p_1 + 2p_2 + \dots + np_n$$

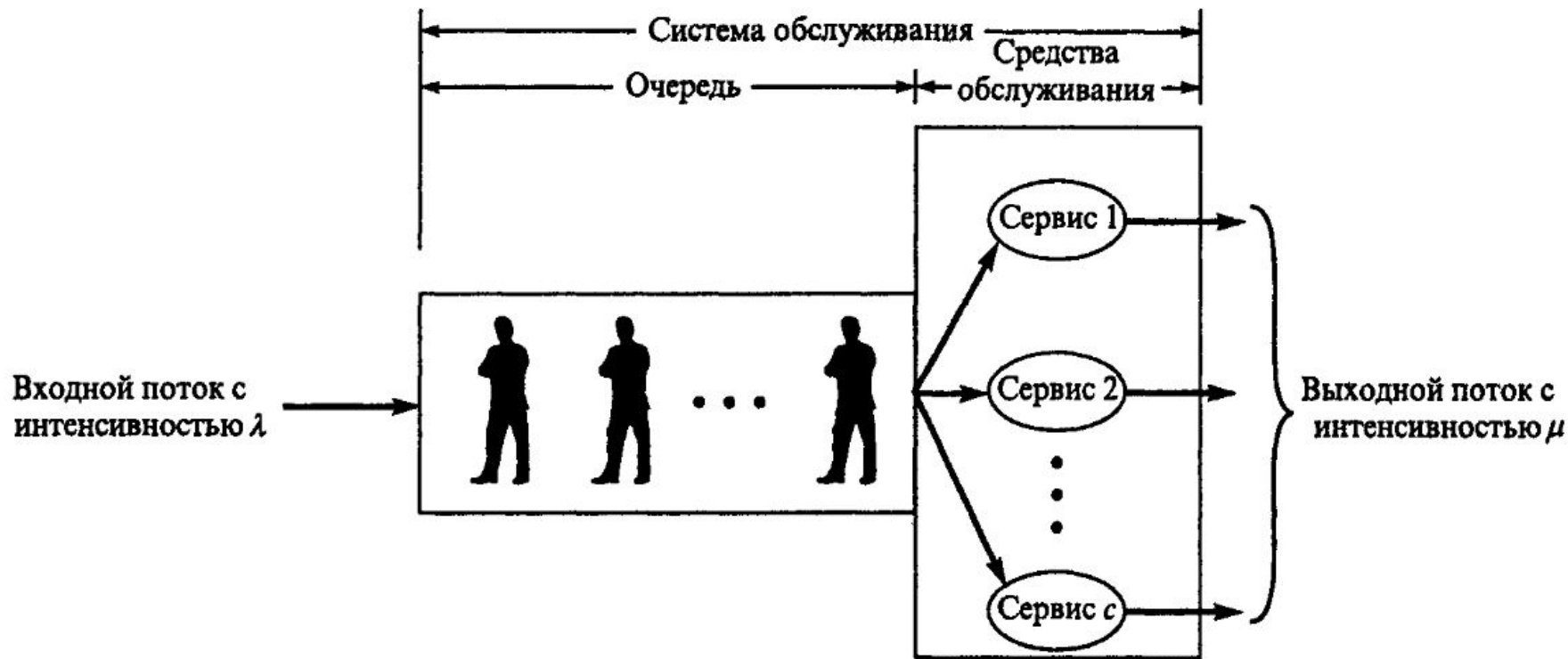
- Коэффициент загрузки одного канала:

$$K_3 = \frac{N_3}{n}, \text{ где } n \text{ – общее число каналов.}$$

Резюме по системам массового обслуживания

- Основными элементами СМО являются:
 - 1) входной поток заявок;
 - 2) очередь;
 - 3) каналы обслуживания;
 - 4) выходной поток заявок (обслуженные заявки).
- Роль *каналов* выполняют приборы, операторы, продавцы, линии связи.
- Предназначение СМО состоит в обслуживании потока заявок (требований), представляющих последовательность событий, поступающих *нерегулярно* и в **заранее неизвестные** и **случайные** моменты времени.

Пример графической модели СМО



- Случайный характер потока заявок и времени их обслуживания объясняет **неравномерность загрузки СМО**.

Примеры применения СМО в нефтегазовой отрасли



Технология реализации СПГ.



Распределённые компрессорные станции.



Линейное производственное управление магистральными газопроводами.

Спасибо за внимание!