

# Дискретная математика

## Лекция 1

Цель лекции: введение в курс  
дискретной математики, теория  
множеств

# Рекомендуемая литература

- Баврин И.И. Дискретная математика: учебник и задачник для прикладного бакалавриата.- М.: Издательство Юрайт, 2015.- 208 с.
- Селезнев С.Н. Основы дискретной математики.- М.: МГУ, 2010.- 59 с.
- Романов В.Ф. Основы дискретной математики. Методические указания к практическим занятиям.- Владимир.: Изд-во ВлГУ, 2008 г. – 39 с.
- Интернет ресурс. Интернет университет информационных технологий.<http://www.intuit.ru>

# Введение



МАТЕМАТИКА

Условное деление

Непрерывная математика  
Теория пределов и  
непрерывности

Дискретная математика  
Прерывная.  
Основа информатики

числа

Являются основами для создания систем

Числа и другие  
объекты

Аналоговые электронные  
системы

Цифровые электронные системы  
Программные и аппаратные

# Разделы дискретной математики

- Теория множеств.
- Комбинаторика
- Теория графов.
- Алгебра логики.
- Матрицы.
- Разностные уравнения.
- Дискретная вероятность.

# Задачи курса

- **УМЕТЬ**
- Правильно употреблять математическую символику и оперировать математическим инструментарием.
- Классифицировать задачу. Выбирать модель представления задачи.
- **ВЛАДЕТЬ**
- Основами математического моделирования.

# Раздел 1. Элементы теории

## 1.1 Множества и операции над ними

- Множество – это совокупность, собрание каких-либо объектов, объединенные общими признаками. (A, B, C...)
- Элементы множества – это объекты, которые образуют множество. (a, b, c..)
- Если элементами множества являются цифры – это числовое множество

$$a \in A \quad a \notin A$$

Принадлежит, содержится, а из A, а входит в A

# Примеры

- Учебник –страницы.
- Группа ВТ-115 – ФИО студентов.
- Серия микросхем – состав серии.

# Обозначения числовых множеств

$\mathbb{N}$  – множество натуральных чисел;

$\mathbb{N}_0$  – множество неотрицательных  
целых чисел;

$\mathbb{Z}$  – множество целых чисел;

$\mathbb{R}$  – множество действительных  
чисел;

$\mathbb{C}$  – множество комплексных  
чисел.



# Названия и обозначения ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

Множество действительных чисел удовлетворяющих условию:

$$a \leq x \leq b \quad \longrightarrow \quad [a; b]$$

Обозначение в теории множеств

$$a < x < b \quad \longrightarrow \quad ((a; b))$$

# Названия и обозначения ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

Множество действительных чисел удовлетворяющих условию:

$$a \leq x < b \quad \longrightarrow \quad [a; b)$$

Альтернативное обозначение

$$a < x \leq b \quad \longrightarrow \quad ((a; b])$$

# Названия и обозначения ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

Множество действительных чисел удовлетворяющих условию:

$$x < a \quad \longrightarrow \quad (-\infty; a)$$

Альтернативное обозначение

$$x \leq a \quad \longrightarrow \quad ((-\infty; a])$$

# Названия и обозначения ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

Множество действительных чисел удовлетворяющих условию:

$$x > b \quad \longrightarrow \quad (b; +\infty)$$

Альтернативное обозначение

$$x \geq b \quad \longrightarrow \quad ([b; +\infty))$$

# Названия и обозначения ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

- Множество всех действительных чисел обозначается:

$$\left(-\infty; +\infty\right) \text{ или } |x| < +\infty$$

или

**R**

Множество всех положительных чисел называют натуральным рядом или множеством натуральных чисел и обозначают ,буквой N

# Множества конечные и бесконечные

- Множество содержащее конечное число элементов называют **конечным**, в противоположном случае множество называют **бесконечным**.
- **ПРИМЕР:** Множество студентов в группе – конечное множество.
- **ПРИМЕР:** Множество транзисторов в ИС – конечное множество.
- **ПРИМЕР:**  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$  – бесконечные множества.

# Формы задания множества

## 1 способ

- **Например:**  $A = \{1, 2, 3\}$  – означает, что множество  $A$  состоит из элементов 1, 2, 3. Это конечное множество.
- **Например:**  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$  . Бесконечное МНОЖЕСТВО.

Первый способ задания множества заключается в явном перечислении его элементов. При этом порядок перечисления элементов не имеет значения.

**ВАЖНО** – порядок перечисления будет важен в разделе КОМБИНАТОРИКА.

# Формы задания множества

## 2 способ

- Заключается в описании элементов определяющим свойством  $P(x)$ , общим для всех элементов множества.
- Например:  $A = \{x: P(x)\}$
- Например:  $A = \{x: x=2k, k \in \mathbb{N}\}$   
A - Множество положительных четных чисел 2,4,6,...и до бесконечности.
- $B = \{x: 0 < x < 10 \text{ и } x \text{ – четное}\}$ ,  $B = \{2,4,6,8\}$



# Формы задания множества 2 способ

- $C = \{x: x \text{ – пациент больницы №4 г. Владимир}\}$
- $D = \{x: x \text{ – студент группы ВТ-115 ВлГУ}\}$

# Формы задания множества

## 3 способ

- Порождающая процедура описывает способ получения элементов множества из других объектов или уже полученных элементов множества.

# Равенство множеств

- Если множество  $A$  и множество  $B$  состоит из одних и тех же элементов, то такие множества называют равными. Равные множества обозначаются:

Например:  $A=B$   
 $\{1,2\} = \{2,1\}$

или  $A = \{1 < x < 4, x - \text{целое}\}$

$$C = \{x : x^2 - 5x + 6 = 0\}$$

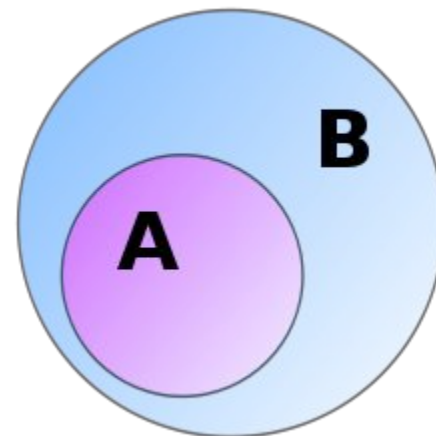
$A=C$  ? Докажите

# Подмножество множества

- Если имеется два множества  $A$  и  $B$  и известно, что каждый элемент множества  $B$  является элементом множества  $A$ , то множество  $B$  является подмножеством множества  $A$ .

$$B \subset A$$

↑  
Знак включения



В содержит А

Говорят, что  $A$  содержит  $B$  или  $B$  включено в  $A$

# Подмножество множества

- **Пример 1:** Множество четных чисел, есть подмножество множества целых чисел.
- **Пример 2:**  $A = \{x: x \text{ – группа студентов ВТ}\}$   
 $B = \{b: b \text{ – факультет ИТ}\},$   
то  $A$  подмножество  $B$

# ТЕОРЕМА 1

• Если

$$B \subset A \text{ а}$$

$$A \subset B \text{ то } A=B$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1. Любой элемент из множества  $B$  является элементом множества  $A$ .
2. Любой элемент из множества  $A$  является элементом множества  $B$ .

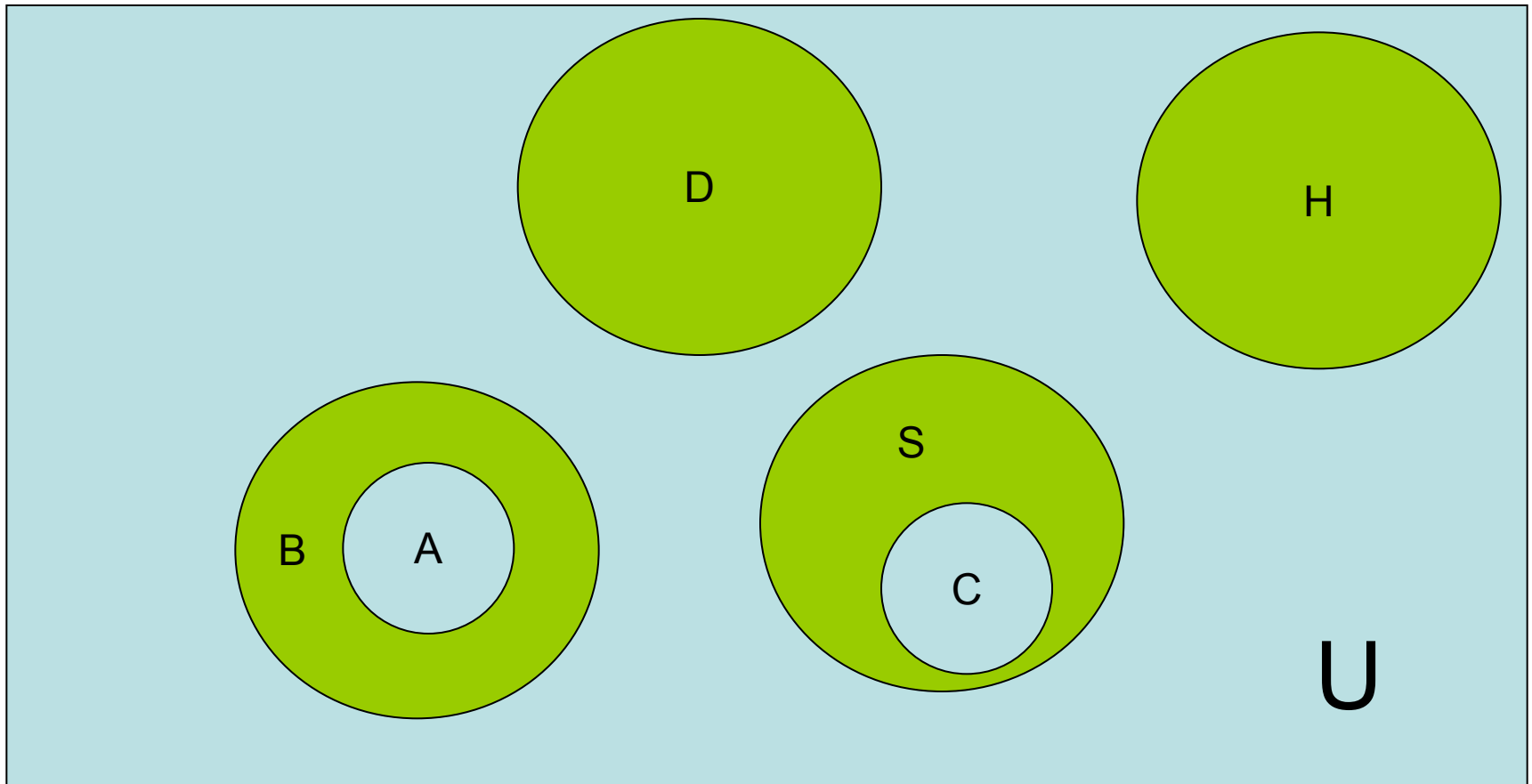
То есть множество  $A$  и  $B$  состоят из одних и тех же элементов - это означает, что  $A=B$

# Определение - булеан

- Элементами множества могут быть подмножества.
- Множество всех подмножеств множества  $A$  называется его булеаном или множеством-степенью и обозначается:  $P(A)$  или

$$2^A$$

# Универсальное множество

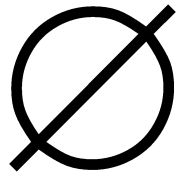


Множество  $U$  – универсальное множество, которое задает область исследования



# Пустое множество

- Множество, не содержащее ни одного элемента называется пустым и обозначается знаком:



**Пример 1:** множество людей на солнце.

**Пример 2:** множество действительных корней уравнения:

$$x^2 + 1 = 0$$

# ТЕОРЕМА 2

- Пустое множество является подмножеством любого множества.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

*Из определения подмножества следует, что  $B$  является подмножеством  $A$ , если  $B$  не содержит элементов не являющихся элементами множества  $A$ .*

*Но пустое множество не содержит ни одного элемента, поэтому оно не содержит и элементов не принадлежащих  $A$ .*

ВЫВОД: пустое подмножество, есть подмножество любого множества.

# Операции над множествами

## Объединение или сумма

- **ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** если даны два множества **A** и **B**, то их объединением или суммой будет называться множество **C**, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств **A** и **B**.

$$C = A \boxplus B$$

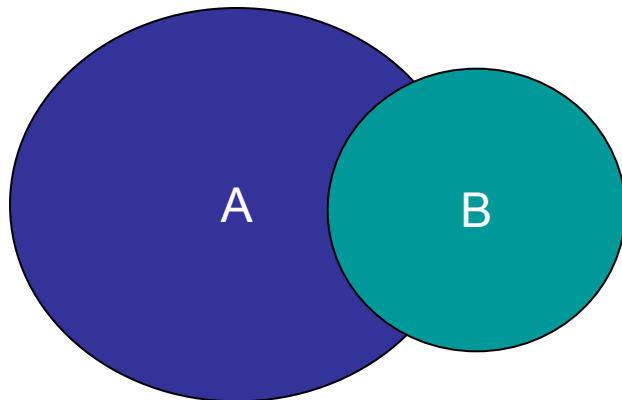
Знак объединения

$$(C=A+B)$$

# Пример операции объединения

- ПРИМЕР 1:  $\{1,2,3\} \boxplus \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$

ПРИМЕР 2:  $A$  – множество компонентов резисторов,  
 $B$  – множество компонентов диодов, тогда  
объединение  $A$  и  $B$  – это множество  $C$   
компонентов, которые являются либо резисторами  
либо диодами



# Следствие операции объединения

$$A \boxtimes A = A$$

$$A \subset (A \boxtimes B)$$

$$B \subset (A \boxtimes B)$$

# Объединение N множеств

- Операция объединения может быть распространена на N множеств. Тогда записывают:

$$C = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N$$

ИЛИ 
$$C = \bigcup_{k=1}^n A_k$$

# Задача

$$A \boxtimes \emptyset = ?$$

# Операция пересечения или умножения

- **ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** если даны два множества **A** и **B**, то пересечением их будет называться множество **C**, которое будет состоять из элементов принадлежащих одновременно множеству **A** и множеству **B**.

$$C = A \boxtimes B$$

$$C = A \cap B$$

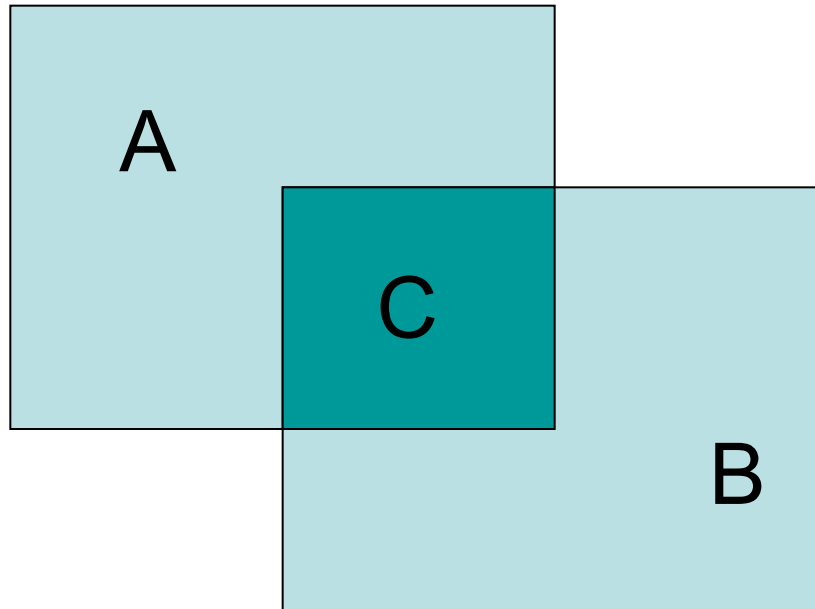
Знак пересечения





# Пример операции пересечения

- ПРИМЕР:  $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2, 3\}$



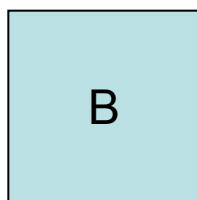
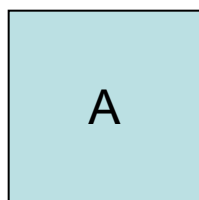
# СЛЕДСТВИЯ операции пересечения

1.  $A \cap A = A$

2.  $(A \cap B) \subset A$

3.  $(A \cap B) \subset B$

Для некоторой пары множеств может оказаться, что их пересечение равно пустому множеству. НАПРИМЕР  $A=\{1,2,3\}$   $B=\{4,5,6\}$ , то пересечение  $A$  с  $B$  равно пустому множеству.



$$A \cap B = \emptyset$$

# Непересекающиеся множества

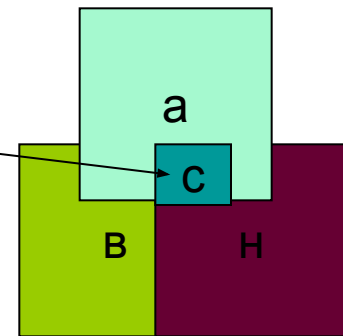
- Множества, пересечение которых, является пустым множеством называются непересекающимися.
- **ПРИМЕР 1:** А – множество целых положительных чисел, В – множество целых отрицательных чисел. А и В – непересекающиеся множества.
- **ПРИМЕР 2:** А – множество людей старше 20 лет, В – множество людей младше 15 лет.

# Пересечение N множеств

- Операция пересечения может быть распространена на N множеств. Тогда записывают

$$C = A_1 \cap A_2 \dots \cap A_N$$

$$\text{или } C = \bigcap_{k=1}^n A_k$$

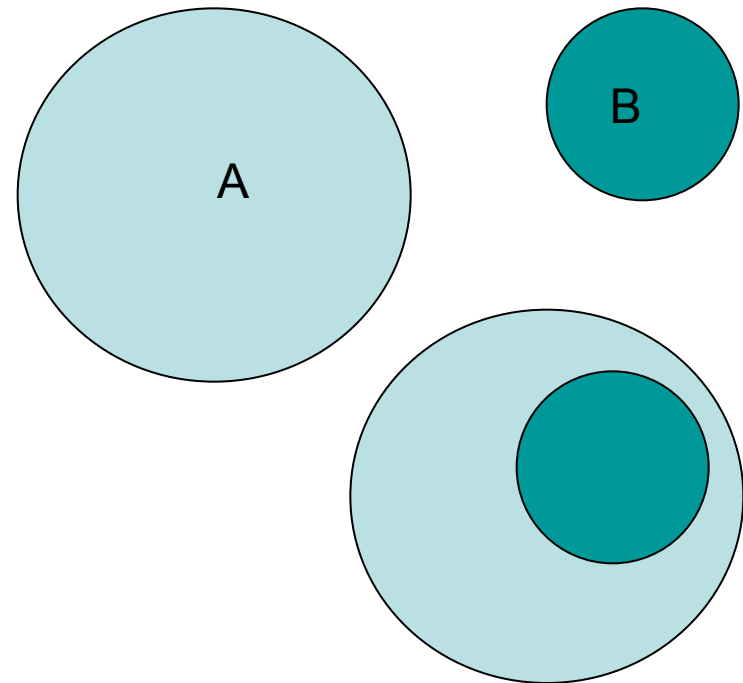


# Вычитание множеств

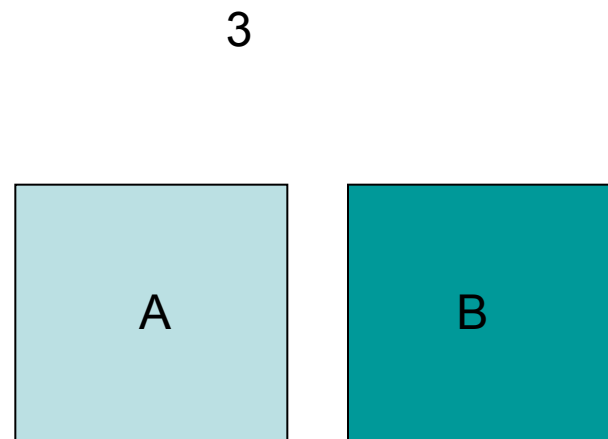
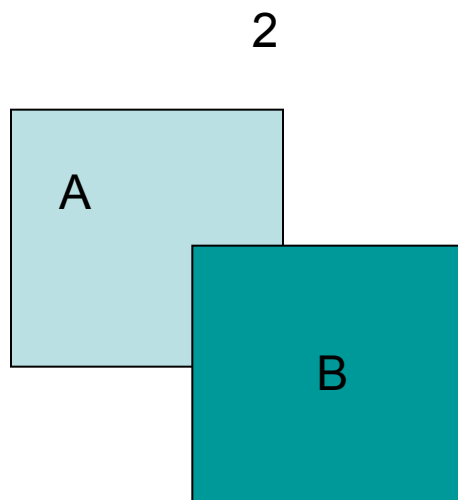
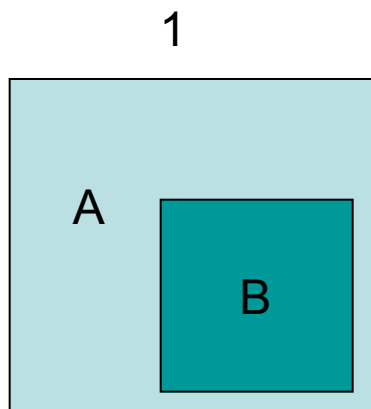
- **ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Разностью множеств **A** и **B** называется совокупность тех элементов множества **A**, которые не являются элементами множества **B**.

$A \setminus B$

Обозначение разности



# Варианты вычитания множеств



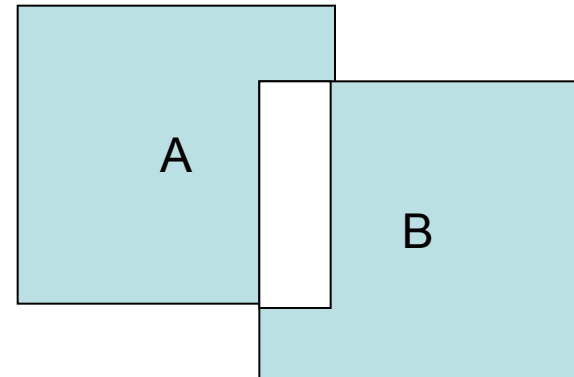
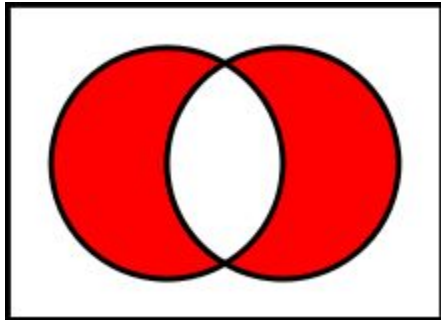
# Симметричная разность или кольцевая сумма

- **ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Симметричной разностью множеств **A** и **B** называется совокупность тех элементов множества **A** и **B**, которые не являются одновременно элементами множества **A** и **B**.

*A Δ B или*

Обозначение кольцевой суммы

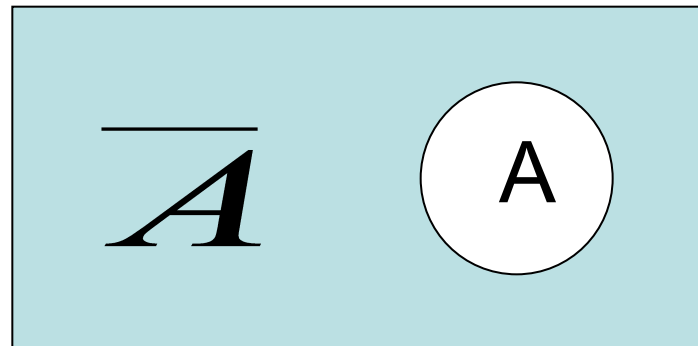
*A ⊕ B*



# Дополнение

- Дополнением множества  $A$  до универсального множества  $U$ , является частный случай разности:

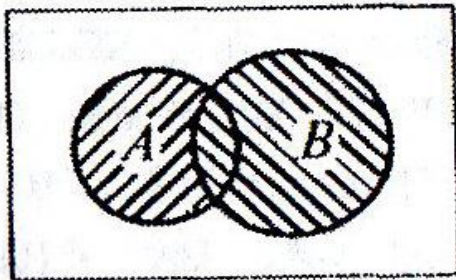
$$\overline{A} = U \setminus A$$



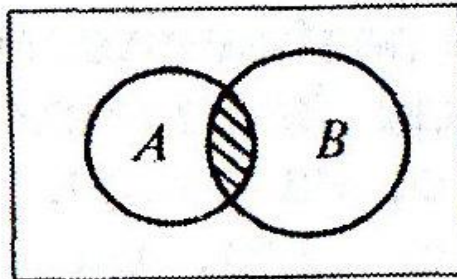


# Диаграммы Эйлера-Венна

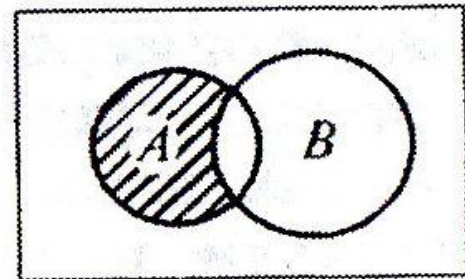
- Применяются для наглядного изображения соотношений между подмножествами какого либо универсального множества.



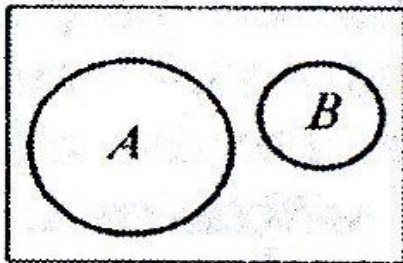
$$A \cup B$$



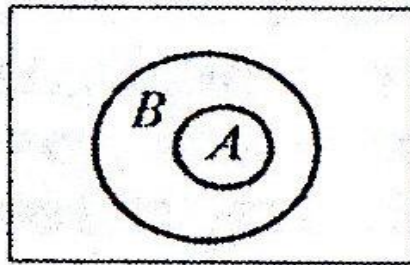
$$A \cap B$$



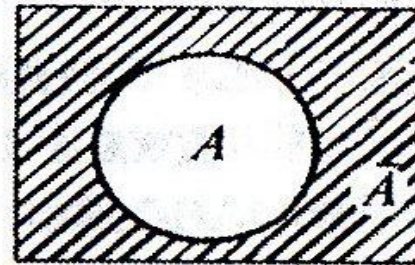
$$A \setminus B$$



$$A \cap B = \emptyset$$



$$A \subset B$$



$$\bar{A}$$

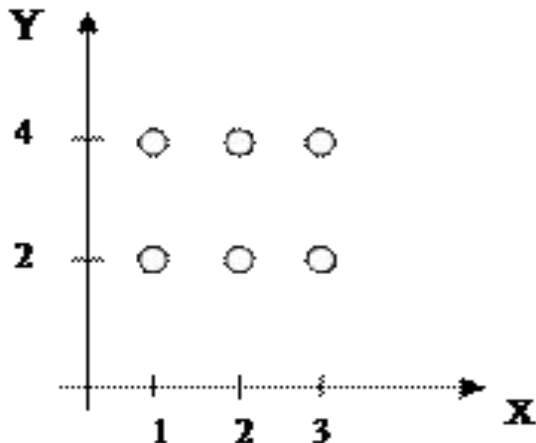
# Декартово произведение множества $A$ на множество $B$

- ОПРЕДЕЛЕНИЕ: это множество всех упорядоченных пар элементов из  $A$  и  $B$ .

$$A \times B = \{(x, y); x \in A, y \in B\}$$

ПРИМЕР:  $A = \{x, y, z\}$   $B = \{1, 2, 3\}$

Напишите элементы произведения множеств



Графическое представление декартова произведения множества  $X$  и множества  $Y$

# Декартова степень

$$\underbrace{X \times X \times \dots \times X}_n \longrightarrow X^n$$

ЗАДАЧА; дано множество  $X=\{0,1,2\}$  вычислить

$$X^3$$

# Порядок выполнения операций над множествами

- Дополнение – (пересечение- объединение) и разность - умножение.
- Изменить порядок выполнения можно заданием скобок.

$$A \boxtimes B \boxtimes C \boxtimes \overline{D} \setminus X$$

# Мощность множества

- Это характеристика количества элементов множества. Используется как класс эквивалентности над множествами, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие.

$$|A| \quad | \emptyset | = 0$$

# Законы алгебры множеств или алгебра Буля

- **1. ЗАКОН.** Свойство двойного дополнения.

Двойное дополнение множества  $A$  равно множеству  $A$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

# Законы алгебры множеств или алгебра Буля

- **2 ЗАКОН.** Свойство идемпотентности объединения или пересечения множества  $A$ .

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

# Законы алгебры множеств или алгебра Буля

- 3 ЗАКОН. Дополнения.

$$A \boxtimes \overline{A} = \emptyset$$

$$A \boxtimes \overline{A} = U$$



# Законы алгебры множеств или алгебра Буля

- 4. ЗАКОН. Свойство единицы.

$$A \boxtimes U = A$$

$$A \boxtimes U = U$$

# Законы алгебры множеств или алгебра Буля

- 5 ЗАКОН. Свойство нуля.

$$A \boxtimes \emptyset = \emptyset$$

$$A \boxtimes \emptyset = A$$

# Законы алгебры множеств или алгебра Буля

- 6 ЗАКОН. де Моргана.

$$\overline{A \boxtimes B} = \overline{A} \boxtimes \overline{B}$$

$$\overline{\overline{A} \boxtimes \overline{B}} = A \boxtimes B$$

# Законы алгебры множеств или алгебра Буля

- **7 ЗАКОН.** Коммутативность пересечения или объединения множеств.

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

# Законы алгебры множеств или алгебра Буля

- **8 ЗАКОН.** Ассоциативности пересечения или объединения.

$$A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

$$A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

# Законы алгебры множеств или алгебра Буля

- **9 ЗАКОН.** Дистрибутивность объединения относительно пересечения и пересечения относительно объединения

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

# Проверка закона де Моргана

- Пусть

$$x \in \overline{A \boxtimes B}$$

тогда  $x \in U$  и  $x \notin A \boxtimes B$ , следовательно

$x \notin A$  и  $x \notin B$ , отсюда  $x \in \overline{A}$  и  $x \in \overline{B}$

поэтому  $x \in \overline{A} \boxtimes \overline{B}$

следовательно  $\overline{A \boxtimes B} \subset \overline{A} \boxtimes \overline{B}$

# Проверка закона де Моргана

- Пусть

$x \in \overline{A} \boxtimes \overline{B}$ , тогда  $x \in \overline{A}$  и  $x \in \overline{B}$

отсюда  $x \in U$  и  $x \notin A$  и  $x \notin B$

Значит  $x \notin A \boxtimes B$  т.е.  $x \in \overline{A \boxtimes B}$

Следовательно  $\overline{A} \boxtimes \overline{B} \subset \overline{A \boxtimes B}$