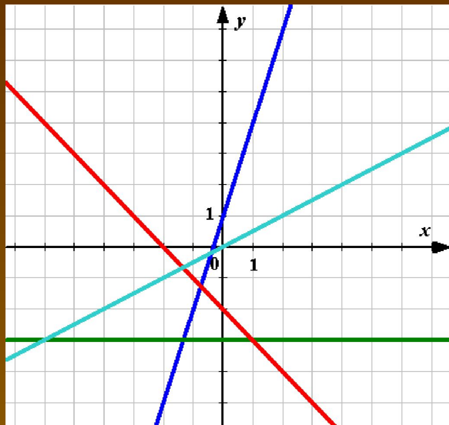
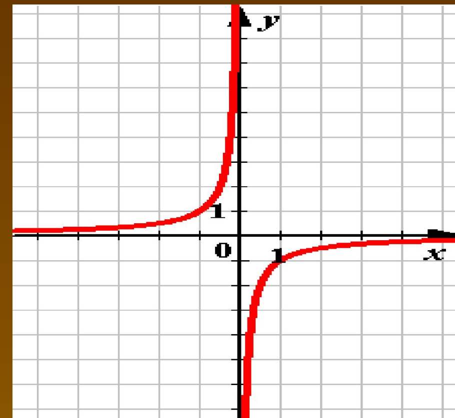
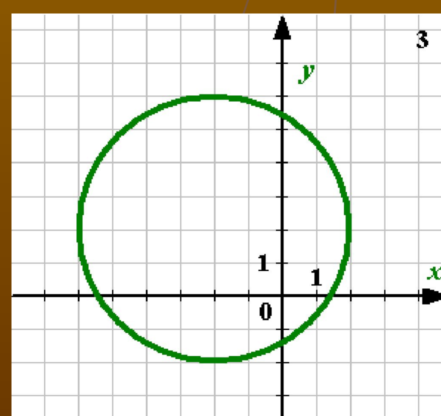
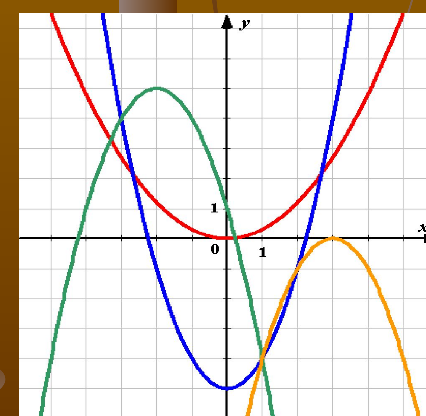



# Функции

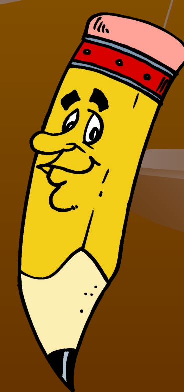


# Исторические сведения

- Начиная лишь с 17 века, в связи с проникновением в математику идеи переменных, понятие функции явно и вполне сознательно применяется. Путь к появлению понятия функции заложили в 17 веке французские ученые Франсуа Виет и Рене Декарт; они разработали единую буквенную математическую символику, которая вскоре получила всеобщее признание. Введено было единое обозначение: неизвестных - последними буквами латинского алфавита - x, y, z, известных - начальными буквами того же алфавита - a, b, c, ... и т.д. Под каждой буквой стало возможным понимать не только конкретные данные, но и многие другие; в математику пришла идея изменения. Тем самым появилась возможность записывать общие формулы . Кроме того, у Декарта и Ферма (1601-1665) в геометрических работах появляется отчетливое представление переменной величины и прямоугольной системы координат. В своей «Геометрии» в 1637 году Декарт дает понятие функции, как изменение ординаты точки в зависимости от изменения ее абсциссы; он систематически рассматривал лишь те кривые, которые можно точно представить спомощью уравнений, притом преимущественно алгебраических.

Постепенно понятие функции стало отождествляться, таким образом, с понятием аналитического выражения - формулы. В 1671 году Ньютон под функцией стал понимать переменную величину, которая изменяется с течением времени (называл в «флюентой»).Окончательную формулировку определения функции с аналитической точки зрения сделал в 1748 году ученик Бернулли Эйлер (во «Введении в анализ бесконечного»): «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого количества и чисел или постоянных количеств». Так понимали функцию на протяжении почти всего 18 века Даламбер (1717-1783), Лагранж (1736-1813), Фурье (1768-1830) и другие видные математики В 1936 году, 28-летний советский математик и механик С.Л. Соболев первым рассмотрел частный случай обобщенной функции, включающей и дельта-функцию, и применил созданную теорию к решению ряда задач математической физики. Важный вклад в развитие теории обобщенной функции внесли ученики и последователи Шварца - И.М. Гельфант, Г.Е. Шилов и др.



# Великий математик - Дирихле

**Дирихле Петер Густав Лежён (13.02.1805 - 05.05.1859)**

Немецкий математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (с 22.12.1837), член Лондонского королевского общества (1855), Парижской АН (1854), Берлинской АН.

В 1831-1855 профессор Берлинского, с 1855 Гёттингенского университетов. Основные труды по теории чисел и математическому анализу. В области математического анализа Дирихле впервые точно сформулировал и исследовал понятие условной сходимости ряда, установил признак сходимости ряда (т.н. признак Дирихле, 1862), дал (1829) строгое доказательство возможности разложения в ряд Фурье функции, имеющей конечное число максимумов и минимумов. Значительные работы Дирихле посвящены механике и математической физике (принцип Дирихле в теории гармонической функции).

Дирихле доказал теорему о существовании бесконечно большого числа простых чисел во всякой арифметической прогрессии из целых чисел, первый член и разность которой - числа взаимно простые и изучал (1837) закон распределения простых чисел в арифметических прогрессиях, в связи с чем ввел функциональные ряды особого вида (т.н. ряды Дирихле).

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рациональное,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное.} \end{cases}$$

# Что такое функция?

Функция-это зависимость одной переменной от другой. Когда каждому значению одной переменной соответствует единственное значение другой переменной.

Обозначать будем функцию y = f(x),

Где x- независимая переменная(аргумент, абсцисса)

y –зависимая переменная( функция или ордината)

# Различные способы задания функции

Аналитический, графический, табличный – наиболее простые, а потому наиболее популярные способы задания функции, для наших нужд этих способов вполне достаточно.

На самом деле в математике имеется довольно много различных способов задания функции и один из них – словесный, который используется в весьма своеобразных ситуациях.

# Аналитический способ

Функция задана аналитически- это значит , указывается формула, позволяющая получить значение зависимой переменной, подставив конкретное значение аргумента.

$$y = \frac{2x+3}{x-1}, x = 2, \text{тогда}$$

$$y = 7$$

# Табличный способ

При табличном способе задания функции заполняется таблица, где в первой строчке указывается значение независимой переменной, а во второй строчке- значение зависимой.Чем больше значений в таблице, тем точнее будет график.

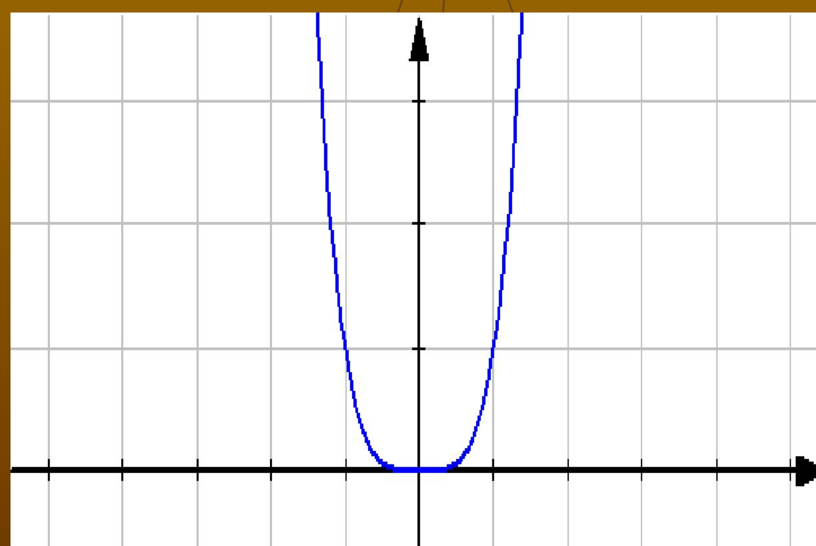
$y=x^2$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | - 3 | - 2 | - 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |

# Графический способ

Функция задается графически при помощи графика (множество точек на координатной плоскости, соединенных плавной линией).

$y=x^2$



# Словесный способ задания функции

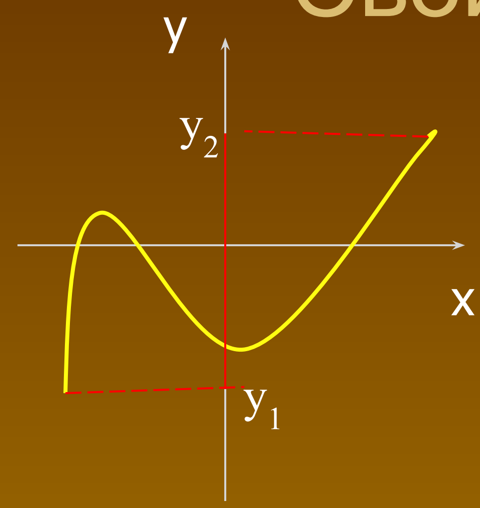
- Функция может быть задана и словесно, т. е. описательно.
- Например, так называемая функция Дирихле задается следующим образом:
- ***функция y равна 0 для всех рациональных и 1 для всех иррациональных значений аргумента x.***
- Такая функция не может быть задана таблицей,
- так как она определяется на всей числовой оси и множество значений ее аргумента бесконечно.
- Графически данная функция также не может быть задана.
- Аналитическое выражение для этой функции было, все же найдено, но оно так сложно, что не имеет практического значения. Словесный же способ дает краткое и ясное ее определение.

Из всех указанных способов задания функции наибольшие возможности для применения аппарата математического анализа дает аналитический способ, а наибольшей наглядностью обладает графический.

Вот почему математический анализ основывается на глубоком синтезе аналитических и геометрических методов.

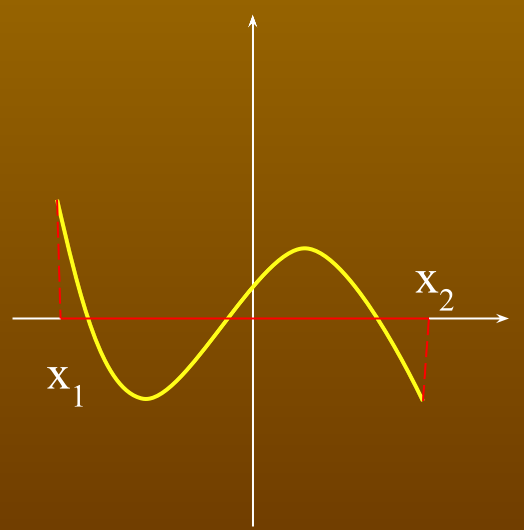
Исследование функций, заданных аналитически, проводится гораздо легче и становится наглядным, если параллельно рассматривать и графики этих функций.

# Свойства функций




- Область значения функции E (y) -множество значений переменной y, при которых функция существует или определена.

$$E(y)=[y_1;\ y_2]$$




- Область значения функции E (y) -множество значений переменной y, при которых функция существует или определена.

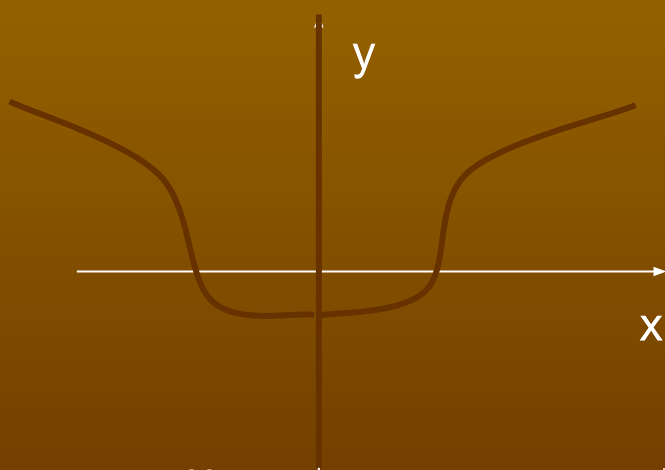
$$D(y)=[x_1;\ x_2]$$

# чётные и нечётные функции

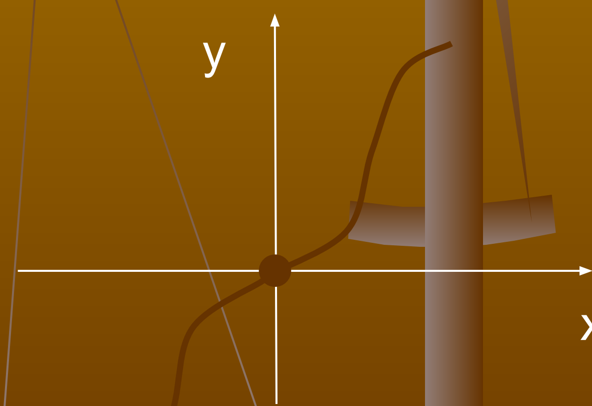
1. Область определения функции *D* (*f*) – симметричное

2. Для любого *X* выполняется равенство:

$$f(-x) = f(x)$$




$$f(-x) = -f(x)$$




Четность и нечетность функции. Функция y=f(x) называется четной, если для любого x выполняется равенство f(-x)=f(x). Функция нечетная, если для любого x выполняется равенство f(-x)=-f(x)

- Знакопостоянство функций.

Промежутками знакопостоянства называются такие промежутки, на которых функция не меняет своего знака, т.е. принимает либо только положительное, либо только отрицательное значение.

- Монотонность. Функция называется монотонной, если она только возрастает или только убывает.

Функция называется возрастающей, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е для любых $x_1$ и $x_2$ таких, что $x_1 > x_2$ , $x_1$ и $x_2$ € R выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$

Функция называется убывающей, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т.е. для любых $x_1$ и $x_2$ таких, что $x_1 > x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$

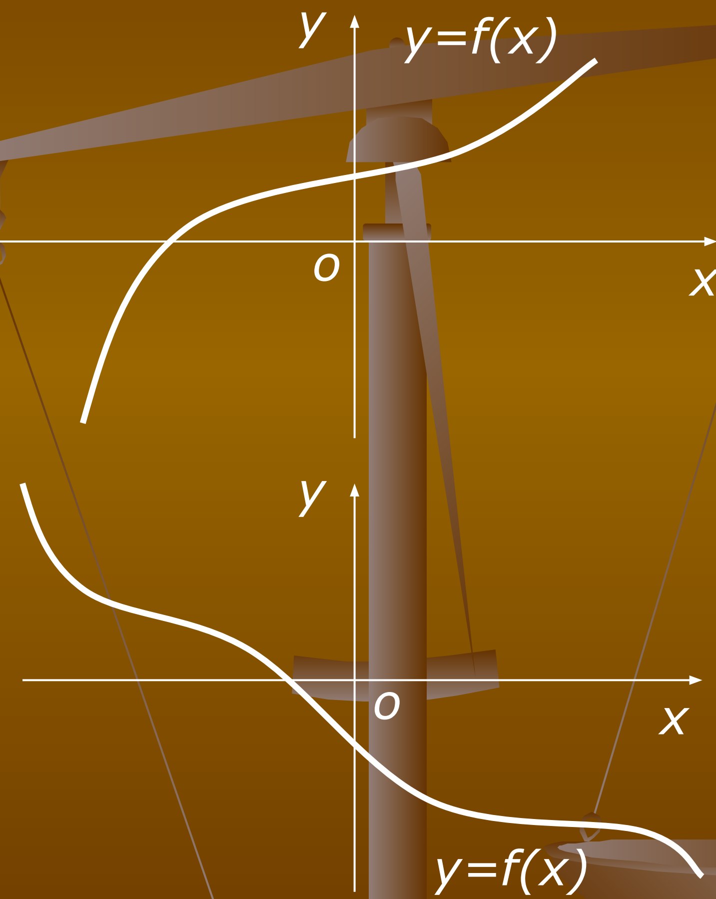
# Исследование функций на монотонность

- если двигаться по графику слева направо, то ординаты точек графика всё время увеличиваются («поднимаемся в горку»);

говорят, что функция возрастает;

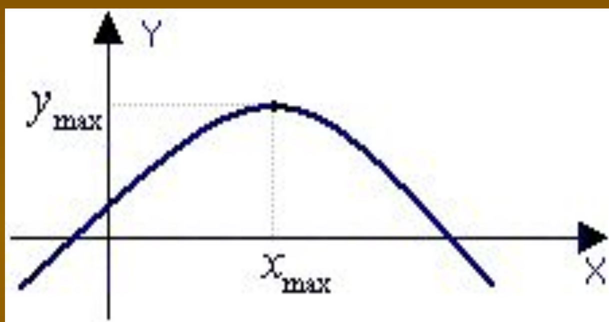
- если двигаться по графику слева направо, то ординаты точек графика всё время уменьшаются («спускаемся с горки»);

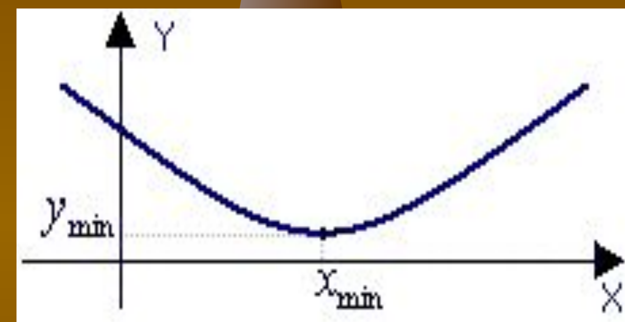
говорят, что функция убывает.



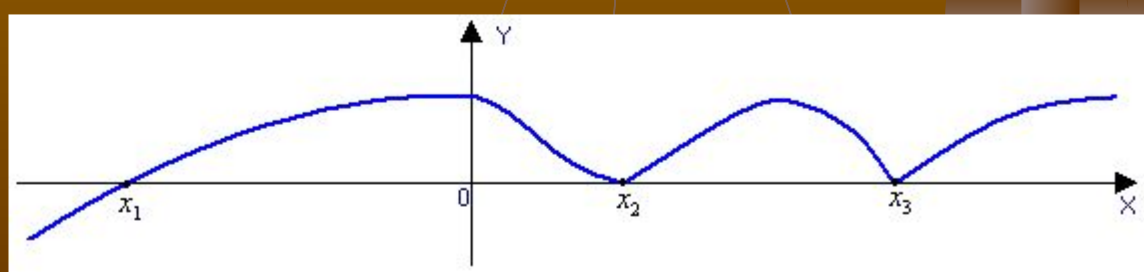
- Наибольшее и наименьшее значения функций.

Если функция задана графически, то ее наибольшее значение  в самой верхней точке графика, а наименьшее значение в самой нижней точке.



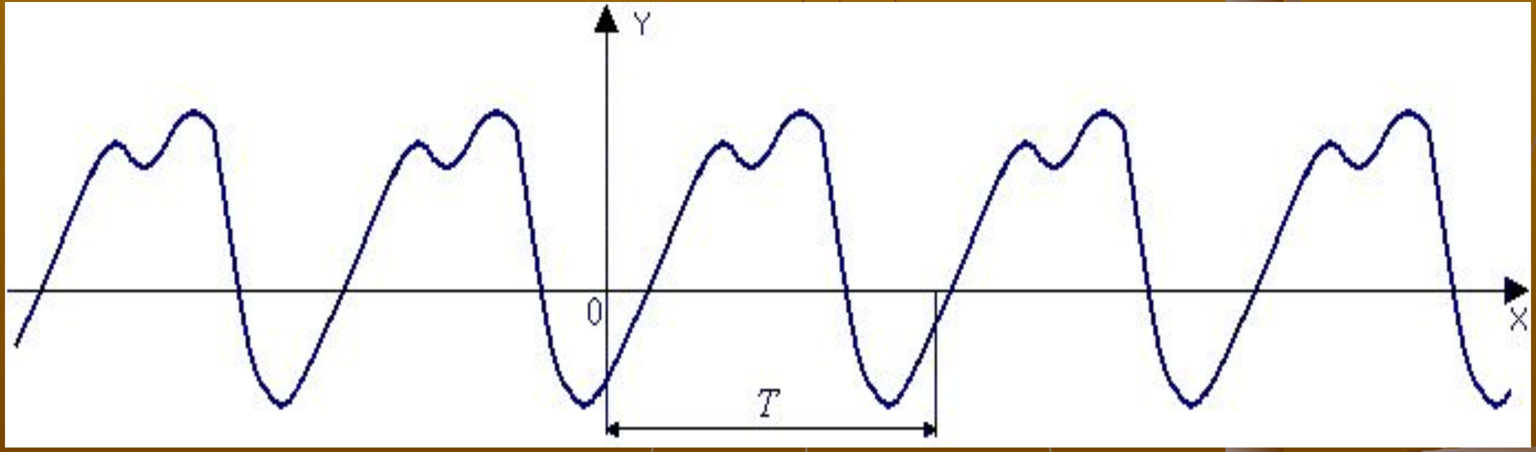




- Нули функции- это значения аргумента, при которых функция равна нулю.




$x_1$ , $x_2$, $x_3$ - нули функции $y = f(x)$

- Периодичность. Если функция задана графически, то она является периодической , если график повторяется через определенный интервал(период).



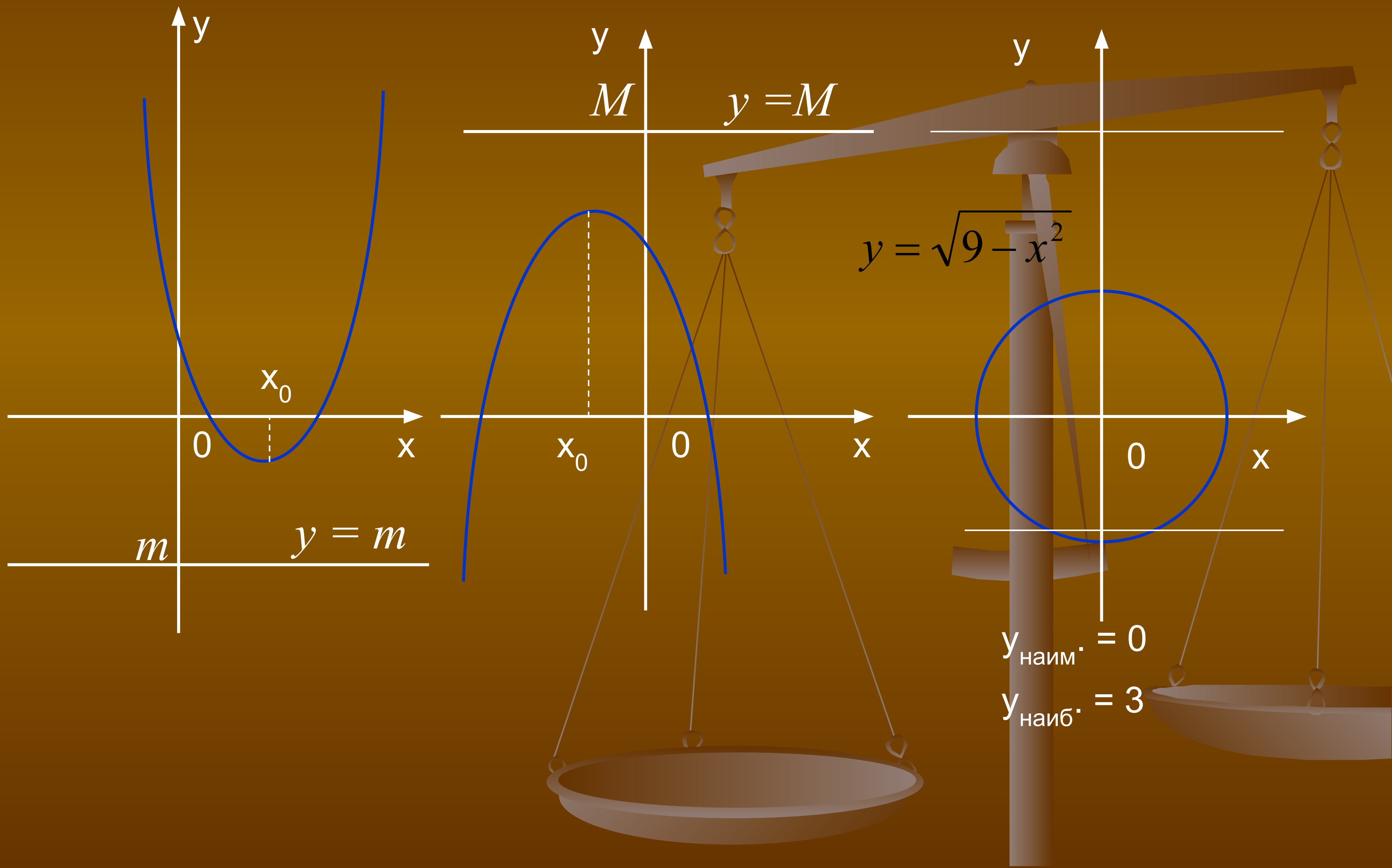
# Ограниченность функции

Функция $y = f(x)$ называют **ограниченной снизу на множестве $X \subset D(f)$**,

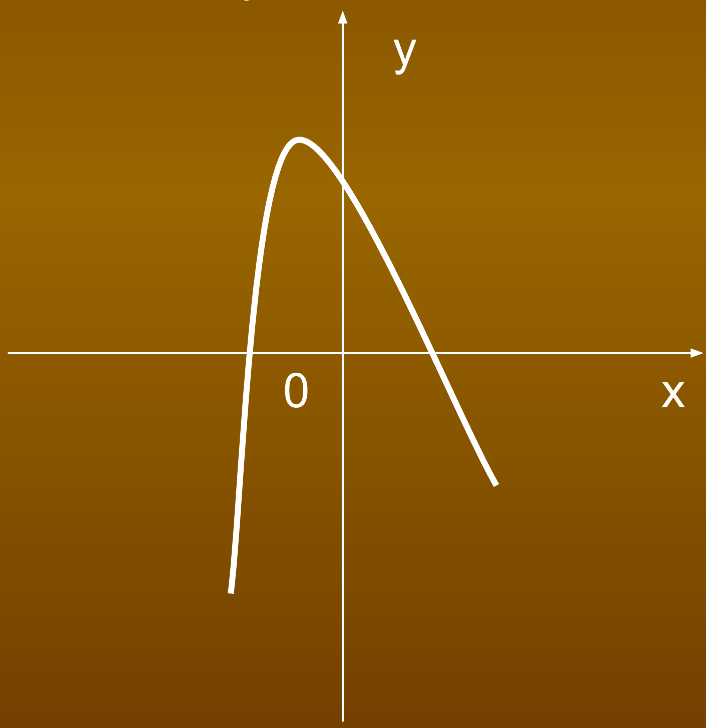
если все значения функции на множестве $x$ больше некоторого числа.

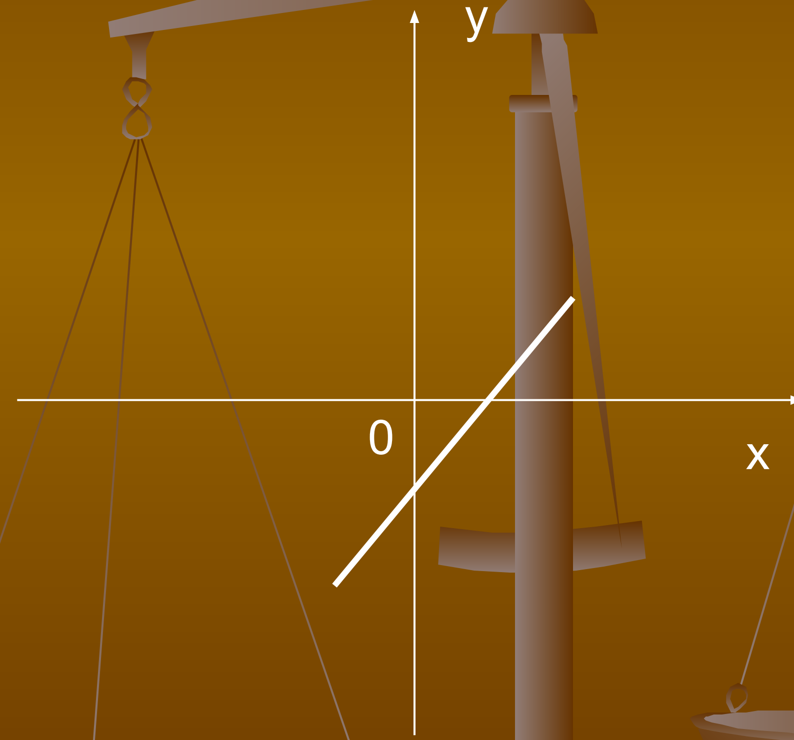
если существует число $m$ такое, что для любого значения $x$ выполняется неравенство $f(x) > m$.

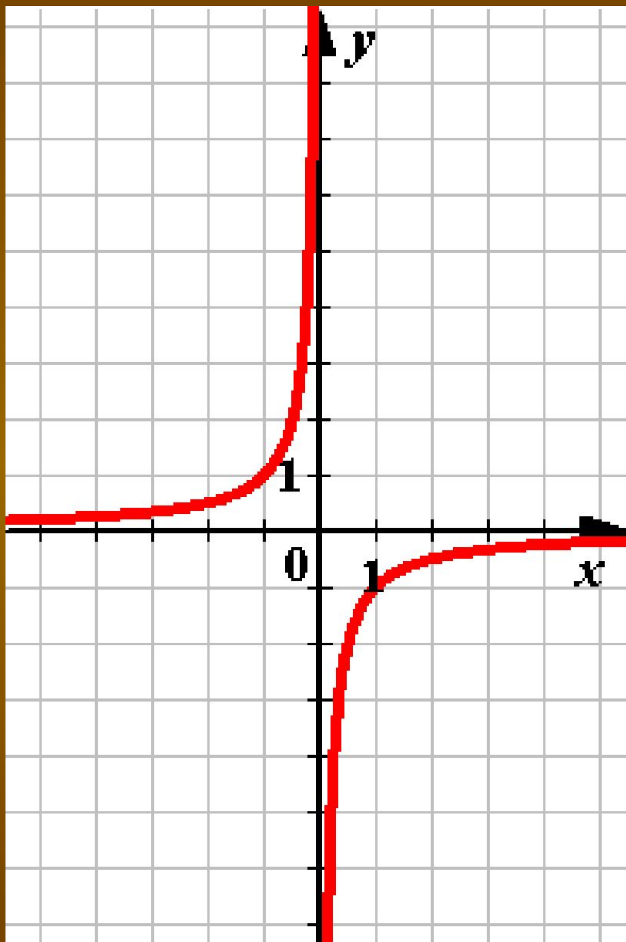
# Ограниченность функции



- Непрерывность функции. Если функция задана графически , то она непрерывна, если ее график представляет собой непрерывную линию, т.е линию, которую можно построить , не отрывая карандаша от листа бумаги.



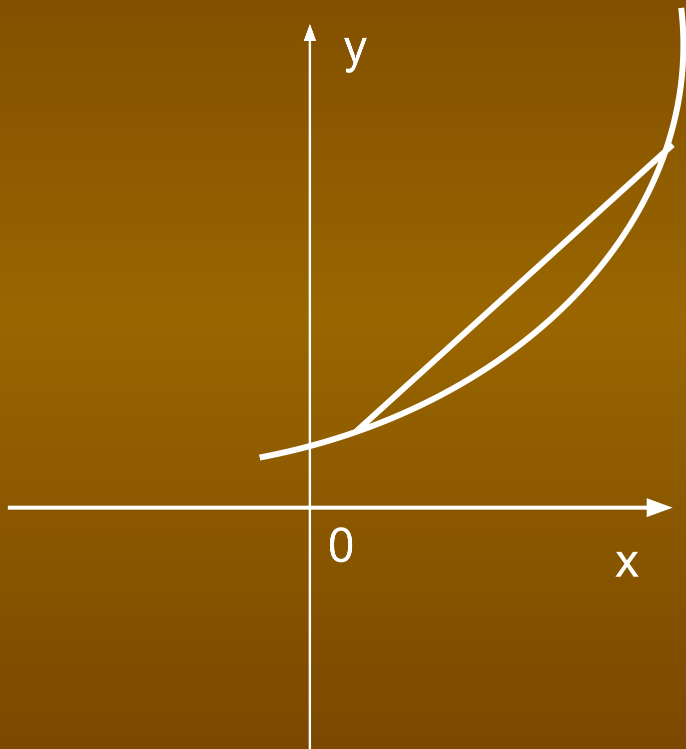



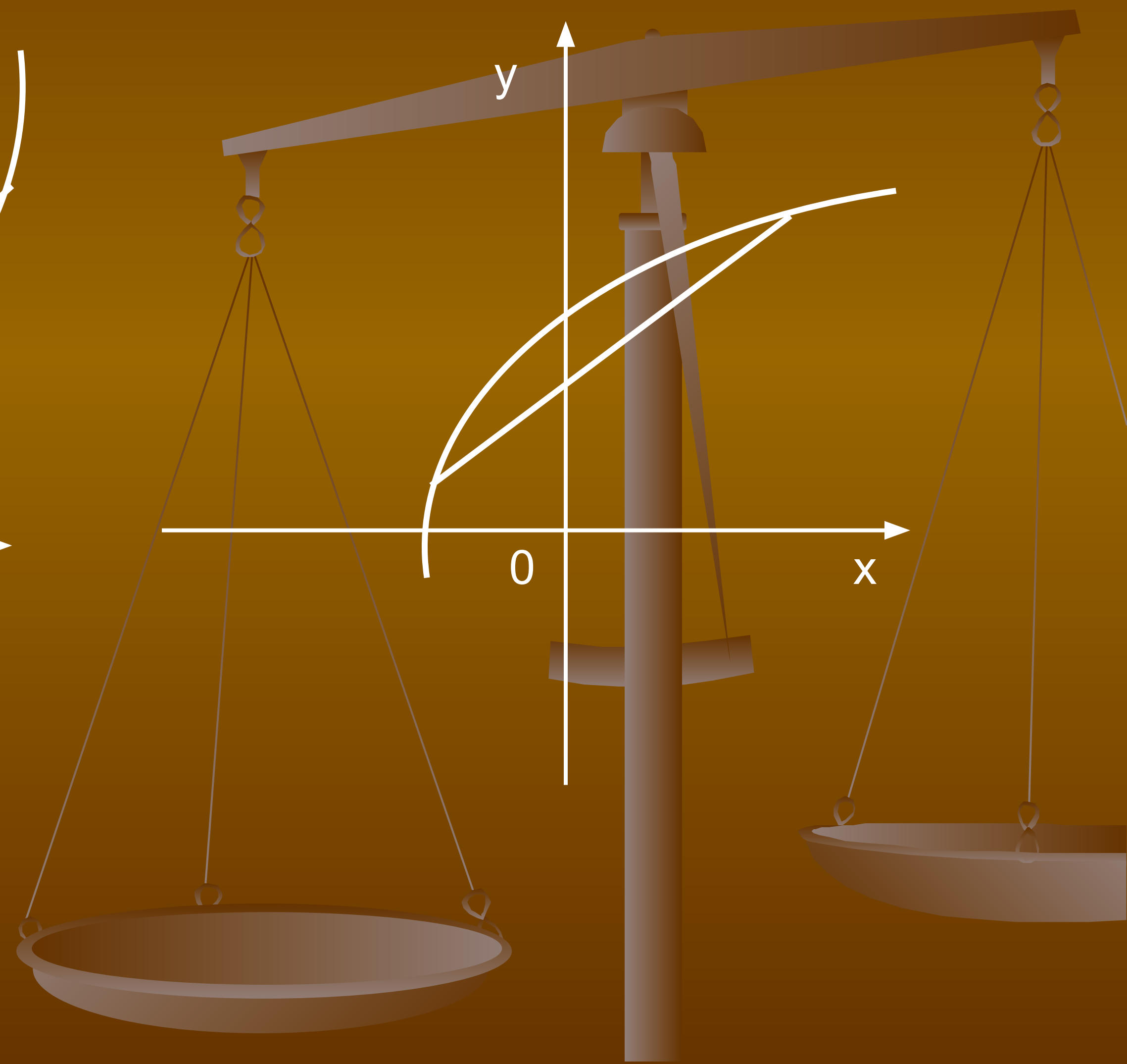



ЭТА **ФУНКЦИЯ РАЗРЫВНАЯ,** Т.К ЕЁ ГРАФИКИ НАХОДЯТСЯ В РАЗНЫХ ЧЕТВЕРТЯХ.

# Выпуклость функции

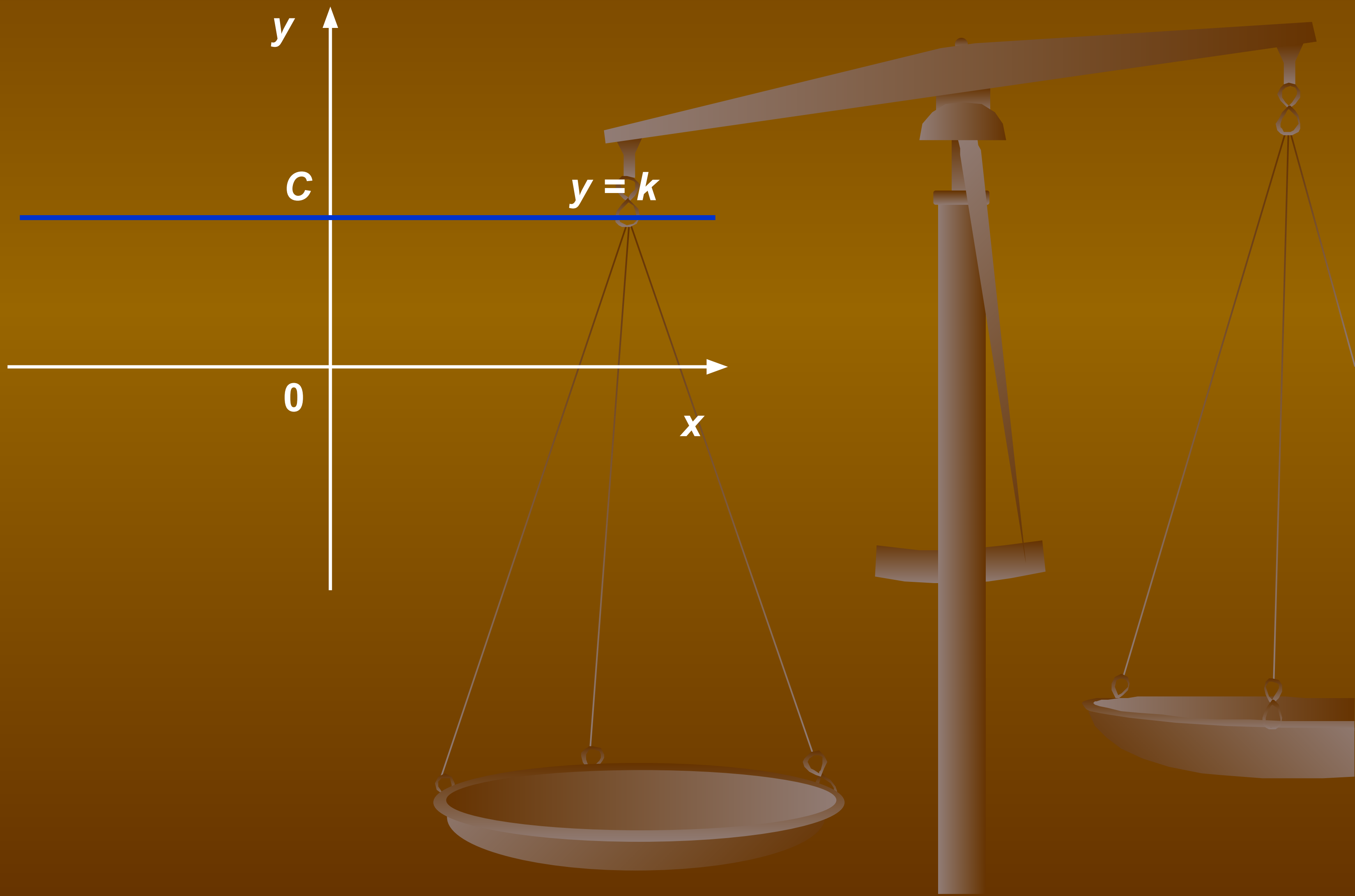
Выпуклая функция — функция, у которой надграфик является выпуклым множеством.



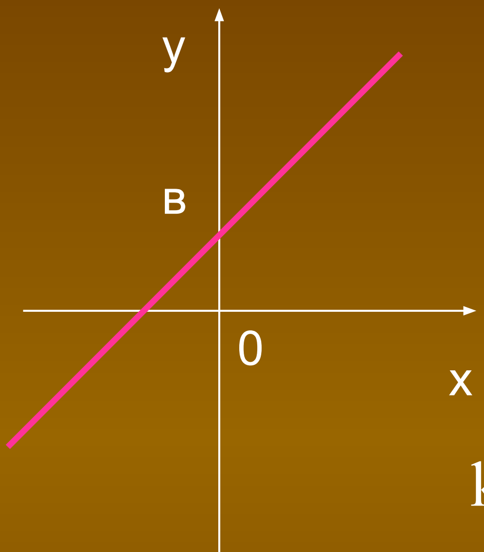
# Функции

# График постоянной функции

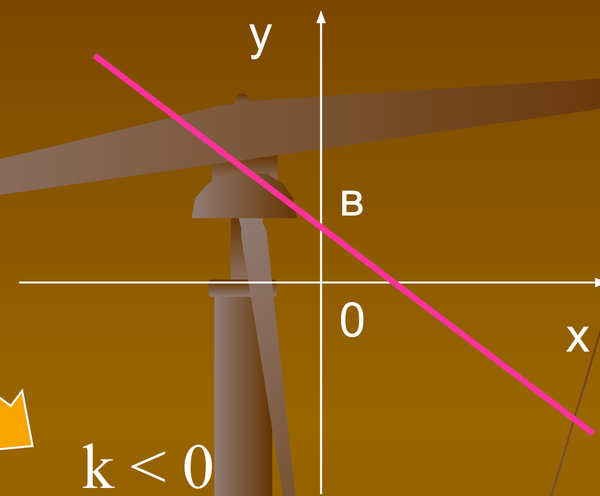


# *Линейная функция*

$$y = kx + в$$




1. $D\,(f) = (-\infty;+\infty)$
2. $E\,(f) = (-\infty;+\infty)$
3. Монотонность




$k > 0$
возрастающая

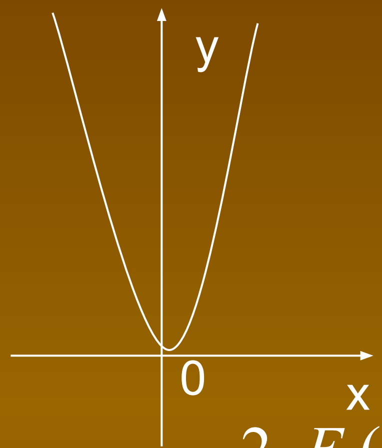
$k < 0$
убывающая

4. Не ограничена ни сверху, ни снизу.

5. Нет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

6. Функция непрерывна.

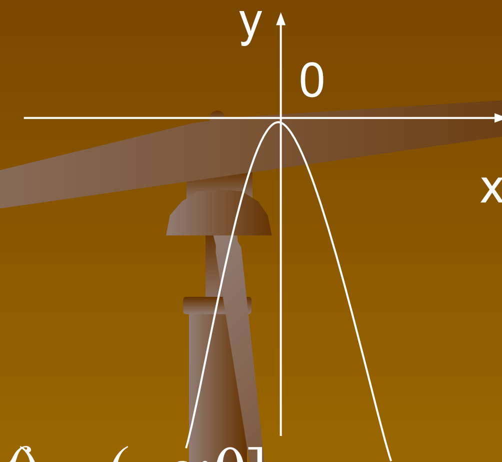
# Функция $y = kx^2$




1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$

$k > 0$

$k < 0$




2. $E(f) = [0; +\infty)$

2. $E(f) = (-\infty; 0]$

3. Промежутки монотонности

убывает на луче $(-\infty; 0]$, возрастает на луче $[0; +\infty)$

убывает на луче $[0; +\infty)$, возрастает на луче $(-\infty; 0]$

4. Ограничена снизу.

4. Ограничена сверху.

5. $y_{наим} = 0$; $y_{наиб}$ – не существует.

5. $y_{наим}$ – не существует; $y_{наиб} = 0$.

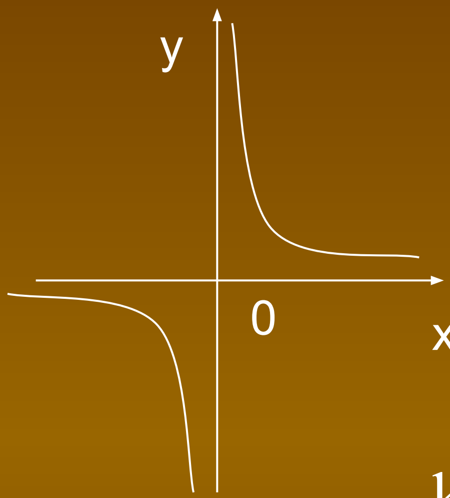
6. Непрерывна.

7. Выпукла вниз.

7. Выпукла вверх.

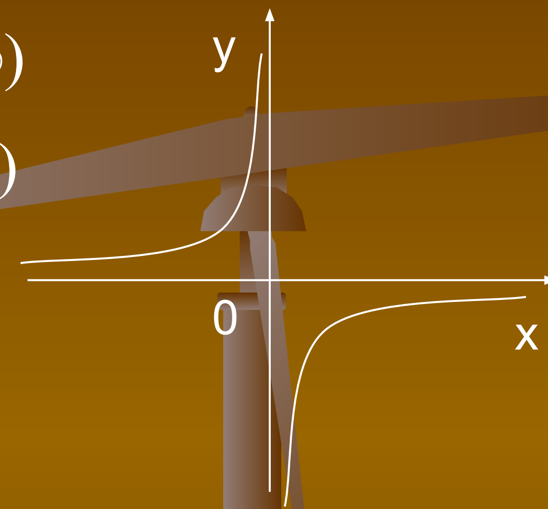
# Функция $y = \dfrac{k}{x}$

1. $D(f) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$
2. $E(f) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$
3. Монотонность




$k > 0$

Функция убывает на промежутках $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$




$k < 0$

Функция возрастает на промежутках $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$

4. Не ограничена ни сверху, ни снизу.

5. Нет ни наименьшего, ни наибольшего значений.

6. Функция непрерывна на луче $(-\infty;0)$ и луче $(0;+\infty)$.

# Доказательство :

1. Пусть $y = f(x)$, где $f(x) = kx + m$.

1) Если $x_1 < x_2$ и $k > 0$, то $kx_1 < kx_2$ (по свойству 3).

2) Прибавим к левой и правой части неравенства число $m$:

$kx_1 + m < kx_2 + m$ (по свойству 2), т.е. $f(x_1) < f(x_2)$.

3) Итак, если $x_1 < x_2$ ,то $f(x_1) < f(x_2)$, значит функция $y = kx + m$ возрастает.

2. Пусть $y = f(x)$, где $f(x) = kx + m$.

1) Если $x_1 < x_2$ и $k < 0$, то $kx_1 > kx_2$ (по свойству 3).

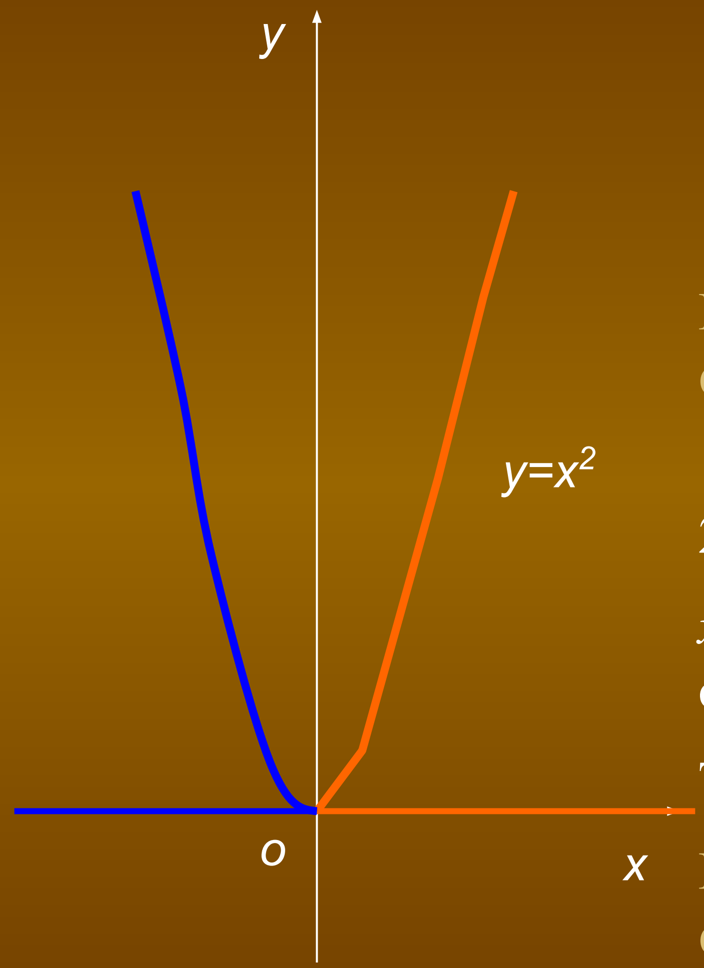
2) Прибавим к левой и правой части неравенства число $m$:

$kx_1 + m > kx_2 + m$ (по свойству 2), т.е. $f(x_1) > f(x_2)$.

3) Итак, если $x_1 < x_2$ , то $f(x_1) > f(x_2)$, значит функция $y = kx + m$ убывает.

Замечание. Если функция возрастает (убывает) по всей своей области определения, то её можно назвать возрастающей(убывающей), не указывая промежуток.

# Функция $y = x^2$




1. $y = x^2,\ x \in [0,+\infty)$

$0 \le x_1 < x_2 \Rightarrow\ x_1^2 < x_2^2$ (по свойству 6), т.е. $f(x_1) < f(x_2)$.

Итак, если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$, значит функция $y=x^2$ возрастает на луче $[0,+\infty)$.

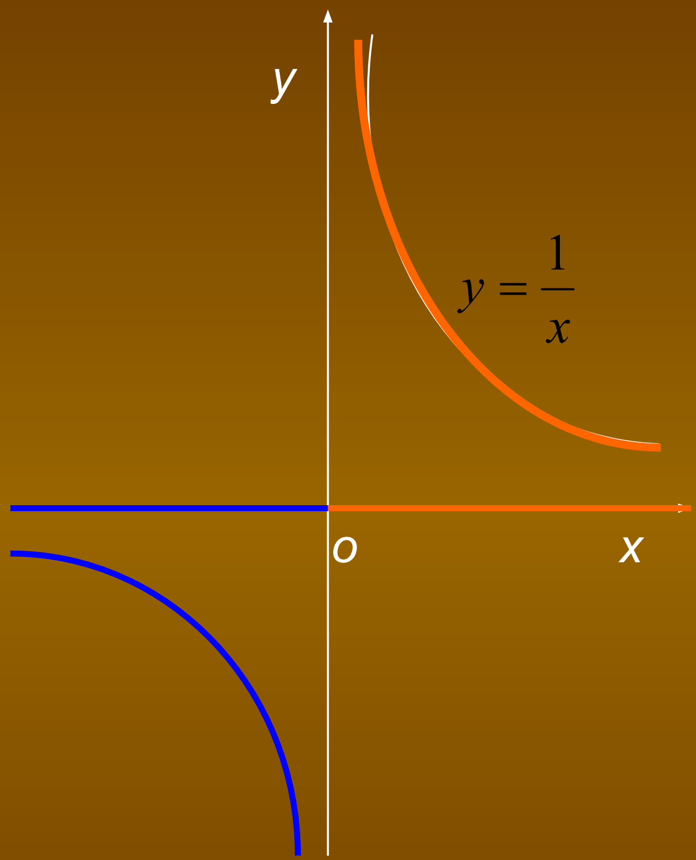
2. $y = x^2,\ x \in (-\infty,0]$

$x_1 \le 0,\ x_2 \le 0$ и $x_1 < x_2$, тогда $-x_1 > -x_2$ (по свойству 3), но $-x_1 \ge 0,\ -x_2 \ge 0$

Тогда $(-x_1)^2 > (-x_2)^2$, т.е. $x_1^2 > x_2^2$.

Итак, если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$, значит функция $y=x^2$ убывает на луче $(-\infty,0]$.

# Функция $y = \frac{1}{x}$




1. Пусть $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$, т.е. $f(x_1) > f(x_2)$

Итак, если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$, значит функция убывает на открытом луче $(0, +\infty)$

2. Пусть $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$

$x_1 < 0$, $x_2 < 0$ и $x_1 < x_2$, тогда $-x_1 > -x_2 \Rightarrow$

$\frac{1}{-x_1} < \frac{1}{-x_2} \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$, т.е. $f(x_1) > f(x_2)$

Итак, если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$, значит функция убывает на открытом луче $(-\infty; 0)$

# Кубическая парабола

**График функции y =** $x^3$ **(кубическая парабола)**

Построим график функции **y =** $x^3$. Составим таблицу соответственных значений x и y, округляя значения y до сотых.

Построим точки, координаты которых указаны в этой таблице.

Из таблицы видно, что график функции в начале координат почти сливается с осью x.

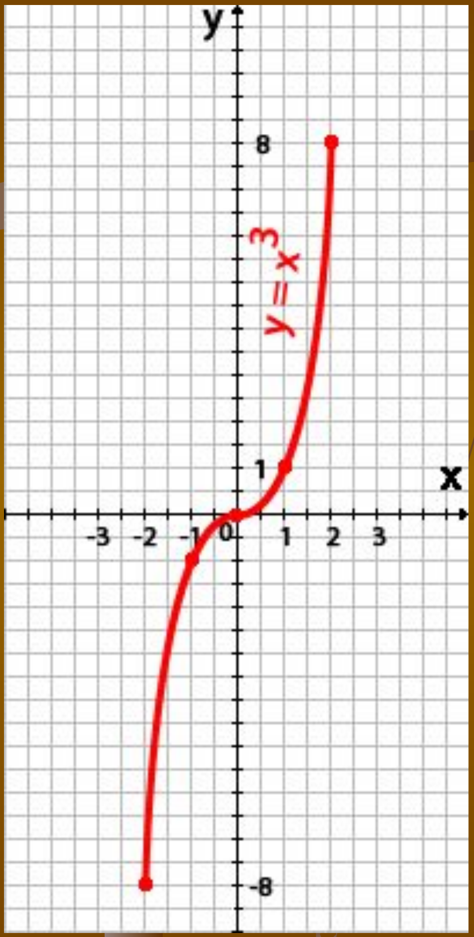
Выясним некоторые свойства функции **y =** $x^3$ :

График функции **неограниченно продолжается вверх справа от оси y и неограниченно продолжается вниз слева от оси y**.

**Если x = 0, то y = 0**. То есть график функции проходит через начало координат

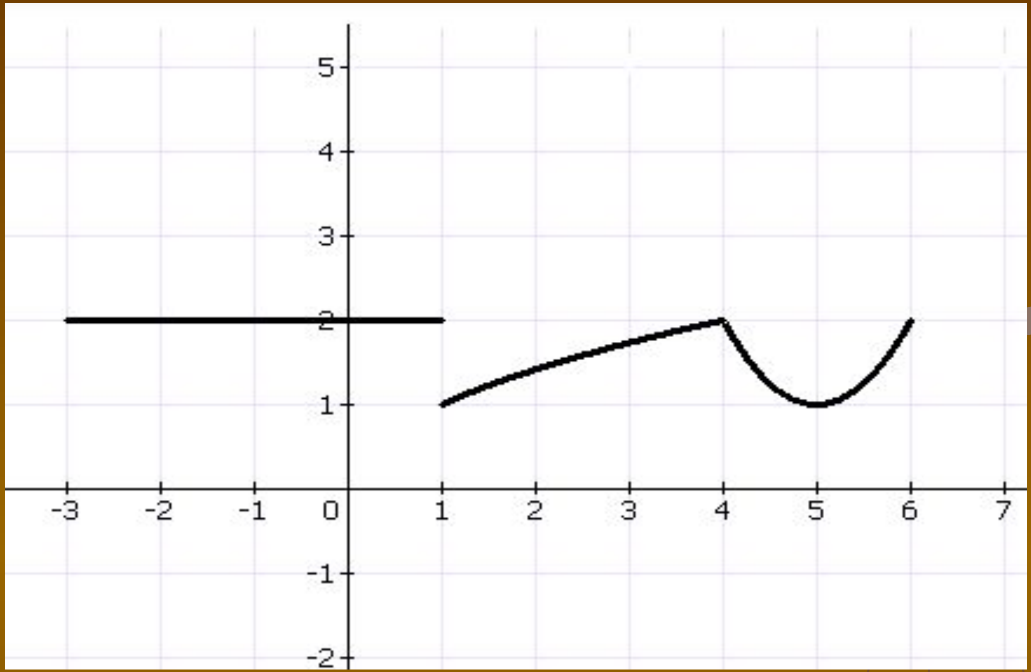
**Если x > 0, то y > 0, если x < 0, то y < 0,** . Так как куб положительного числа - положительное число, а куб отрицательного числа - отрицательное число. Значит график функции расположен в первой и третьей координатных четвертях.

**Противоположным значениям x соответствует противоположные значения y.** Это следует из того, что **(-x)** $^3$ **= -** $x^3$ для любого значения x. Значит, точки графика, имеющие противоположные абсциссы, **симметричны** относительно начала координат.




| x | -2 | -1.5 | -1 | 0.5 | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | -8 | -3.38 | -1 | 0.13 | 0 | 0.13 | 1 | 3.38 | 8 |

# График кусочной функции

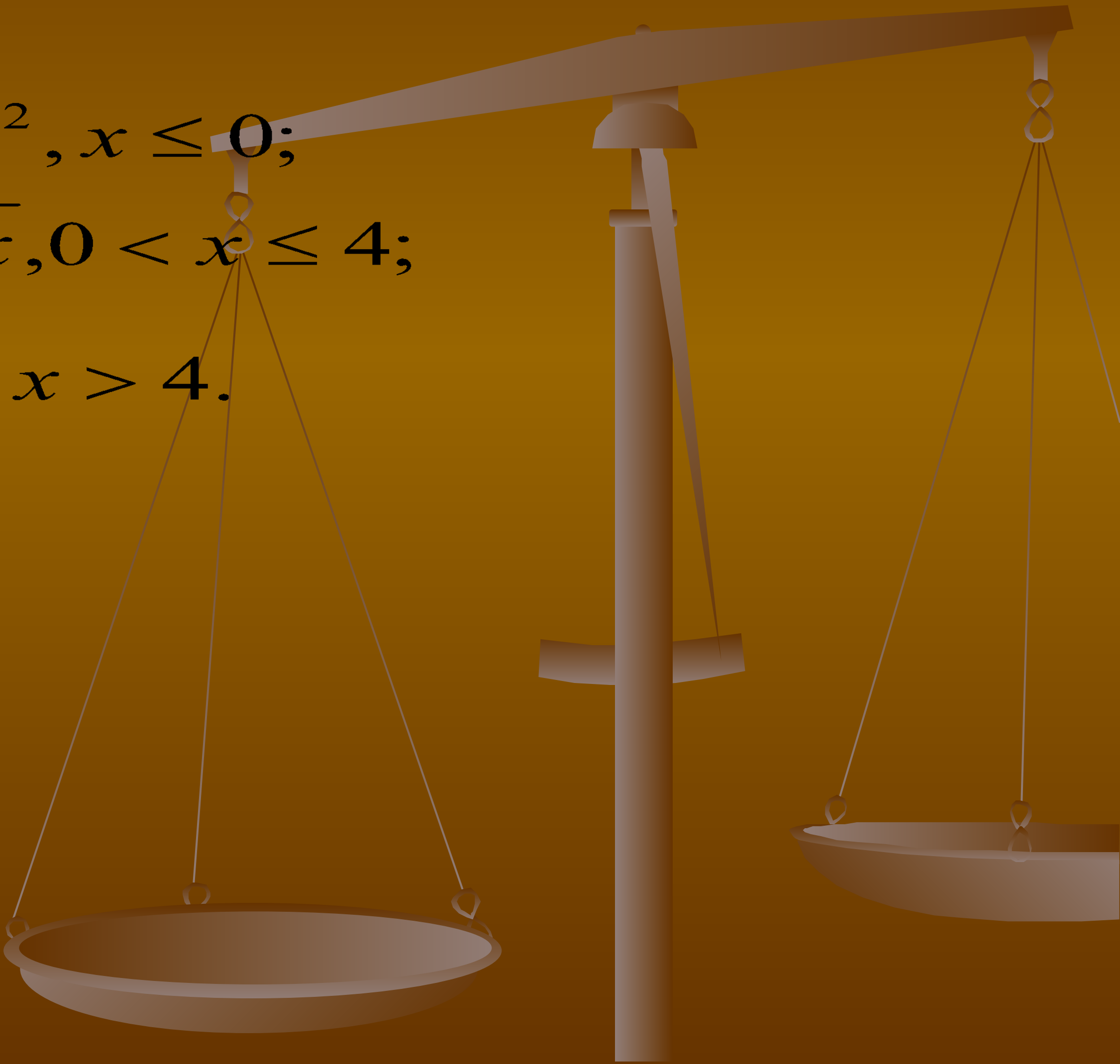



$$y=\begin{cases}2; -3\le x\le 1;\\ \sqrt{x}; 1<x\le 4;\\ (x-5)^2+1; 4<x\le 6.\end{cases}$$

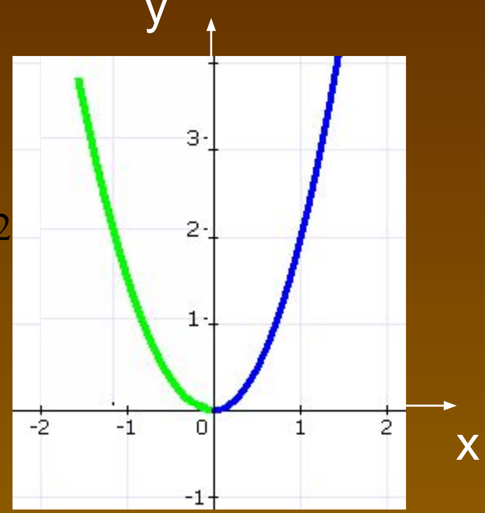
1. D (f) = [ - 3; 6]
2. E (f) = [1; 2]
3. Постоянна на [ - 3; 1], возрастает на (1; 4] и [ 5; 6], убывает на ( 4; 5]
4. Ограничена и сверху, и снизу.
5. $y_{наим} = 1$; $y_{наиб} = 2$
6. Непрерывна на [ - 3; 1] и ( 1; 6], претерпевает разрыв в точке x = 1
7. Выпукла вверх на ( 1; 4], выпукла вниз на ( 4; 6]

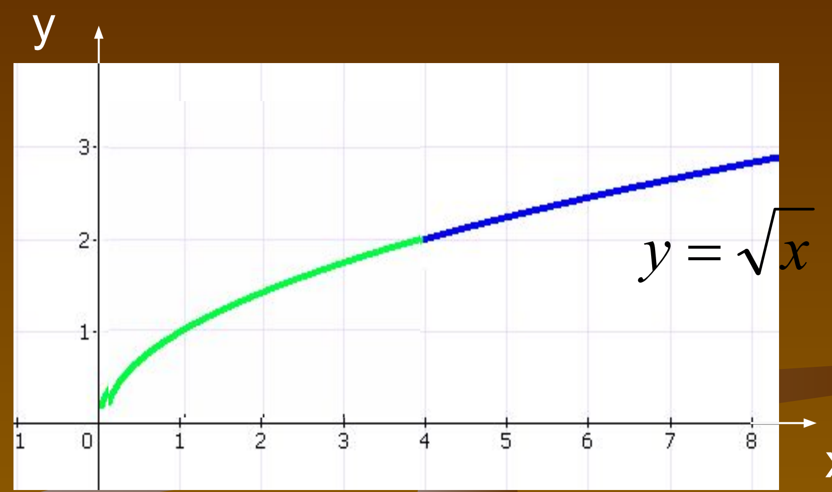
Построить график функции

$$y = \begin{cases} 2x^2, x \le 0; \\ \sqrt{x}, 0 < x \le 4; \\ \dfrac{8}{x}, x > 4. \end{cases}$$

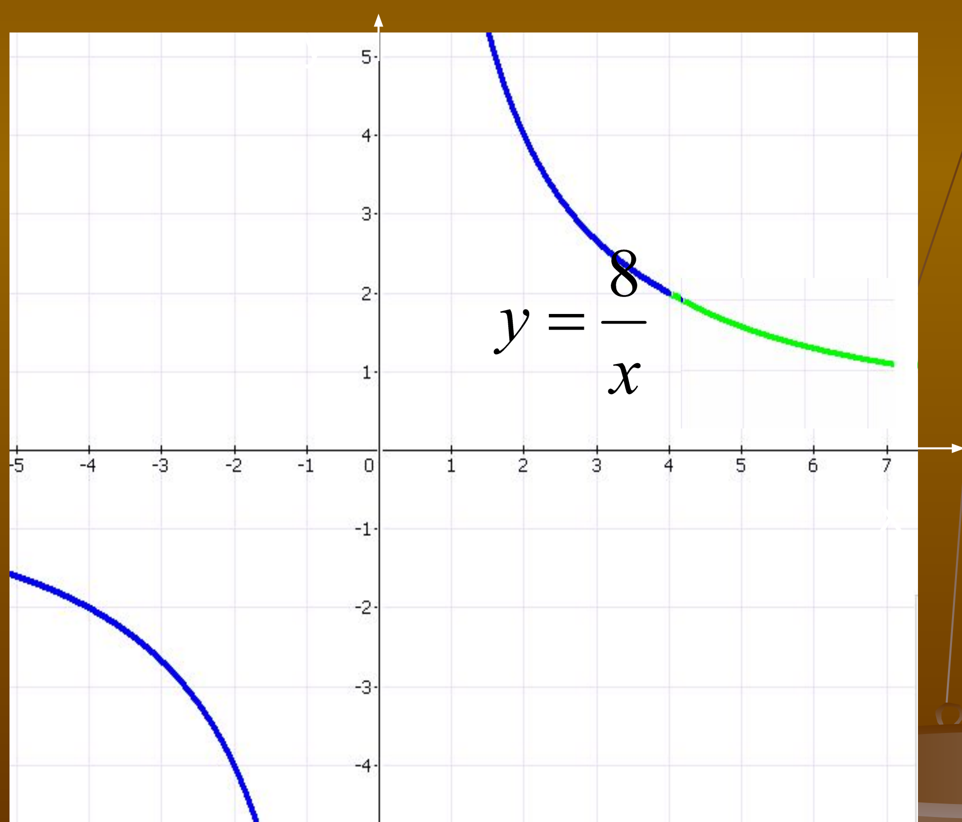


$$y = 2x^2$$

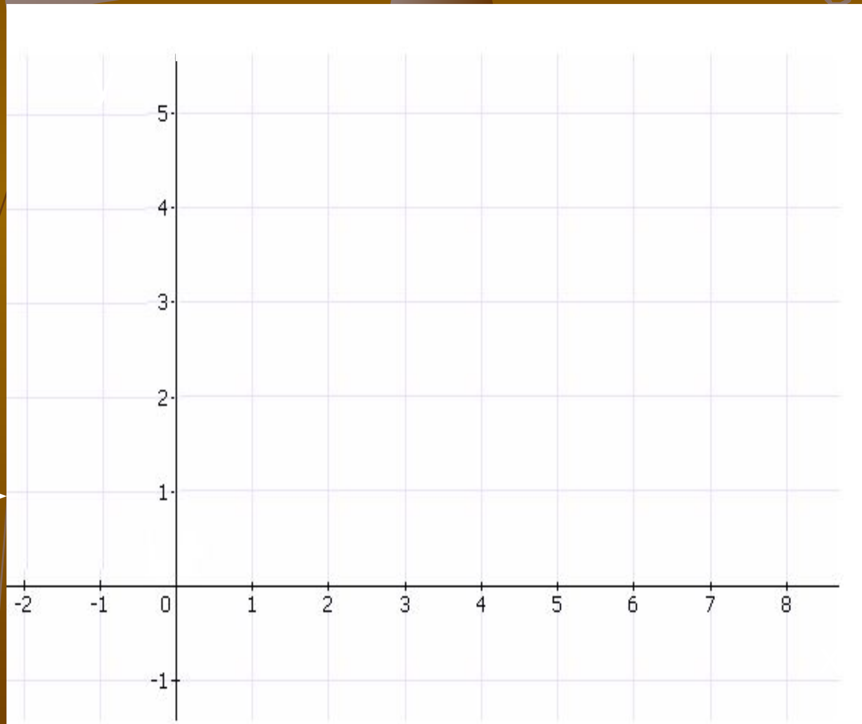


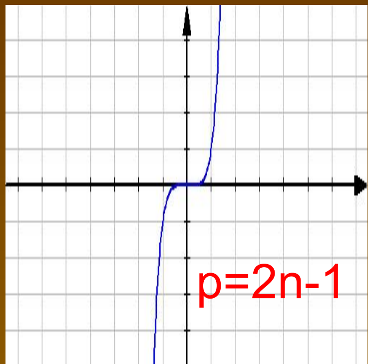

$$y = \sqrt{x}$$



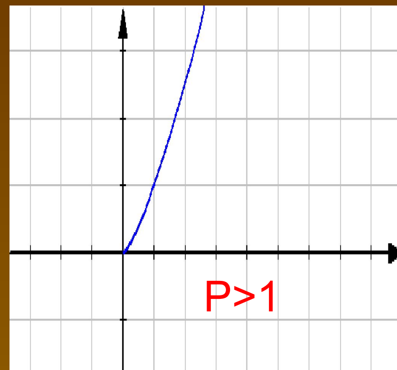
$$y = \frac{8}{x}$$



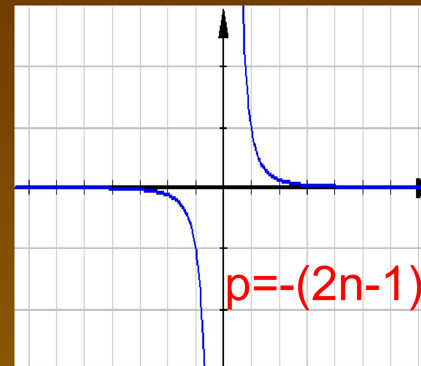
# Степенная функция и её график



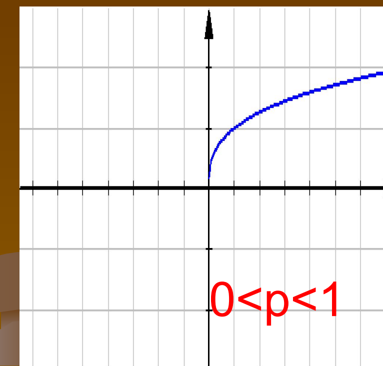

①



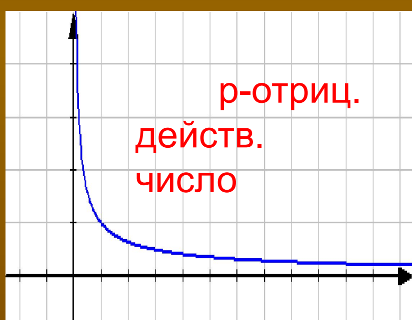

②



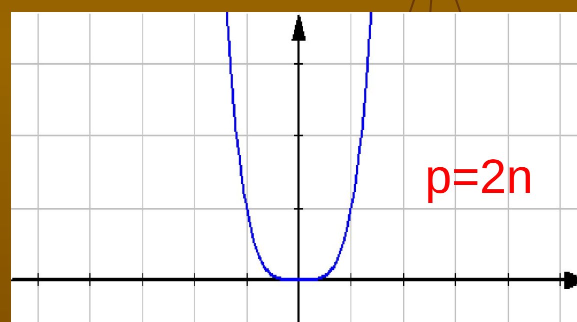

③



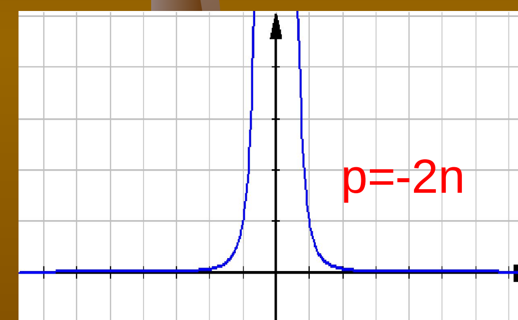

④




⑤




⑥




⑦

$y = x^{-3}$

$y = x^{8}$

$y = x^{\frac{1}{3}}$

$y = x^{-\frac{3}{5}}$

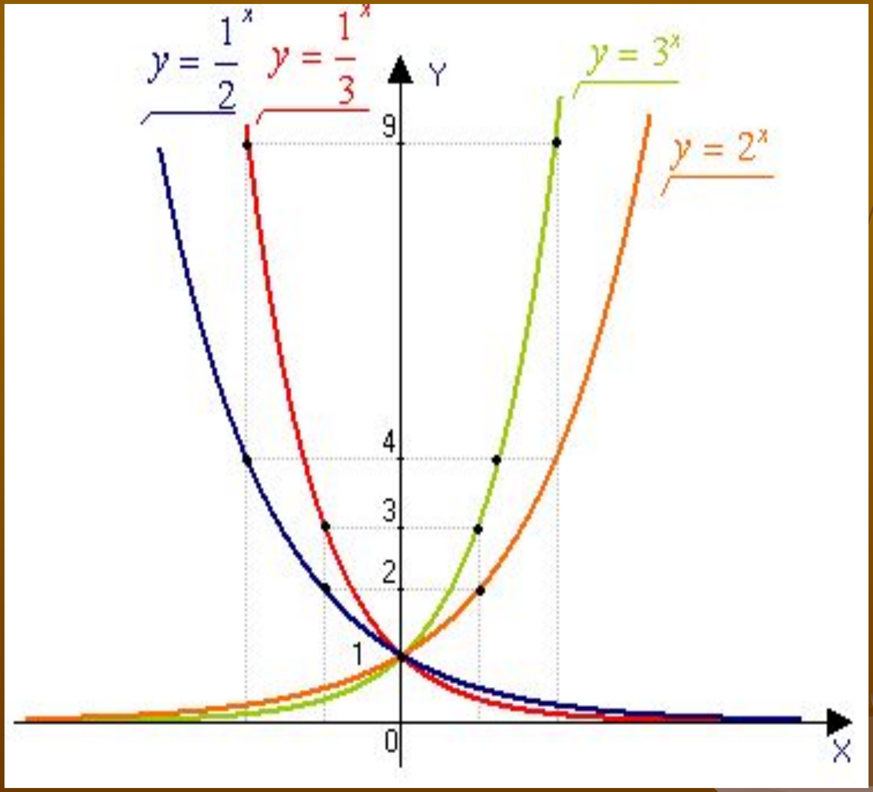
$y = x^{5}$

$y = x^{-4}$

$y = x^{\frac{4}{3}}$

# Показательная функция

Функция вида $y=a^x$ , где a > 0, a≠1 называется показательной.



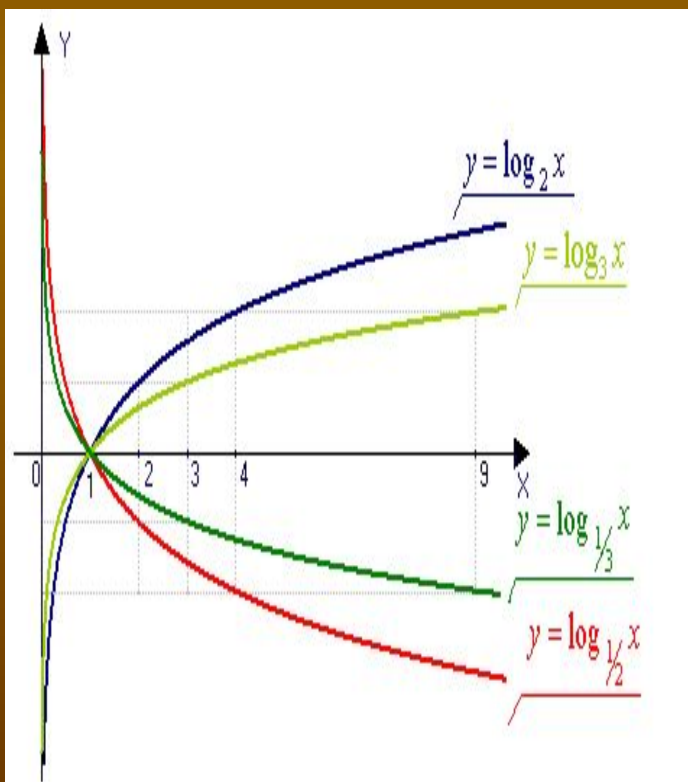

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ
ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ: R
ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ: (0;+∞ )
ЧЕТНОСТЬ, НЕЧЕТНОСТЬ:
функция является ни четной, ни нечетной
НУЛЕЙ НЕТ
ПРОМЕЖУТКИ ЗНАКОПОСТОЯНСТВА:
y > 0 при x ϵ R
ПРОМЕЖУТКИ МОНОТОННОСТИ:
при 0 < a < 1 функция убывает
при a > 1 функция возрастает
ГРАФИК ФУНКЦИИ ПРОХОДИТ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ: (0; 1)

# Свойства показательной функции

- Показательная функция существует при любом значении аргумента
- Может принимать только положительные значения
- Функция монотонная
- Любая показательная функция проходит через точку М(0;1)

# Логарифмическая функция

Функция вида y=log $_x$ a, где a > 0, a≠1 называется логарифмической.




Свойства функции

ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ (0;∞ )

ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ R

ЧЕТНОСТЬ, НЕЧЕТНОСТЬ:

функция ни четная, ни нечетная

НУЛИ: у = 0 при х = 1

ПРОМЕЖУТКИ ЗНАКОПОСТОЯНСТВА:

если 0 < a < 1, то у > 0 при х €(0; 1), у < 0 при х€ (1; ∞)

если а > 1, то у > 0 при х € (1; ∞), у < 0 при х €(0; 1)

ПРОМЕЖУТКИ МОНОТОННОСТИ:

при 0 < a < 1 функция убывает при х€ (0; ∞)

при a > 1 функция возрастает при х€ (0; ∞)

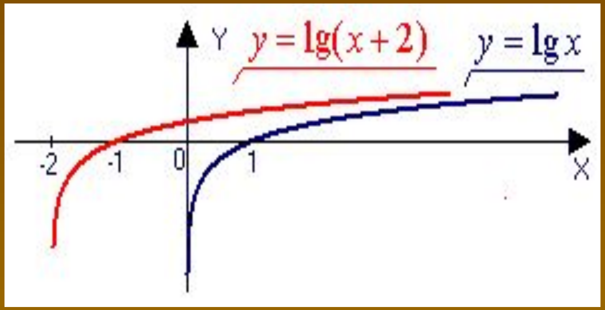
ГРАФИК ФУНКЦИИ ПРОХОДИТ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ: (1;0)

# Свойства логарифмической функции

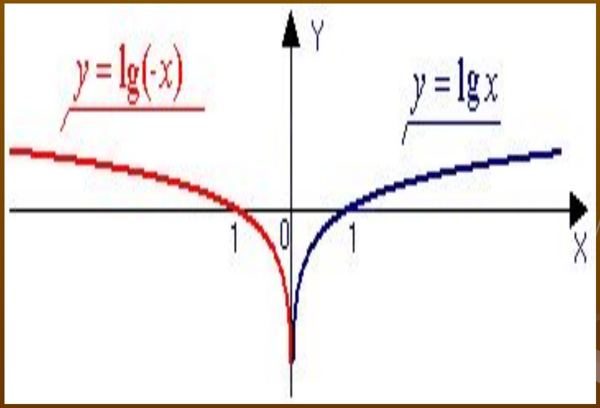
- Логарифмическая функция существует только при положительных значениях аргумента
- Сама логарифмическая функция может принимать любые значения
- Функция монотонная
- Любая логарифмическая функция проходит через точку М(1;0)

# Преобразование графиков функций

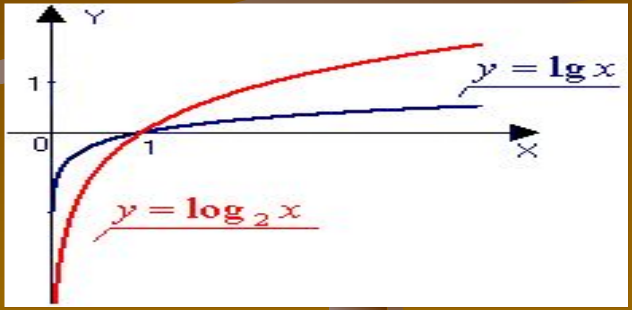
1.Параллельный перенос вдоль оси x



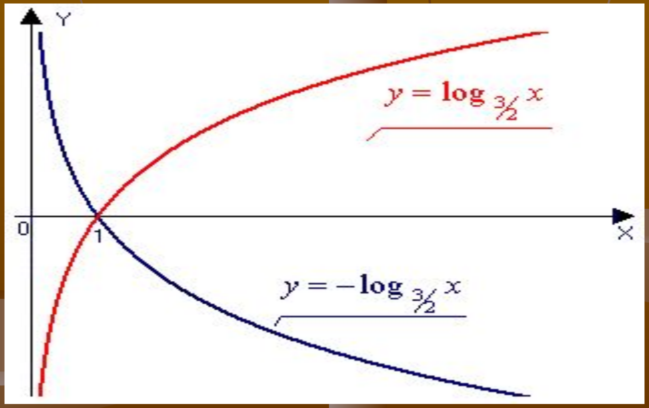

2.Симметричное преобразование относительно оси y




3.Сжатие и растяжение вдоль оси y

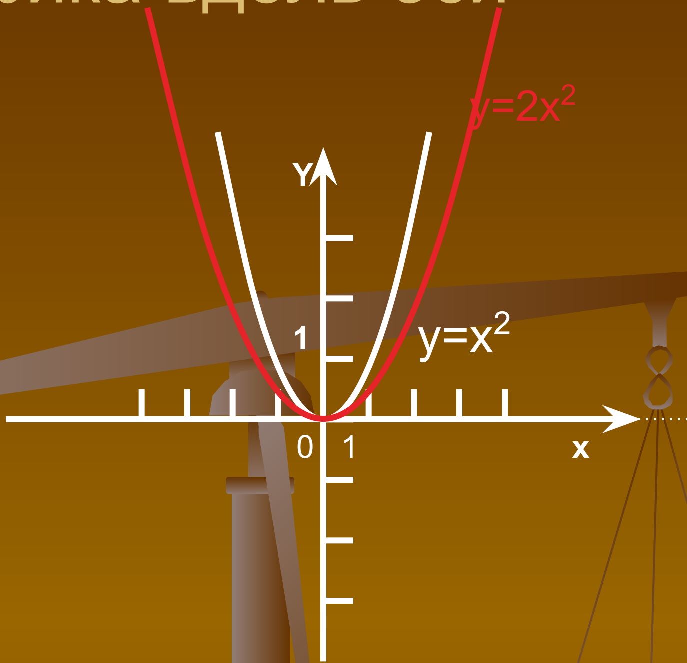



4.Симметричное преобразование относительно оси x

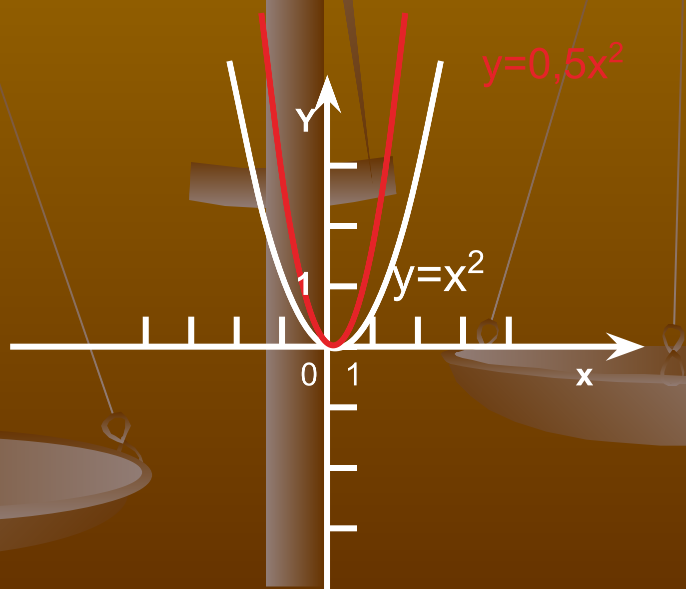


# Сжатие ( растяжение ) графика вдоль оси ординат

- График функции $y= b f(x)$ при $b>1$ можно получить растяжением графика функции $y= f(x)$ вдоль оси ординат

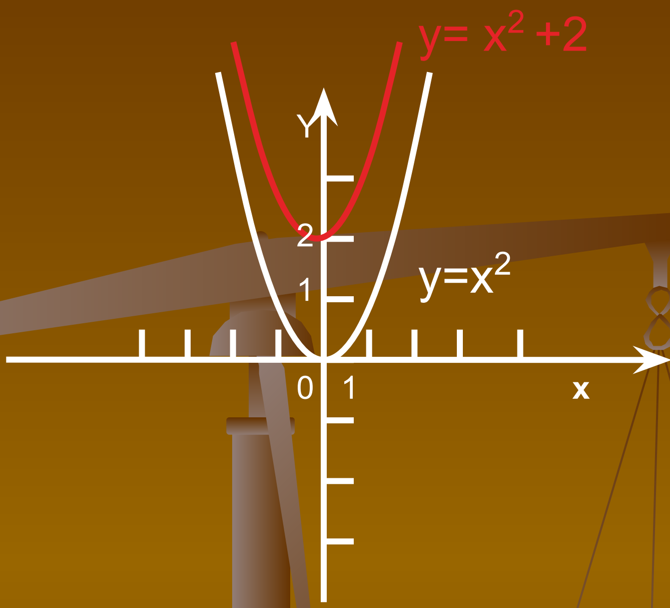



- График функции $y=bf(x)$ при $0<b<1$ можно получить сжатием графика функции $y=f(x)$ вдоль оси ординат

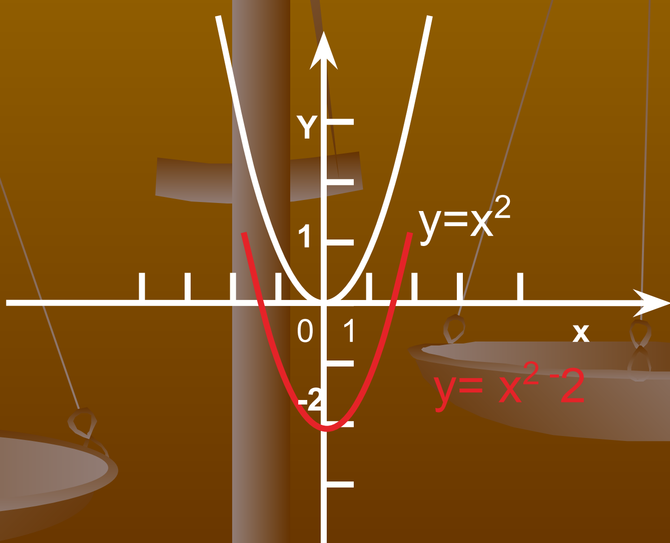


# Перенос вдоль оси ординат

- График функции y= f (x) + b при b>0 можно получить параллельным переносом вдоль оси ординат графика функции y= f (x) на |b| единиц вверх.



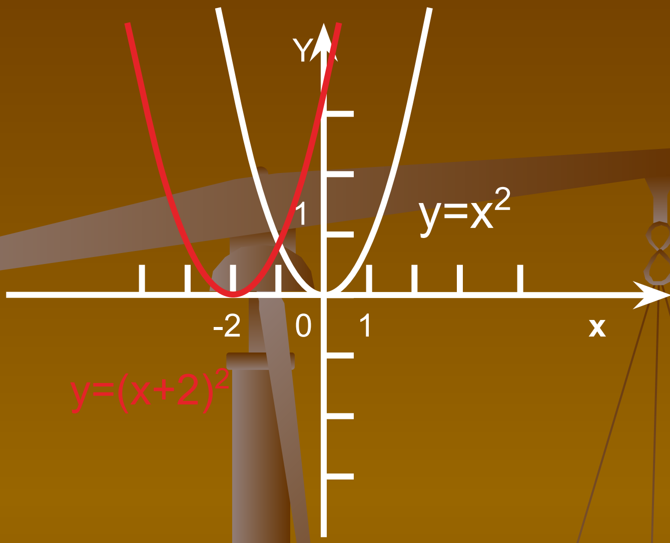

- График функции y=f(x)-b при b>0 можно получить параллельным переносом вдоль оси ординат графика функции y=f(x) на |b| единиц вниз



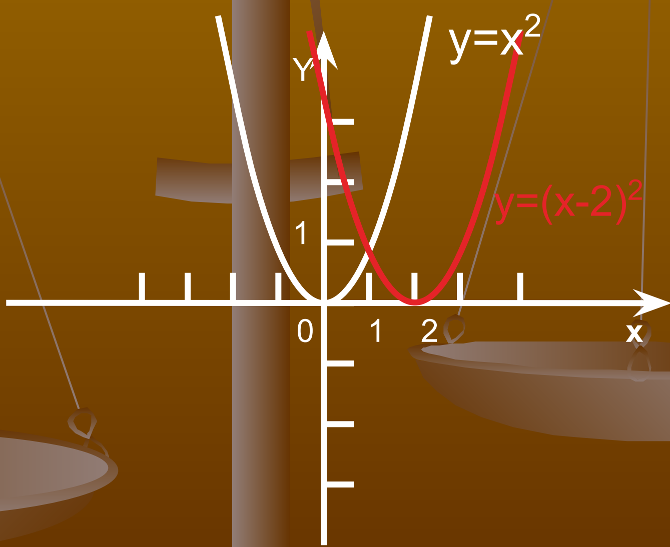
# Перенос вдоль оси абсцисс

- 

- График функции y=f(x + c)   можно получить параллельным переносом вдоль оси абсцисс графика функции y= f (x) на |c| единиц  влево при c >0 .



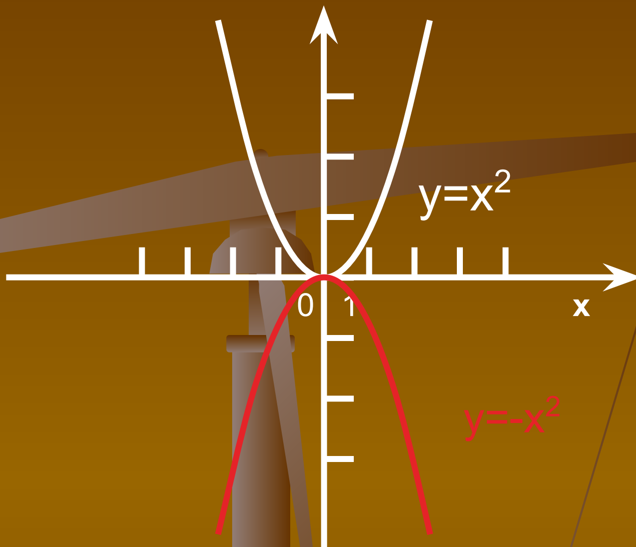

- График функции y=f(x + c) можно получить параллельным переносом вдоль оси абсцисс графика функции y=f(x) на |c| единиц вправо при c<0



# Симметрия относительно оси абсцисс

Чтобы построить график функции y= -f(x):

1. Строим график функции y=f(x)
2. Отражаем его симметрично относительно оси абсцисс.



# Фото отчет


Функции

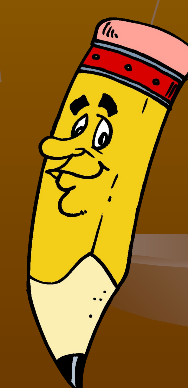

Исторические сведения


Исторические сведения


Доказательство


Показательная функция

Над презентацией старались:
Мухаметшина Регина
Насырова Эльвира
Сибагатова Лейля




Спасибо
за внимание!