Прикладная математика
каф. МЕН

Аношина О.В.

Основная литература

- 1. *Шипачев В. С.* Высшая математика. Базовый курс: учебник и практикум для бакалавров [Гриф Минобразования РФ] / В. С. Шипачев; под ред. А. Н. Тихонова. - 8-е изд., перераб. и доп. - Москва : Юрайт, 2015. - 447 с.
- 2. *Шипачев В. С*. Высшая математика. Полный курс: учебник для акад. бакалавриата [Гриф УМО] / В. С. Шипачев; под ред. А. Н. Тихонова. - 4-е изд., испр. и доп. - Москва : Юрайт, 2015. - 608 с
- 3. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т..Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. [Текст] / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. В 2 ч. – М.: Высшая школа, 2007. – 304+415с.

Отчетность

1. Контрольная работа. Выполняется в соответствии:

   Задания и методические указания к выполнению контрольных работ по дисциплине **«**ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА**»,** Екатеринбург, ФГАОУ ВО «Российский государственный профессионально-педагогический университет», 2016 - 30с.

   Вариант контрольной работы выбирать по последней цифре номера зачетной книжки.

2. Экзамен

Неопределенный интеграл, его свойства и вычисление

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, определенной на некотором промежутке, если $F'(x) = f(x)$ для каждого x из этого промежутка.

Например, функция $\cos x$ является первообразной функции $-\sin x$, так как $(\cos x)' = -\sin x$.

Очевидно, если $F(x)$- первообразная функции $f(x)$, то $F(x)+C$, где C - некоторая постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная функции $f(x)$, то всякая функция вида $\Phi(x)=F(x)+C$ также является первообразной функции $f(x)$ и всякая первообразная представима в таком виде.

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$, определенных на некотором промежутке, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается $\int f(x)dx$.

Если $F(x)$- некоторая первообразная функции $f(x)$, то пишут $\int f(x)dx = F(x)+C$, хотя правильнее бы писать $\int f(x)dx = \{F(x)+C\}$.
Мы по устоявшейся традиции будем писать
$\int f(x)dx = F(x)+C$.
Тем самым один и тот же символ
$\int f(x)dx$ будет обозначать как всю совокупность первообразных функции $f(x)$, так и любой элемент этого множества.

Свойства интеграла

Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а его дифференциал- подынтегральному выражению. Действительно:

$$1.\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x);$$

$$2.d\int f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)'dx = f(x)dx.$$

Свойства интеграла

3. Неопределенный интеграл от дифференциала непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ равен самой этой функции с точностью до постоянной:

$$\int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx = \varphi(x) + C,$$

так как $\varphi(x)$ является первообразной для $\varphi'(x)$.

Свойства интеграла

4.Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные, то функция $f_1(x)+f_2(x)$ также имеет первообразную, причем
$\int\left[f_1(x)+f_2(x)\right]dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx$;

5. $\int Kf(x)dx=K\int f(x)dx$;

6. $\int f'(x)dx=f(x)+C$;

7. $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=F[\varphi(x)]+C$.

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^{a} dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$.

5. $\int e^{x} dx = e^{x} + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^{2} x} = -ctgx + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^{2} x} = tgx + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{1 + x^{2}} = arctgx + C$.

Таблица неопределенных интегралов

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ ..

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

15. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$.

17. $\int shxdx = chx + C$.

18. $\int chxdx = shx + C$.

19. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$.

20. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$.

Свойства дифференциалов

При интегрировании удобно пользоваться свойствами:

$$1.\ dx = \frac{1}{a}d(ax)$$

$$2.\ dx = \frac{1}{a}d(ax+b),$$

$$3.\ xdx = \frac{1}{2}dx^2,$$

$$4.\ x^2dx = \frac{1}{3}dx^3.$$

Примеры

Пример . Вычислить $\int \cos 5x dx$.

Решение. В таблице интегралов найдем

$\int \cos x dx = \sin x + C$.

Преобразуем данный интеграл к табличному, воспользовавшись тем, что $d(ax) = a dx$.

Тогда:

$$\int \cos 5x dx = \int \cos 5x \frac{d(5x)}{5} = \frac{1}{5} \int \cos 5x d(5x) =$$

$$= \frac{1}{5} \sin 5x + C \text{ .}$$

Примеры

Пример. Вычислить $\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx$.

Решение. Так как под знаком интеграла находится сумма четырех слагаемых, то раскладываем интеграл на сумму четырех интегралов:

$$\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx=\int x^2dx+3\int x^3dx+\int xdx+\int dx=.$$

$$=\frac{x^3}{3}+3\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x+C$$

Независимость от вида переменной

При вычислении интегралов удобно пользоваться следующими свойствами интегралов:

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$.

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C .$$

Пример

Вычислим

$$\int (2+3x)^5\, dx = \frac{1}{3\cdot 6}(2+3x)^6 + C.$$

Методы интегрирования
Интегрирование по частям

Этот метод основан на формуле $\int udv = uv - \int vdu$.

Методом интегрирования по частям берут такие интегралы:

а) $\int x^n \sin xdx$, где $n = 1,2...k$;

б) $\int x^n e^x dx$, где $n = 1,2...k$;

в) $\int x^n arctgxdx$, где $n = 0,\pm 1,\pm 2,\dots \pm k.$;

г) $\int x^n \ln xdx$, где $n = 0,\pm 1,\pm 2,... \pm k$.

При вычислении интегралов а) и б) вводят обозначения: $x^n = u$, тогда $du = nx^{n-1}dx$, а, например $\sin xdx = dv$,тогда $v = -\cos x$.

При вычислении интегралов в), г) обозначают за u функцию $arctgx$, $\ln x$, а за dv берут $x^n dx$.

Примеры

Пример. Вычислить $\int x \cos x dx$.

Решение.

$$\int x \cos x dx = \begin{vmatrix} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$.

Примеры

Пример. Вычислить

$$\int x \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ \\ dv = xdx, v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C \ .$$

<u>Метод замены переменной</u>

Пусть требуется найти $\int f(x)dx$, причем непосредственно подобрать первообразную для $f(x)$ мы не можем, но нам известно, что она существует. Часто удается найти первообразную, введя новую переменную, по формуле
$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi_t' dt$, где $x = \varphi(t)$, а t - новая переменная

Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

Рассмотрим интеграл $\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx$,

содержащий квадратный трехчлен в знаменателе подынтегрального выражения. Такой интеграл берут также методом замены переменных, предварительно выделив в знаменателе полный квадрат.

Пример

Вычислить $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

Решение. Преобразуем x^2+4x+5,

выделяя полный квадрат по формуле $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Тогда получаем :

$$x^2+4x+5 = x^2+2\cdot x\cdot 2+4-4+5 =$$

$$=\left(x^2+2\cdot 2\cdot x+4\right)+1=(x+2)^2+1$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \left| \begin{array}{l} x+2=t \\ x=t-2 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= arctgt + C = arctg(x+2) + C.$$

Пример

Найти $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+x}dx = \left| \begin{matrix} \sqrt{x}=t,\ x=t^2, \\ dx=2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{1+t}{1+t^2}2tdt =$

$$= 2\int \frac{tdt}{1+t^2} + 2\int \frac{t^2}{1+t^2}dt = \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} + 2\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt =$$

$$= \ln(t^2+1) + 2\int dt - 2\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \ln(t^2+1) + 2t - 2arctgt + C =$$

$$= \ln(x+1) + 2\sqrt{x} - 2arctg\sqrt{x} + C.$$

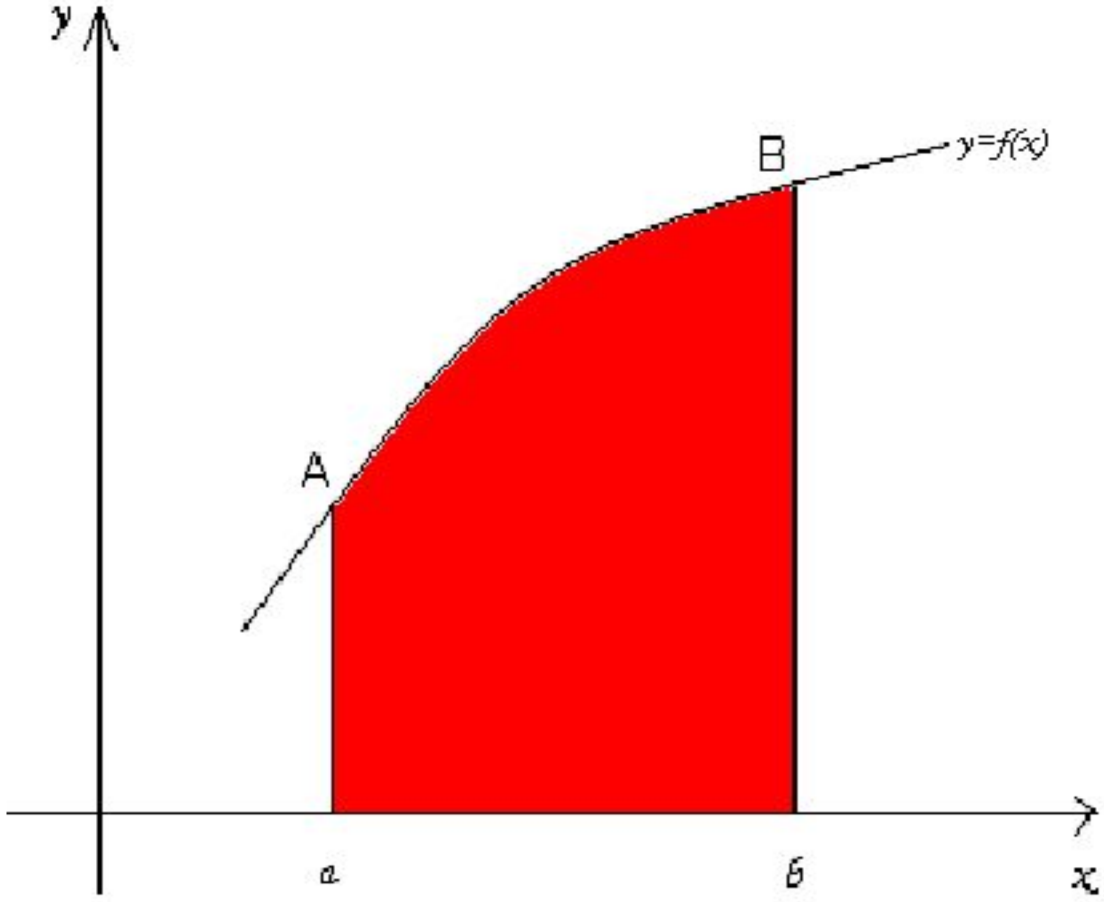
Определенный интеграл, его основные свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Приложения определенного интеграла.

- К понятию определенного интеграла приводит задача нахождения площади криволинейной трапеции.
- Пусть на некотором интервале [a,b] задана непрерывная функция $y = f(x) > 0$

  Задача:

  Построить ее график и найти F площадь фигуры, ограниченной этой кривой, двумя прямыми x = a и x = b, а снизу – отрезком оси абсцисс между точками x = a и x = b.

Фигура aABb называется криволинейной трапецией



Определение

Под определенным интегралом $\int_a^b f(x)dx$

от данной непрерывной функции f(x) на данном отрезке [a;b] понимается соответствующее приращение ее первообразной, то есть

$$F(b) - F(a) = F(x)\,/_a^b$$

Числа a и b – пределы интегрирования, [a;b] – промежуток интегрирования.

Правило:

- Определенный интеграл равен разности значений первообразной подынтегральной функции для верхнего и нижнего пределов интегрирования.
- Введя обозначения для разности

$$F(b)-F(a)=F(x)/_{a}^{b}$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b)-F(a)$$

Формула Ньютона – Лейбница.

Основные свойства определенного интеграла.

1) Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

где x и t – любые буквы.

2) Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

3) При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на обратный

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -\left[F(a) - F(b)\right] = -\int_b^a f(x)dx$$

(свойство аддитивности)

4) Если промежуток [a;b] разбит на конечное число частичных промежутков, то определенный интеграл, взятый по промежутку [a;b], равен сумме определенных интегралов, взятых по всем его частичным промежуткам:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5) Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

6) Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций.

Замена переменной в определенном интеграле.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt$$

где $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta), \varphi(t) \in [a;b]$

для $t \in [\alpha;\beta]$, функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на $[\alpha;\beta]$

Пример: $\int_1^5 \sqrt{x-1}dx =$

$x-1=t$

$dt = dx$

x	1	5
t	0	4

$$= \int_0^4 \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{2}{3}t\sqrt{t}\Big|_0^4 = \frac{2}{3}\cdot 4\cdot 2 - 0 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

Несобственные интегралы.

Определение. Пусть функция f(x) определена на бесконечном интервале [a; + ∞) и интегрируется на любом интервале [a;b], где b < + ∞. Если существует

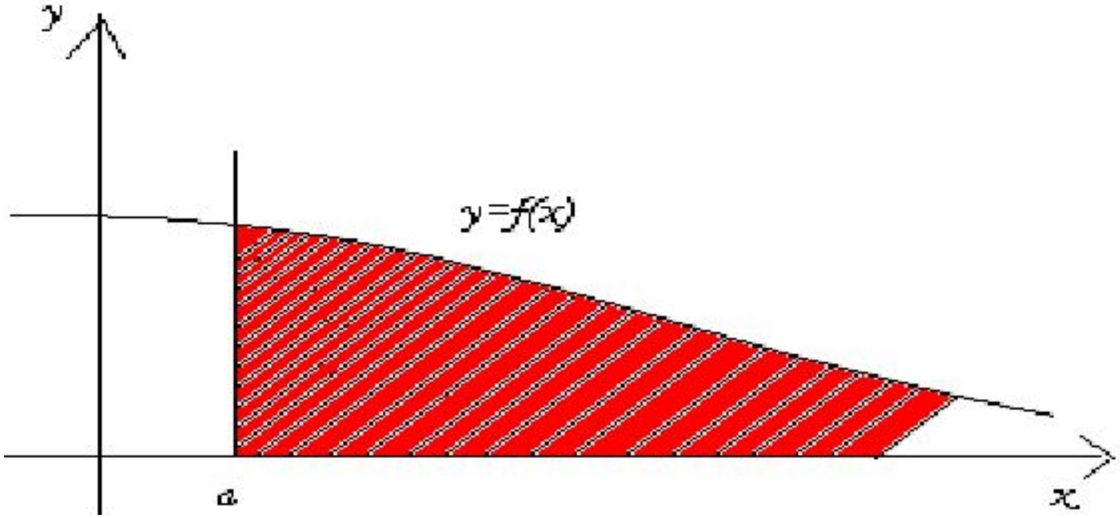
$$, \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

то этот предел называется несобственным интегралом функции *f(x)* на интервале

[a; + ∞) и обозначается $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

- Таким образом, по определению,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}(F(b)-F(a))$$



которое

цимся, если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

ен ∞, то говорят, что

интеграл **расходится**.

Пример. Интеграл Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a^2}}\, dx$$

- если a = 1, то $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$$

- Интеграл сходится, и его значение $=\sqrt{\pi}$.

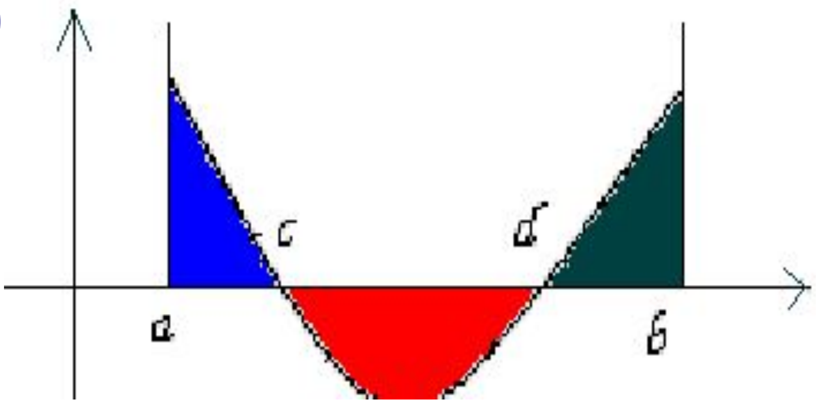
Приложения определенного интеграла

1) Площадь плоских фигур.

а) если $f(x) \geq 0 \Rightarrow S = \int_a^b f(x)dx$

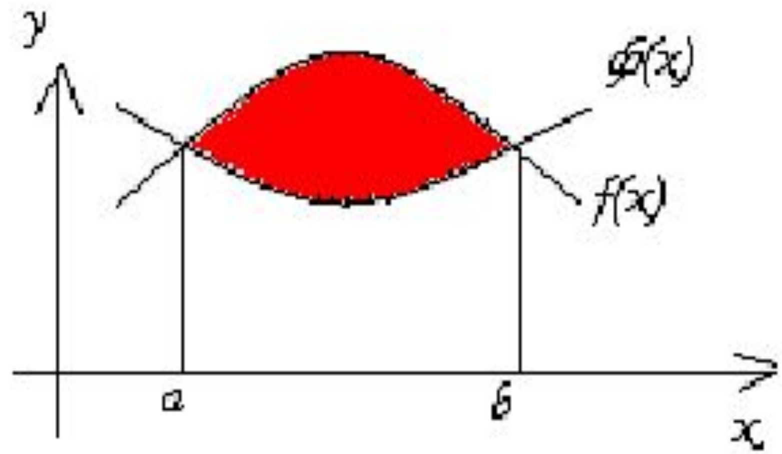
б) если $f(x) < 0 \Rightarrow S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

в)



$$S = \int_a^c f(x)dx + \left|\int_c^d f(x)dx\right| + \int_d^b f(x)dx$$

г) $S = \int_a^b \left[f(x) - \varphi(x)\right]dx$

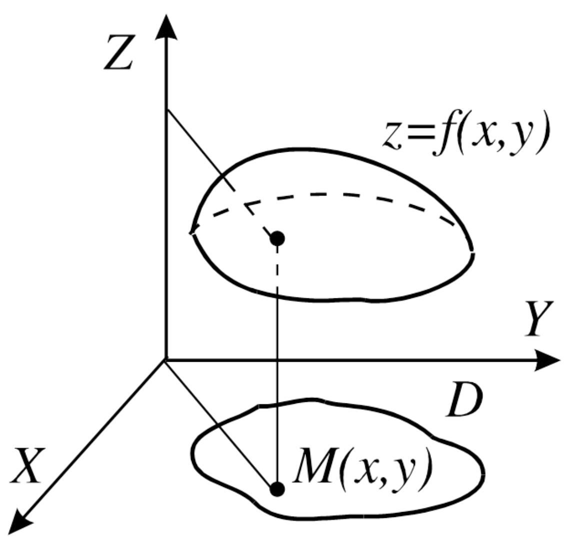


2) Многие физические величины можно определить и задать через понятие интеграла. Например, работа для любой силы вычисляется как интеграл от величины силы по длине пути.

$$A = \int_a^b F(x)dx$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Если каждой паре (x,y) значений двух независимых **переменных** из области D ставится определенное значение z, то говорят, что z есть **функция** двух **переменных** (x,y).



Частные приращения и частные производные

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \qquad \frac{\partial z}{\partial x}; \quad z'_x; \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}; \quad f'_x(x,y).$$

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}; \quad z'_y; \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}; \quad f'_y(x,y).$$

Полное приращение функции 2-х переменных

Если обеим переменным дать приращение, то функция получит полное приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Полное приращение и полный дифференциал

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$dz = f_x'(x, y)dx + f_y'(x, y)dy$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

Дифференциалы высшего порядка

Дифференциалом второго порядка функции *z=f*(*x,y*) называется

$$d^2 z = d(dz)$$

Вообще: $d^n z = d(d^{n-1} z)$

Если x и y независимые переменные, то

- $$d^2 z = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dxdy + z''_{yy} dy^2$$

Экстремумы функции двух переменных

Определение. Говорят, что в точке $P_0(x_0, y_0)$ функция $f(x,y)$ имеет максимум, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек $P(x,y)$ этой окрестности, отличных от $P_0(x_0, y_0)$, выполнено неравенство

$$f(P_0) > f(P).$$

Аналогично определяется минимум функции.

Минимум и максимум функции называются ее экстремумами.

Экстремумы функции двух переменных

***Теорема (необходимое условие экстремума*). В точке экстремума функции нескольких переменных каждая ее частная производная либо равна нулю, либо не существует.**

Точки, в которых выполнены эти условия, называются *критическими.*

Достаточные условия экстремума функции двух переменных

Теорема. Пусть функция $z=f(x,y)$ определена и имеет непрерывные частные производные до 3-го порядка в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$, в которой $z'_x = z'_y = 0$. Если при этом в этой точке выполнено условие $\Delta = z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2 > 0$, то точка M_0 является точкой экстремума функции, причем точкой максимума, если $z''_{xx} > 0$, и точкой минимума, если $z''_{xx} < 0$.

Если же в этой точке $\Delta = z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2 < 0$, то экстремума в точке M_0 нет.

В том случае, если $\Delta = z''_{xx} z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 0$ в точке M_0, теорема ответа не дает.

Пример

Исследовать на экстремум функцию

$$z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, \textit{åñëè} \quad x > 0 \;\; u \;\; y > 0.$$

Наибольшее и наименьшее значения функции

Определение. Наименьшее или наибольшее значение функции в данной области называется абсолютным экстремумом функции (абсолютным минимумом или абсолютным максимумом соответственно) в этой области.

Известно, что непрерывная в замкнутой ограниченной области функция достигает в ней своих наибольшего и наименьшего значений.

Абсолютный экстремум достигается функцией либо в критических точках, либо на границе области.

Пусть функция непрерывна в замкнутой ограниченной области *G*, дифференцируема внутри этой области. *Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в этой области, нужно*:

1)найти критические точки, принадлежащие этой области, и вычислить в них значения функции;

2)найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе области;

3)из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Скалярное поле
Основные определения

Пусть в области D пространства $Oxyz$ задана функция $u=u(x,y,z)$. В этом случае говорят, что в области D задано ***скалярное поле***, а саму функцию $u=u(x,y,z)$называют функцией поля. Например, поле давлений, температур и т.д.

Скалярное поле Основные определения

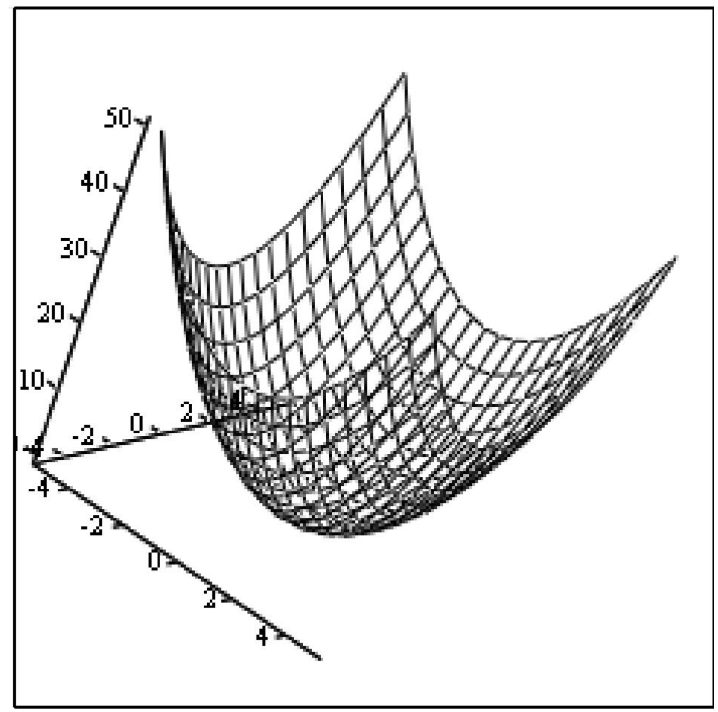
Множество точек *M* области *D*, для которых скалярное поле сохраняет постоянное значение, т. е. $u(M)=C$, называется *поверхностью уровня* (или изоповерхностью) скалярного поля.

Если область D расположена на плоскости Oxy, то поле $u=u(x,y)$ является плоским.

Поверхности уровня называют в этом случае *линиями уровня*.

Пусть

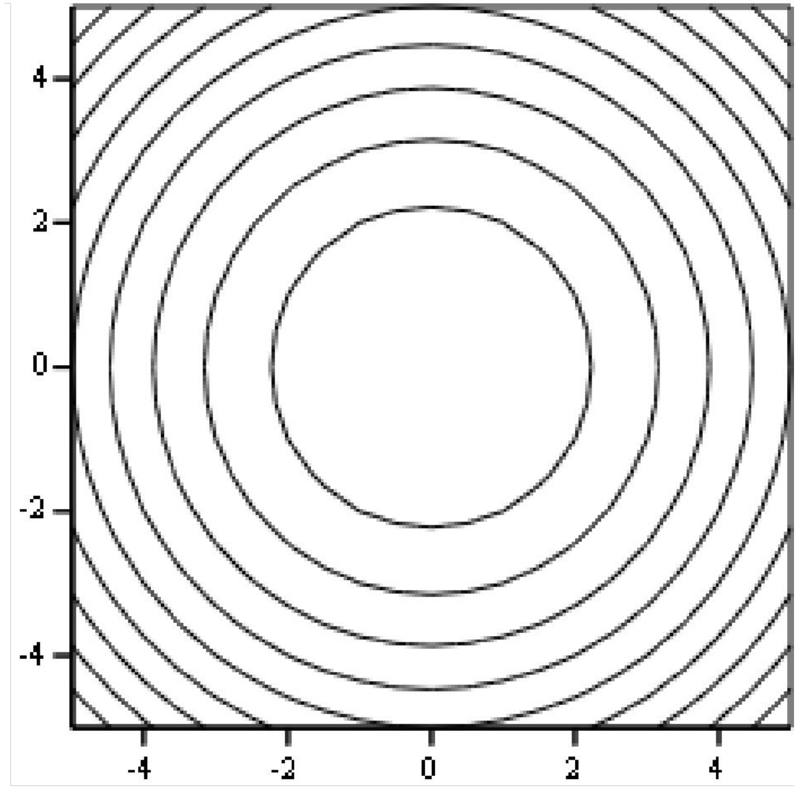
$$f(x, y) := x^2 + y^2$$



f

Линии уровня

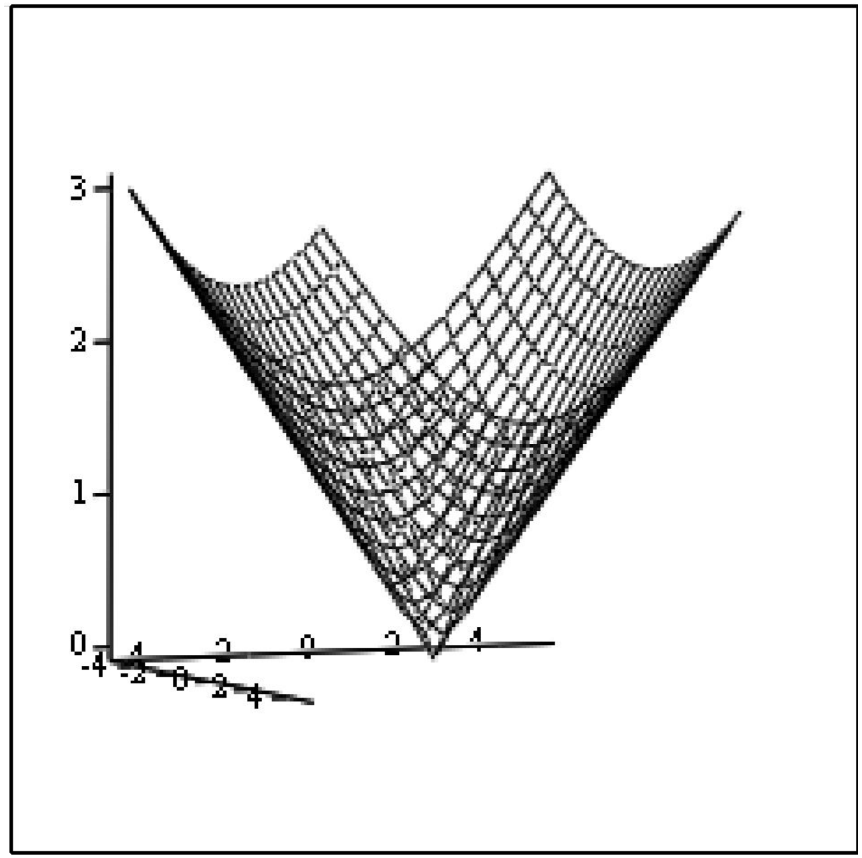
Пусть $z = x^2 + y^2$. Линии уровня этой поверхности имеют вид



f

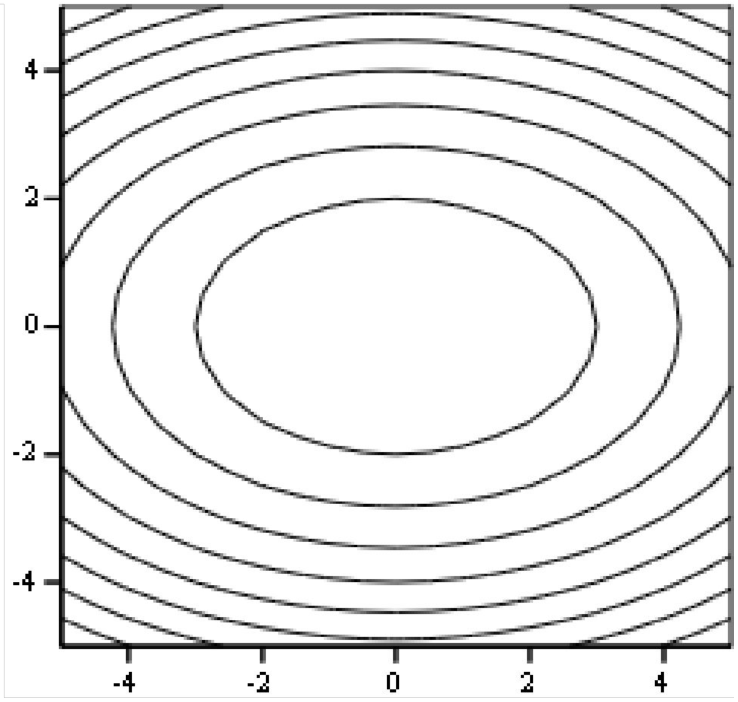
Пусть дан конус

$$f(x,y) := \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$



f

Линии уровня конуса



f

Пусть задана дифференцируемая функция $u = u(x, y, z)$ скалярного поля.

Рассмотрим точку $P(x, y, z)$ этого поля и луч l, выходящий из точки P в направлении единичного вектора $\bar{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$,

где $\bar{e}$ α, β, γ –углы, образованные вектором с осями координат .

Определение

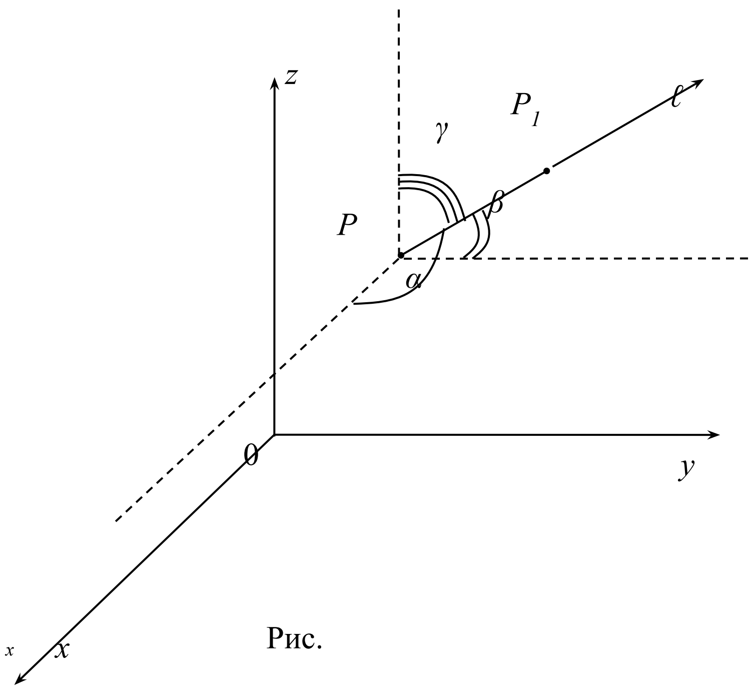


Рис.

Пусть $P_1\left(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z\right)$ – какая-нибудь другая точка этого луча. Обозначим

$$\Delta\ell = PP_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

– расстояние между точками *P* и P_1; $\Delta\ell$ называют *величиной перемещения*. *Приращением функции в направлении* ℓ назовем разность

$$\Delta_\ell u = u(P_1) - u(P)$$

Производной функции $u = u(x, y, z)$

в точке *P* по направлению l

называется предел отношения

приращения функции в направлении l

к величине перемещения Δl при $\Delta l \to 0$

:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}$$

.

Вычисление производной по направлению

Формула вычисления производной по направлению:

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

$$cos\alpha = \frac{l_x}{|l|}, \cos\beta = \frac{l_y}{|l|}, \cos\gamma = \frac{l_z}{|l|},$$

$$|l| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}.$$

Градиент скалярного поля

Градиентом скалярного поля *u=u*(*x,y,z*), где *u=u*(*x,y,z*)-дифференцируемая функция, называется вектор с координатами

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \quad .$$

Таким образом, $grad u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z})$

или $grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$

Пример

Найти градиент функции $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точке M(6,2,3).

Решение. Вычислим градиент функции.

$$u'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad u'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$u'_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Тогда grad u = $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\bar{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\bar{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\bar{k}$

А в точке M

$$grad u = \frac{6}{7}\bar{i} + \frac{2}{7}\bar{j} + \frac{3}{7}\bar{k}.$$

Направление градиента

***Теорема*.** Производная функции по направлению u l равна проекции градиента этой функции на данное направление (в соответствующей точке).

Направление градиента

Так как производная по направлению представляет собой скорость изменения функции в данном направлении , а проекция вектора на другой вектор имеет максимальное значение, если оба вектора совпадают по направлению, то

градиент функции в данной точке указывает направление наиболее быстрого возрастания функции.

Величина градиента плоского скалярного поля

Величина градиента плоского скалярного поля ,т.е.

$$| \text{grad } u | = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$$

обозначается $tg\phi$ и определяет крутизну наибольшего ската или подъема поверхности $u = f(x, y)$.

Градиент скалярного поля в данной точке по величине и направлению равен максимальной скорости изменения поля в этой точке, т. е.

$$\max_{l} \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial l^{*}} = \left| \overline{grad} u \right|$$

где $\overline{l^{*}} \Uparrow \overline{grad} u$

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой значения независимой переменной ***x***, неизвестной функции ***y = f(x)*** и её производных (или дифференциалов):

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Порядком уравнения называется максимальный порядок ***n*** входящей в него производной (или дифференциала).

Функция ***y***(***x***) называется **решением (или интегралом)** дифференциального уравнения если при подстановке ее в уравнение обращает его в **тождество**.

Пример: $y^{(4)} - y + x = 0$ **-** уравнение четвёртого порядка.

ОДУ первого порядка

Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида:

$$\boldsymbol{F(x, y, y') = 0}$$

где x - независимая переменная, y(x) - неизвестная функция

Общее решение: $\boldsymbol{y = \varphi(x, C)}$

Пример: $y'(x) - 3 \cdot x = 0$ общее решение: $y(x) = \frac{3}{2}x^2 + c$

Разделяют несколько типов (видов) обыкновенных дифференциальных уравнений:

-**Уравнения с разделяющимися переменными,**
-**Однородные уравнения,**
-**Линейные уравнения,**
-**Уравнение в полных дифференциалах,**
-и т.д.

Остановимся подробнее на каждом из этих типов уравнений.

Уравнения с разделёнными переменными.

Так называются уравнения вида удовлетворяющее начальному условию

$$f(x)dx + g(y)dy = 0,$$

Интегрируя, получим

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = 0$$

- общий интеграл (общее решение) этого уравнения.

Пример:

$$e^{y}\,dy - (x^{3} + 7x)\,dx = 0; \quad \int e^{y}\,dy - \int (x^{3} + 7x)\,dx = 0;$$

$$e^{y} - \frac{x^{4}}{4} + \frac{7}{2}x^{2} + c = 0$$ - общее решение

Уравнения с разделяющимися переменными.

Так называются уравнения вида

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Эти уравнения легко сводятся к уравнению с разделёнными переменными:

Записываем уравнение в форме:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

затем делим на ***g(y)*** и умножаем на ***dx***:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

Это уравнение - с разделёнными переменными. Интегрируя, получим общий интеграл:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

Пример: $y' = x \cdot (y-1);$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot (y-1); \qquad \frac{dy}{(y-1)} = x \cdot dx;$$

$$\int \frac{dy}{(y-1)} = \int x \cdot dx; \qquad \ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + C$$

Выразим y из последнего выражения как функцию x, получим общее решение:

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + 1$$

Уравнения с **однородной** правой частью. Так называются уравнения со специальным видом зависимости функции $f(x, y)$ от своих аргументов:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Это уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно новой неизвестной функции $\boldsymbol{u(x)}$ **заменой:**

$$\frac{y(x)}{x} = u(x)$$

Подставляя в уравнение $y = x \cdot u$, $y' = u + x \cdot u'$, получим

$$u + xu' = f(u),\ x\frac{du}{dx} = f(u) - u,$$

(это - уравнение с разделяющимися переменными),

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x},\ \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

- это общий интеграл уравнения относительно переменных x, u

Пример:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - y^2}{x^2},$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}, \qquad u = \frac{y}{x},\ y = ux, \qquad y' = u + u'x,$$

$$u + u'x = u + \frac{1}{u}, \qquad x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}, \qquad udu = \frac{dx}{x},$$

$$\int udu = \int\frac{dx}{x}, \quad \frac{u^2}{2} = \ln|x| + \frac{C}{2}, \quad u^2 = 2\ln|x| + C, \quad \frac{y^2}{x^2} = \ln x^2 + C,$$

$$y^2 = x^2\left(C + \ln x^2\right)$$

- общее решение уравнения

Пример:

$$xy' = y\cos(\ln y - \ln x) \qquad y' = \frac{y}{x}\cos\ln\frac{y}{x} \qquad u = \frac{y}{x},\ y = ux,$$

$$y' = u + u'x,\ u + u'x = u\cos\ln u,\ x\frac{du}{dx} = u\cos\ln u - u,\ \frac{du}{u(\cos\ln u - 1)} = \frac{dx}{x},\ \int\frac{du}{u(\cos\ln u - 1)} = \int\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{du}{u(\cos\ln u - 1)} = \left|s = \ln u\right| = \int\frac{ds}{\cos s - 1} = \left|p = \operatorname{tg}\frac{s}{2}\right| = \int\frac{2dp/(1+p^2)}{\frac{1-p^2}{1+p^2} - 1} = \int\frac{2dp}{-2p^2} = \frac{1}{p} = \operatorname{ctg}\frac{s}{2} + C = \operatorname{ctg}\frac{\ln u}{2} + C,$$

$$C \neq 0 \qquad \operatorname{ctg}\frac{\ln u}{2} = \ln|x| + \ln|C| \qquad Cx = e^{\operatorname{ctg}\frac{\ln u}{2}} \qquad Cx = e^{\operatorname{ctg}\frac{\ln(y/x)}{2}}$$

Окончательно, получим общее решение:

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + 1$$

Линейные уравнения. ДУ первого порядка называется линейным, если неизвестная функция *y*(*x*) и её производная входят в уравнение в первой степени:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

здесь ***p*(*x*), *q*(*x*)** - непрерывные функции**.**

Пример:

$$\frac{dy}{dx} - \sin(x)y = ctg(x); \qquad y' + (1 + x^2)y = 37 \cdot x + 5.$$

Для решения уравнения представим $y(x)$ в виде произведения двух новых неизвестных функций $\boldsymbol{u(x)}$ и $\boldsymbol{v(x)}$: $\boldsymbol{y(x) = u(x)v(x)}$.
Тогда

$$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

и уравнение приводится к виду:

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$$

или

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$$

Это уравнение решаем в два этапа: сначала находим функцию $v(x)$ как частное решение уравнения с разделяющимися переменными:

$$v' + p(x)v = 0$$

затем находим $u(x)$ из уравнения:

$$u'v = q(x)$$

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx \Rightarrow \ln|v| = -\int p(x)dx \Rightarrow v = e^{-\int p(x)dx}$$

$$e^{-\int p(x)dx} \cdot u'(x) = q(x) \Rightarrow u'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$$

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)$$

Отметим, решая уравнение на ***v(x)*** мы не вводим в это решение произвольную постоянную *С*, нам достаточно найти одну функцию ***v(x)***, обнуляющую слагаемое со скобками. Запоминать эту формулу не надо, лучше усвоить порядок действий и воспроизводить его при решении каждой задачи.

Пример: $$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = \frac{1}{\cos x},\ y(0) = 1$$

Решение: $$y = uv,\ y' = u'v + uv', \quad u'v + uv' - \operatorname{tg} x \cdot uv = \frac{1}{\cos x},$$

$$u'v + u(v' - v \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos x}, \quad \frac{dv}{dx} = \operatorname{tg} x \cdot v, \quad v' - v \operatorname{tg} x = 0,$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{\sin x dx}{\cos x}, \quad \ln|v| = -\ln|\cos x|,$$

$$v = \frac{1}{\cos x},$$

$$\frac{u'}{\cos x} = \frac{1}{\cos x},\ u(x) = x + C$$

и общее решение уравнения .

$$y(x) = \frac{x + C}{\cos x}$$

Для нахождения частного решения, соответствующего начальным условиям (задача Коши), подставим в общее решение

$$y(x) = \frac{x + C}{\cos x} \qquad x = 0,\ y = 1:\ 1 = \frac{0 + C}{\cos 0} \Rightarrow C = 1$$

Решение задачи:

$$y(x) = \frac{x + 1}{\cos x}$$

Уравнение в полных дифференциалах. Так называется уравнение вида

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0.$$

($P(x, y)$, $Q(x, y)$ - непрерывно дифференцируемы) в случае, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, т.е. если существует такая функция $u(x, y)$, что

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial y}dy$$

Необходимым и достаточным условием существования такой функции является условие:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Если - уравнение в полных дифференциалах, то его правая часть равна 0, т.е. принимает вид $du(x, y) = 0$. На решении $y(x)$ получим $du(x, y(x)) = 0$, следовательно, $u(x,y(x)) = C$, где C - произвольная постоянная. Соотношение $u(x, y) = C$ и есть общее решение уравнения в полных дифференциалах.

Для нахождения функции *u*(*x*, *y*) решается система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы находим:

$$u(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y)$$

с точностью до произвольной дифференцируемой по *y* функции (эта фун$\varphi(y)$) играет роль постоянной интегрирования; так как интегрирование ведётся по переменной *x*.

Дифференцируем эту функцию по *y* и приравниваем выражению, стоящему во втором уравнении системы (т.е. $Q(x, y)$), получим дифференциальное уравнение из которого можно найти $\varphi(y)$.

Пример: найти общее решение уравнения $\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\left(y-\frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy=0$

Убедимся, что это - уравнение в полных дифференциалах.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin 2x}{y}+x, \\ \frac{\partial u}{\partial y}=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}. \end{cases}$$

$$P(x,y)=\frac{\sin 2x}{y}+x;\ Q(x,y)=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\sin 2x}{y^2};\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{2\sin x\cos x}{y^2}=-\frac{\sin 2x}{y^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$u(x,y)=\int\left(\frac{\sin 2x}{y}+x\right)dx+\varphi(y)=-\frac{\cos 2x}{2y}+\frac{x^2}{2}+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\cos 2x}{2y^2}+\varphi'(y)=y-\frac{\sin^2 x}{y^2}$$

$$\Rightarrow \varphi'(y)=y-\frac{1}{2y^2}\Rightarrow \qquad \varphi(y)=\int\left(y-\frac{1}{2y^2}\right)dy=\frac{y^2}{2}+\frac{1}{y}$$

$$u(x,y)=-\frac{\cos 2x}{2y}+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{y} \qquad -\frac{\cos 2x}{2y}+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{y}=C$$

ОДУ высших порядков

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой значения независимой переменной x, неизвестной функции y = f(x) и её производных (или дифференциалов):

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Общим решением (общим интегралом) уравнения называется соотношение вида:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

Некоторые типы уравнений, допускающие понижение порядка.

Уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x)$$

решается последовательным *n*-кратным интегрированием.

Пример:

$$y^{(4)} = \sin x \Rightarrow y''' = \int \sin x dx = -\cos x + C_1 \Rightarrow y'' = -\int (\cos x + C_1) dx = -\sin x + C_1 x + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \Rightarrow y = \cos x + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

Переобозначив постояные, общее решение запишем в виде :
$y = \cos x + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$.

Уравнение, не содержащее в явном виде неизвестную функцию и её младшие производные.

Порядок уравнения вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, y^{(k+2)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, не содержащего функции $y(x)$ и $(k-1)$ младшую производную этой функции в явном виде, может быть понижен ровно на k единиц введением новой неизвестной функции

$z(x) = y^{(k)}(x)$. Тогда уравнение примет вид

$$F(x, z, z', z'', \ldots, z^{(n-k)}) = 0$$

т.е. будет уравнением $(n-k)$-го порядка.

После нахождения $z(x)$ последовательным интегрированием решается уравнение $y^{(k)}(x) = z(x)$.

Пример: Понизить порядок уравнения:

$$x^6 y''' - 2x^5 y'' = \frac{(y'')^3}{2}$$

Младшая производная, входящая в явной форме в уравнения, - вторая, поэтому делаем замену искомой функции:

$$z(x) = y''(x)$$

Тогда:

$$y''' = z'$$

и уравнение примет вид

$$x^6 z' - 2x^5 z = \frac{z^3}{2}$$

Уравнение, не содержащее в явном виде независимую переменную *x*. Порядок уравнения

$$F(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

не содержащего явно *x*, может быть понижен на 1 с помощью приёма, который заключается в том, что вводится новая функциональная зависимость y' от *y*:

$$y' = p(y)$$

Пример: Понизить порядок уравнения:

$$yy'' = y'^2 - y';$$

Переменная ***x*** явно в уравнение не входит, поэтому полагаем $y' = p(y)$,

$y'' = p'p$ тогда $ypp' = p^2 - p$.

Просто сократить на ***p*** это уравнение нельзя, так как можно потерять семейство р $p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$

поэтому рассматриваем два случая:

$$p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$$

$$p \neq 0 \Rightarrow yp' = p - 1.$$

Спасибо за внимание!