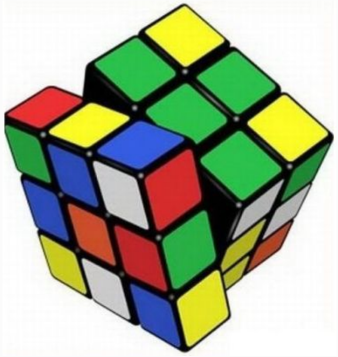
Решение логических задач

при подготовке к ЕГЭ



Автор: Мигачева А.А.,
учитель информатики.
МОУ «СОШ №61» ,
г. Саратов

Что нужно знать для решения задач:

Для логических величин обычно используются три операции:

1. **Конъюнкция** – логическое умножение (И) –**and, &, ∧**.
2. **Дизъюнкция** – логическое сложение (ИЛИ) –**or, |, v**.
3. **Логическое отрицание** (НЕ) – **not, ¬**.

Дополнительные логические операции:

4. **Импликация** - логическое следование **→A B**
5. **Эквивалентность** - логическое равенство **↔A B**

Логические выражения можно преобразовывать в соответствии с **законами алгебры логики**:

Законы рефлексивности

$a \lor a = a$

$a \land a = a$

Законы коммутативности

$a \lor b = b \lor a$

$a \land b = b \land a$

Законы ассоциативности

$(a \land b) \land c = a \land (b \land c)$

$(a \lor b) \lor c = a \lor (b \lor c)$

Законы дистрибутивности

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Закон отрицания отрицания

$\neg (\neg a) = a$

Законы де Моргана

$\neg (a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$

$\neg (a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$

Законы поглощения

$a \vee (a \wedge b) = a$

$a \wedge (a \vee b) = a$

Таблицы истинности

Логические операции удобно описывать так называемыми **таблицами истинности**, в которых отражают результаты вычислений сложных высказываний при различных значениях исходных простых высказываний.

Простые высказывания обозначаются переменными (например, **А и В**).

Дизъюнкция

A	B	A∨B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Конъюнкция

A	B	A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Инверсия

A	¬A
0	1
1	0

Импликация

A	B	A→B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквивалентность

A	B	A~B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Задание 1.

Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \lor L \lor M) \land (\neg L \land \neg M \land N) = 1,$$

где K, L, M, N – логические переменные?

Решение задачи № 1

Высказывание $(K \lor L \lor M) \land (\neg L \land \neg M \land N)$ истинно только в том случае, когда истинны оба высказывания $(K \lor L \lor M)$ и $(\neg L \land \neg M \land N)$.

Второе из этих высказываний, $(\neg L \land \neg M \land N)$, истинно только при $L = 0$, $M = 0$, $N = 1$.

При найденных значениях L и M первое высказывание, $(K \lor L \lor M)$, истинно, если $K = 1$.

Ответ: ***уравнение имеет только одно***

Задание 2.

Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \wedge L) \vee (M \wedge N) = 1,$$

где K, L, M, N – логические переменные?

Решение задачи № 2

Высказывание (K ^ L) v (M ^ N) истинно, когда истинно хотя бы одно из высказываний (K ^ L), (M ^ N).
Первое из этих высказываний, (K ^ L), истинно при K = 1, L = 1, а поскольку второе высказывание при этом может принимать любое значение, то для M и N следует учитывать четыре различных набора: (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1).
Второе из этих высказываний, (M ^ N), истинно при M = 1, N = 1, а поскольку первое высказывание при этом может принимать любое значение, то для K и L следует учитывать четыре различных набора: (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1). Последний из этих наборов следует исключить, т.к. он уже учитывался ранее, когда M и N могли принимать любые значения.

Ответ: таким образом, уравнение имеет 7 решений.

Задание 3.

Укажите значения переменных K, L, M, N, при которых логическое выражение

$$(K \rightarrow M) \vee (L \wedge K) \vee \neg N$$

ложно.

Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K, L, M, N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что K =1, L = 1, M = 0, N = 1.

Решение задачи 3.

Высказывание (K -> M) v (L ^ K) v ¬N ложно, когда ложны все высказывания

K -> M,

L ^ K,

¬N.

Первое из этих высказываний, K -> M, ложно, если K = 1, M = 0.

Второе из этих высказываний, L ^ K, при K = 1 ложно, если L = 0.

Третье из этих высказываний, ¬N, ложно, если N = 1.

Таким образом, значения переменных, при которых логическое выражение, заданное в условии задачи, ложно: 1001.

Ответ: 1001.

Задача 4

Сколько существует различных наборов значений логических переменных x1, x2, x3, x4, x5, y1, y2, y3, y4, y5, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

(x1->x2) / (x2->x3) / (x3->x4) / (x4->x5) = 1
(y1->y2) / (y2->y3) / (y3->y4) / (y4->y5) = 1
x1/y1 =1

В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы значений переменных x1, x2, x3, x4, x5, y1, y2, y3, y4, y5, при которых выполнена данная система равенств.
В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Решение
.

Решение задачи 4

Первое уравнение означает, что если x[i]=1, то для всех k>=i выполнено x[k] = 1 . Поэтому первое уравнение имеет 6 решений (1-я цифра в наборе – значение x1, 2-я цифра в наборе – значение x2 и т.д.):
00000, 00001, 00011, 00111, 01111, 11111
Второе уравнение имеет 6 аналогичных решений (1-я цифра в наборе – значение y1, 2-я цифра в наборе – значение y2 и т.д.):
00000, 00001, 00011, 00111, 01111, 11111
Решение системы – пара таких наборов. Ввиду третьего уравнения, один наборов в паре должен быть набором 11111. Таких пар – 11: {11111, 11111}, 5 пар вида {11111, R} и 5 пар вида {R, 11111}, здесь R – один из наборов 00000, 00001, 00011, 00111, 01111.

Ответ*: 11*

Замечание к задаче 4.

На первый раз выпишем все решения явно:

{11111, 00000}; {11111, 00001}; {11111, 00011}; {11111, 00111}; {1
{11111, 11111}

{00000, 11111}; {00001, 11111}; {00011, 11111}; {00111, 11111}
; {01111, 11111};
{11111, 11111}

Написано 12 пар, но решений — 11.
Выделенная жирным пара **{11111, 11111}** написана **2 раза**!

Пример 5.

Упростить выражения

$$\overline{AB}+\overline{B}\,,\qquad \overline{\overline{B}C+C}\,,\qquad \overline{\overline{A}C}+B\overline{C}$$

так, чтобы в полученных формулах не содержалось отрицания сложных высказываний.

Решение:

$$X=\overline{AB}+\overline{B}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{B}=\overline{A}+\overline{B}\,;$$

$$Y=\overline{\overline{B}C+C}=\left(B+\overline{C}\right)\overline{C}=\overline{C}\,;$$

$$\overline{\overline{A}C}+B\overline{C}=A+\overline{C}+B\overline{C}=A+\overline{C}\,.$$

Задание 6

Для какого из указанных значений X истинно высказывание

$\neg ((X>2) \rightarrow (X>3))$?

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

Решение:

Высказывание истинно, если выражение в скобках ложно. Импликация ложна тогда и только тогда, когда посылка истинна, а следствие ложно. Посылка истинна в вариантах 3 и 4, однако вариант 4 не подходит, так как в таком случае следствие истинно.

Следовательно **ответ** 3.

Задание 7

Для какого из названий животных **ложно** высказывание: **(Заканчивается на согласную букву) Λ (В слове 6 букв) → (Четвертая буква согласная)**?

1) Страус
2) Леопард
3) Верблюд
4) Кенгуру

Решение:
В первую очередь выполняется логическое "**И**". Импликация ложна только тогда, когда посылка истина, а следствие ложно. Посылка **{(Заканчивается на соглас ную букву) Λ (В слове 6 букв)**} **истина** для варианта один, а следствие **{(Четвертая буква согласная)**} для него **ложно**.
Следовательно, **ответ 1**.

Задание 8

Какое логическое выражение равносильно выражению

¬ (A \/ ¬B)?

1) **A \/ B**
2) **A /\ B**
3) **¬A \/ ¬B**
4) **¬A /\ B**

Решение:

¬ (A \/ ¬B) = ¬ A /\ ¬ (¬B) = ¬ A /\ B.

Правильный **ответ 4**.

Задание 9

На числовой прямой даны два отрезка:
P = [2, 10] и Q = [6, 14].
Выберите такой отрезок А, что формула

$$((x \in A) \to (x \in P)) \lor (x \in Q)$$

тождественно **истинна**, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной х.

1) [0, 3]
2) [3, 11]
3) [11, 15]
4) [15, 17]

Решение задачи 9

Введем обозначения:

$(x \in A) \equiv A$;

$(x \in P) \equiv P$;

$(x \in Q) \equiv Q$.

Применив преобразование импликации, получаем:

$$\neg A \lor P \lor Q.$$

Логическое ИЛИ истинно, если истинно хотя бы одно утверждение.

Выражение **$P \lor Q$ истинно на отрезке [2; 14].** Поскольку все выражение должно быть истинно для любого x, выра жение $\neg A$ должно быть истинно на множестве $(-\infty; 2) \cup (14; \infty)$. Таким образом, **выражение A** должно быть **истин но только внутри отрезка [2;14].**

Из всех отрезков только **отрезок [3; 11] полностью лежит внутри отрезка [2; 14].**

Ответ: 2

Источники информации:

http://2krota.ru/uploads/posts/2011-12/ZnaeteliVifakt-0020.jpg
http://www.inf1.info/image/logic-computer/logic
http://2012.ege-go.ru/zadania/grb/b15/b15-answ/#B15.1
http://infolike.narod.ru/logic.html
http://www.ido.rudn.ru/nfpk/inf/inf7.html
http://inf.reshuege.ru/test?theme=233